解析学特別演習 II・小テスト (1) の解説

1999 年 10 月 12 日
河東泰之
e-mail: yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp
http://kyokan.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/

配点は，40 点，40 点，20 点です．平均は 50 点でした．

[1] 普通のステートメントは，
「測度空間 (X, μ) 上の可測関数の列 $\{f_n(x)\}$ が，X上ほとんどいたる所 $f(x)$ に収束しているとする．X上の可積分関数 $g(x)$ で，各 n について

$$|f_n(x)| \leq g(x), \quad \text{a.e.}$$

となるものが存在すれば

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n(x)\, dx = \int_X f(x)\, dx$$

が成り立つ.」
という形です.「ほとんどいたる所」を書いてない人が結構いましたが，まあこれはたいしたことはありません．$\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ が (ほとんどいたる所) 存在する，というのはきちんと仮定すべきことですが，書き忘れている人がけっこういました．しかし，最大のポイントは「$f_n(x)$ が一律に可積分関数 $g(x)$ で押さえられる」という仮定で,「可測関数 $g(x)$」などとしているのは重大な誤りです．この点に関し，ほぼまともに書けている人は 37 人中，22 人でした．

この定理は Lebesgue 積分論で最も重要な定理です．数学科に来て Lebesgue 積分論を習ったからには，この定理だけは忘れないで卒業してもらいたいと思います．またこの授業でも，この定理は繰り返し繰り返し使います．忘れていた人は，必ず復習しておいてください．この定理 (と，単調収束定理，Fubini の定理など) がわかっていなければこの授業はわかりません．

[2] これは，いろいろな書き方がありますが，素朴な形は
「Ωは複素平面の有界領域で，その境界 Cは，共通点を持たない有限個の区分的に滑らかな Jordan 閉曲線からなるとする．この時，Ωで正則でΩの閉包で連続な関数 $f(z)$ に対し，$\displaystyle\int_C f(z)\, dz = 0$ が成り立つ.」
といった形で,「現代的」な形としては
「$f(z)$ は領域Ωで正則な関数とする．Ω内で 0 にホモローグなサイクルγに対し，$\displaystyle\int_\gamma f(z)\, dz = 0$ が成り立つ.」
などもあります．内容の小さな違いはいろいろありますが，別にどれでもかまいません．

線積分を考えるため，曲線は「長さを持つ」ものに制限するか，または仮定を強めて「区分的に滑らか」とする必要がありますが，それは今特に聞きたかったことではありません．ポイントは,「$f(z)$ は領域Ωで正則な関数，γをΩ内の (長さを持つ) 閉曲線とすると，$\displaystyle\int_\gamma f(z)\,dz = 0$」というような書き方ではダメであるということです．閉曲線の「内側」まで正則であることを (数学的に厳密な形で) 仮定する必要があります．こういうことがきちんと書けないようでは困ります．この点に関し，ほぼまともに書けている人は 37 人中，21 人でした．

Cauchy の積分公式と間違えている人も結構いましたが，それは本質的に同じ種類のことで，上と同様の注意があてはまります．

[3] ・$f(x) \in C_0(\mathbf{R})$ なら一様収束 (あるいは Lebesgue の収束定理) ですぐわかる．

・$C_0(\mathbf{R})$ は $L^1(\mathbf{R})$ で dense なので，一般の場合も上の場合に帰着する．

というのでできます．できはよくありませんでした．直接 Lebesgue の収束定理に持ちこもうとしていた人がたくさんいましたがそれではできません．