2005 年度解析学 VII・関数解析学期末テスト・略解・解説

2005 年 10 月 3 日
河東泰之 (かわひがしやすゆき)
数理科学研究科棟 323 号室 (電話 5465-7078)
e-mail yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp
http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/

配点は，[1] 10 点 ×5, [2] 25 点，[3] 25 点，[4] 25 点，[5] 25 点の 150 点満点です．[0] 番は，正しく書いてあって 0 点，間違っってているものは –30 点です．最高点は 125 点 (1 人)，平均点は 45.2 点，その得点の分布は次のとおりです．

0–49 (点)	50–59	60–69	70–79	80–89	90–99	100–
13 (人)	1	2	1	2	1	2

成績は，80 点以上を A, 50〜79 点を B, 25〜49 点を C, 24 点以下を D としました．

[1] 例はもちろんたくさんありますが，ここでは簡単な例をあげておきます．

(1) $f(x,y)$ を台が半径 1 の円板に含まれる連続関数で，恒等的には 0 でないものとします．$f_n(x,y)=f(x-n,y)$ とおけば大丈夫です．証明には，台が有界な連続関数たちが $L^2(\mathbf{R}^2)$ で稠密であることを使うか，Fourier 変換を使うかすればできます．最初から，f は 0 でない $L^2(\mathbf{R}^2)$ の元としても大丈夫です．

(2) $f_n = n\chi_{(n,n+1)}$ とすれば O.K. です．ここで χ は特性関数を表します．

(3) $H=\ell^2$ 上で，

$$T(x_1,x_2,x_3,\dots)=(x_1,x_2/2,x_3/3,x_4/4,\dots)$$

とすれば O.K. です．

(4) $H=\ell^2$ 上で，

$$T(x_1,x_2,x_3,\dots)=(x_1,0,x_2,0,x_4,0,x_6,0,x_8,0,\dots)$$

とすれば O.K. です．

(5) $H=\ell^2$ 上で，

$$T(x_1,x_2,x_3,\dots)=(x_1,0,x_2,0,x_3,0,x_4,0,x_5,0,\dots)$$

とすれば O.K. です．

[2] x を固定して，$y\mapsto(y,T_nx)$ という写像の族に対して一様有界性原理を使うと，$\{\|T_nx\|\}_n$ の有界性がわかります．今度は $x\mapsto T_nx$ という写像の族に対して一様有界性原理を使うと定数 C がとれて，$\|T_n\|<C$ とできます．$B(x,y)=\lim_n(T_nx,y)$ とおくと，B は H 上の sesqui-linear form で $|B(x,y)|\le C\|x\|\|y\|$ となるので，H 上の有界線形作用素 T で，$B(x,y)=(Tx,y)$ となるものがあります．

[3] (1) いくつか書き方がありますがたとえば

$$\operatorname{ess.sup}_x |f(x)| = \inf\{C\ge 0 \mid |f(x)|\le C \ \text{ a.e.}\}$$

です．(空集合の inf は ∞ です．)

(2) 十分性は明らかなので，必要性を示します．Lebesgue 測度を μ と書きます．$\operatorname{ess.sup}_x |f(x)| = \infty$ と仮定すると，可測集合 A_n で，$0 < \mu(A_n) < \infty$, $n \neq m$ のとき $\mu(A_n \cap A_m) = 0$, 各 A_n 上で $n \leq |f(x)|$ となるものが取れます．

$$g = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_{A_n}}{n\mu(A_n)^{1/2}}$$

とおけば，これは $L^2(\mathbf{R})$ の元で，

$$\|fg\|_2^2 \geq \sum_{n=1}^{\infty} 1 = \infty$$

となるので fg は $L^2(\mathbf{R})$ の元ではありません．

(3) 有界線形作用素になることと，$\|T\| \leq \operatorname{ess.sup}_x |f(x)|$ は明らかです．任意の正の ε に対し，

$$A_\varepsilon = \{x \mid |f(x)| \geq \operatorname*{ess.sup}_x |f(x)| - \varepsilon\}$$

の測度が正なので，その可測部分集合 B_ε で，$0 < \mu(B_\varepsilon) < \infty$ となるものが取れます．$g \in L^2(\mathbf{R})$ として χ_{B_ε} を取ることにより $\|T\| \geq \operatorname{ess.sup}_x |f(x)| - \varepsilon$ がわかり，ε が任意であったことより，$\|T\| = \operatorname{ess.sup}_x |f(x)|$ がわかります．

[4] $L^p(\mathbf{R})^* = L^q(\mathbf{R})$ の同一視より，必要性は明らかです．十分性の対偶を示すため，$\{f_n\}_n$ の有限線形結合たちの $L^p(\mathbf{R})$ における閉包を X とし，これが $L^p(\mathbf{R})$ 全体には等しくないとします．すると，Hahn-Banach の定理より X 上では 0 だが，$L^p(\mathbf{R})$ 全体では 0 に等しくない，$L^p(\mathbf{R})^*$ の元が得られます．上の同一視より，これは $\bigcap_n K_{f_n}$ に 0 でない元が入っていることを意味します．

[5] $g \in L^2(\mathbf{R})$ を任意に取って $g_n(x) = g(x-n)$ とおくと，$\{g_n\}_n$ は $L^2(\mathbf{R})$ において 0 に弱収束しています．よって T がコンパクトならば，$\|Tg_n\| \to 0$ とならなくてはいけませんが，$\|Tg_n\| = \|f * g\|$ なので $f * g = 0$ が任意の g について成り立たなくてはなりません．これは $f = 0$ を導きます．(たとえば Fourier 変換すればすぐにわかります．) $f = 0$ のとき，$T = 0$ でこれがコンパクトであることは自明なので，答えは $f = 0$ です．

最初から Fourier 変換して,「有界連続関数 F による $L^2(\mathbf{R})$ 上の掛け算作用素がコンパクトになるのは $F = 0$ の時に限る」ことを示してもできます．