２０１７年度微分積分学続論 補足と演習問題　　４月１８日

担当：坪井　俊

http://faculty.ms.u-tokyo.ac.jp/users/tsuboi/zokuron2017.html

補足：

【命題】$f : U \longrightarrow \boldsymbol{R}$ が C^1 級ならば、f は全微分可能である。

この命題の証明は、以下のものがより良いと思われます。

【証明】　$\overrightarrow{y}^k = (y_1, \ldots, y_k, x_{k+1}, \ldots, x_n)$ ($\overrightarrow{y}^0 = \overrightarrow{x}$, $\overrightarrow{y}^n = \overrightarrow{y}$) とおいて、

$$\begin{aligned} f(\overrightarrow{y}) - f(\overrightarrow{x}) &= \sum_{k=1}^{n} \{f(\overrightarrow{y}^k) - f(\overrightarrow{y}^{k-1})\} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \int_0^1 \big(\frac{\partial f}{\partial x_k}\big)_{(\overrightarrow{y}^k + t(\overrightarrow{y}^k - \overrightarrow{y}^{k-1}))} (y_k - x_k) \mathrm{d}t \end{aligned}$$

である。$\big(\frac{\partial f}{\partial x_k}\big)_{(\overrightarrow{y})}$ は、$\overrightarrow{x}$ で連続だから、与えられた $\varepsilon > 0$ に対し、任意の $\overrightarrow{y}$ に対し、$\|\overrightarrow{y} - \overrightarrow{x}\| < \delta$ ならば、$|\big(\frac{\partial f}{\partial x_k}\big)_{(\overrightarrow{y})} - \big(\frac{\partial f}{\partial x_k}\big)_{(\overrightarrow{x})}| \leqq \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$ をみたすような δ を定める。そうすると

$$\begin{aligned} &|\int_0^1 \big(\frac{\partial f}{\partial x_k}\big)_{(\overrightarrow{y}^{k-1} + t(\overrightarrow{y}^k - \overrightarrow{y}^{k-1}))} (y_k - x_k) \mathrm{d}t - \int_0^1 \big(\frac{\partial f}{\partial x_k}\big)_{(\overrightarrow{x})} (y_k - x_k) \mathrm{d}t| \\ \leqq\, & \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} |y_k - x_k| \end{aligned}$$

ゆえに

$$|f(\overrightarrow{y}) - f(\overrightarrow{x}) - \sum_{k=1}^{n} \big(\frac{\partial f}{\partial x_k}\big)_{(\overrightarrow{x})} (y_k - x_k)| \leqq \sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} |y_k - x_k| \leqq \varepsilon \|\overrightarrow{y} - \overrightarrow{x}\|$$

（平均値の定理により

$$f(\overrightarrow{y}^k) - f(\overrightarrow{y}^{k-1}) = \big(\frac{\partial f}{\partial x_k}\big)_{(\overrightarrow{y}^{k-1} + s_k(\overrightarrow{y}^k - \overrightarrow{y}^{k-1}))} (y_k - x_k)$$

となる $0 < s_k < 1$ が存在することを用いてもよい。）

演習問題： (解答等は、B5 または A4 のレポート用紙等で、学生証番号、氏名を明記して翌週または翌々週に提出してください。これは受講生の権利であって義務ではありません。)

問題１． (1) $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^n$ に対し、$\|\vec{v}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} {v_i}^2}$ とするとき、

$\dfrac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} |v_i| \leqq \|\vec{v}\| \leqq \sum_{i=1}^{n} |v_i|$ を示せ。

(2) $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^n$ に対し、$\vec{x} \bullet \vec{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ とするとき、

$|\vec{x} \bullet \vec{y}| \leqq \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|$ を示せ。

問題２． 実数 a をパラメータとする関数 $f_a : \boldsymbol{R}^3 \longrightarrow \boldsymbol{R}$ を $f_a(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{3} {x_i}^3 + a \prod_{i=1}^{3} x_i$ で定義する。ここで $\prod_{i=1}^{3} x_i = x_1 x_2 x_3$ である。

(1) $D\, f_a = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_a}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_a}{\partial x_2} & \dfrac{\partial f_a}{\partial x_3} \end{pmatrix}$ を求めよ。

(2) $D\, f_a = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ となる点を求めよ。

(3) WolframAlpha https://www.wolframalpha.com/ にアクセスし、
[`x^3+y^3+z^3 - a x y z = b`] の `a` , `b` に $-2, -1, 0, 1, 2$ などの数値を与えて、入力し、出力される等位面を観察せよ。
（携帯端末でアクセスすると 360 円のアプリを購入させられるところに行き易いが、[Continue to wolframalpha.com] とすれば目的のページに行ける。）

問題３． ベクトル値関数 $\vec{x} : (a, b) \longrightarrow \boldsymbol{R}^n$ で $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$ の各成分 $x_i(t)$ が C^1 級であるものを考える。$\left(\dfrac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t}\right)_{(t)} = \begin{pmatrix} \left(\dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}\right)_{(t)} \\ \vdots \\ \left(\dfrac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}t}\right)_{(t)} \end{pmatrix}$ を $\vec{x}(t)$ における**速度ベクトル**と呼ぶ。

$\boldsymbol{R}^n$ の開集合 U 上で定義された関数 $f : U \longrightarrow \boldsymbol{R}$ に対し、$\left(\dfrac{\mathrm{d}f(\vec{x}(t))}{\mathrm{d}t}\right)_{(t)} = 0$ であることと、$\left(\dfrac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t}\right)_{(t)} \in \ker(Df)_{(\vec{x}(t))}$ は同値であることを示せ。さらに、$t \in (a, b)$ に対し、常に $\left(\dfrac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t}\right)_{(t)} \in \ker(Df)_{(\vec{x}(t))}$ ならば、$\vec{x}(t)$ の像は f の等位面上にあることを示せ。