0.1 多様体の部分集合の比較、アイソトピー

多様体の部分集合 A_0, A_1 が本質的に同じであることをどのように言い表せばよいであろうか？

ユークリッド空間の２つの部分集合 A_0, A_1 に対しては、一方を他方に、回転と平行移動の合成で写すことができれば、それらは合同と呼ばれる。相似変換で写りあうものを相似な図形と呼ぶ。

多様体においては、多様体の微分同相写像で写りあうものを同じものと考えるのが適当である。すなわち、微分同相写像 $F: M \longrightarrow M$ によって、$F(A_0) = A_1$ となるときには、多様体 M の部分集合としての、A_0 の性質と A_1 の性質はまったく差がないと考えられる。

さらに、徐々に写すあるいは連続的に移動して写すということを考えると、次のようなことが考えられる。

$F_t : M \longrightarrow M$ という t に対して連続的に変化する微分同相写像によって、$F_0 = \mathrm{id}_M$ で $F_0(A_0) = A_0$ であり、$F_1(A_0) = A_1$ となる。このとき、$A_t = F_t(A_0)$ は A_0 から連続的に変化する A_0 と同じ性質を持つ部分集合である。従って、t に対して連続的に変化する微分同相写像 $F_t : M \longrightarrow M$ を考えることが重要であろう。

$F_t : M \longrightarrow M$ が t に対して連続的ということを、$F : [0,1] \times M \longrightarrow M$ という C^∞ 級写像があって、$F_t(x) = F(t,x)$ となっていることと定義する。$F : [0,1] \times M \longrightarrow M$ という C^∞ 級写像とは、$\mathbf{R} \times M \longrightarrow M$ という C^∞ 写像の $[0,1] \times M$ への制限のことである。

t に対して連続的に変化する微分同相写像 $F_t : M \longrightarrow M$ $(t \in [0,1])$ で、$F_0 = \mathrm{id}_M$ をみたすものをアイソトピーと呼ぶ。

上の C^∞ 級写像 $F : \mathbf{R} \times M \longrightarrow M$ について、$\mathbf{R} \times M$ の点 (t_0, x_0) を固定すると、$F_t(x_0)$ は $F_{t_0}(x_0)$ を通る曲線だから、$T_{F_{t_0}(x_0)}M$ の接ベクトルを定める。F_{t_0} は微分同相写像だから、任意の点 $y_0 \in M$ に対し、$x_0 = {F_{t_0}}^{-1}(y_0)$ をとれば、$T_{y_0}M$ の接ベクトルが定まる。

このような $X_t = \dfrac{\partial F_t}{\partial t} \circ {F_t}^{-1}$ は、多様体の各点 y_0 に対し、$T_{y_0}M$ の元を対応させるものである。さらに、y_0 のまわりの局所座標 (U, φ), $\varphi = (x_1, \dots, x_n)$

をとると、$X_t = \sum \xi_i(t, x_1, \ldots, x_n)\dfrac{\partial}{\partial x_i}$ は次のように表される。

$$\begin{aligned}&(\varphi \circ (F_t \circ {F_{t_0}}^{-1}) \circ \varphi^{-1})(x_1, \ldots, x_n)\\ &= (f_1(t, t_0, x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_n(t, t_0, x_1, \ldots, x_n))\end{aligned}$$

として、$f_i(t, t_0, x_1, \ldots, x_n)$ は、$(t, t_0, x_1, \ldots, x_n)$ について C^∞ 級関数であり、

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^n \xi_i(t, f_1(t, t_0, x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_n(t, t_0, x_1, \ldots, x_n))\frac{\partial}{\partial x_i}\\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\mathrm{d}\, f_i}{\mathrm{d}\, t}(t, t_0, x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial}{\partial x_i}\end{aligned}$$

である。これは、$(t_0, \varphi(y_0))$ の近傍 $(\subset \mathbf{R} \times \varphi(U))$ 上の $\mathbf{R}^n$ に値を持つ C^∞ 級の写像である。接束 TM の座標近傍のとり方から、(t_0, y_0) の近傍において、$X(t, y) = X_t(y)$ により定められる写像 $X : \mathbf{R} \times M \longrightarrow TM$ は C^∞ 級写像となる。

各 t に対し、$X_t : M \longrightarrow TM$ は $p \circ X_t = \mathrm{id}_M$ となるような C^∞ 級写像である。この性質 $p \circ X = \mathrm{id}_M$ を持つ C^∞ 級写像 $X : M \longrightarrow TM$ を M 上の C^∞ 級ベクトル場 (C^∞ vector field) と呼ぶ。X_t が t に依存しているときには時刻に依存する (time dependent) C^∞ 級ベクトル場と呼ぶ。

X_t から見ると、F_t は $\dfrac{\mathrm{d}\, F_t}{\mathrm{d}\, t} = X_t \circ F_t$, $F_{t_0} = \mathrm{id}_M$ を満たしている。

局所座標で書くと、$F_t \circ {F_{t_0}}^{-1}$ の表示を見ると、

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\, t}\begin{pmatrix} f_1(t, t_0, x_1, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(t, t_0, x_1, \ldots, x_n)\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix} \xi_1(t, f_1(t, t_0, x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_n(t, t_0, x_1, \ldots, x_n)) \\ \vdots \\ \xi_n(t, f_1(t, t_0, x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_n(t, t_0, x_1, \ldots, x_n))\end{pmatrix}\end{aligned}$$

但し、$\begin{pmatrix} f_1(t_0, t_0, x_1, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(t_0, t_0, x_1, \ldots, x_n)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ であり、$\begin{pmatrix} f_1(t, t_0, x_1, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(t, t_0, x_1, \ldots, x_n)\end{pmatrix}$ は

$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ を $t = t_0$ における初期値とする正規形の 1 階常微分方程式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1(t, x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ \xi_n(t, x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}$$

の解となっている。

【例 0.1.1】　$A(t)$ を t に連続に依存する $n \times n$ 実行列とする。n 次元ユークリッド空間上で、次の常微分方程式は線形常微分方程式と呼ばれる。

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\mathbf{x} = A(t)\mathbf{x}$$

特に、$A(t) = A$ が時刻に依存しないとき、行列の指数関数を用いて $F_t \circ {F_{t_0}}^{-1}(\mathbf{x}) = e^{(t-t_0)A}\mathbf{x}$ となっている。但し、$e^{(t-t_0)A} = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t-t_0)^k}{k!} A^k$ である。

$A(t) = (a_{ij}(t))_{i,j=1,\dots,n}$ として、ユークリッド空間の接空間の基底 $\dfrac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \dfrac{\partial}{\partial x_n}$ を用いるとこの線形常微分方程式は接ベクトル場

$$\sum_{i=1}^{n} \Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t) x_j\Big) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

と書かれる。

0.2　フロー

アイソトピーの特別な場合として、$F_t : M \longrightarrow M$ が群 $\mathbf{R}$ の M 上への作用を定義している場合が考えられる。すなわち、$F_s \circ F_t = F_{s+t}$ となる場合である。この $\mathbf{R}$ の作用をフロー (流れ) とよぶ。このとき、$F_t(x_0) = F_{t-t_0}(F_{t_0}(x_0))$ である。従って、$X_{t_0}(y_0) = \dfrac{\partial F}{\partial t}(t_0, {F_{t_0}}^{-1}(y_0)) = \dfrac{\partial F}{\partial t}(0, y_0) = X_0(y_0)$ となり、ベクトル場 X_t は t に依存しない。$X = X_t$ をフロー F_t を生成するベク

トル場と呼び、F_t を X が生成する（あるいは X により生成される）フローと呼ぶ。

【例 0.2.1】 n 次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^n$ への $\mathbf{R}$ の作用を $F_t(\mathbf{x}) = e^{tA}\mathbf{x}$ で定めると、これは、$\mathbf{R}^n$ 上のベクトル場 $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\Big)\frac{\partial}{\partial x_i}$ により生成される。

F_t を多様体 M 上のフローとするとき、$x \in M$ に対して $\{F_t(x) \mid t \in \mathbf{R}\}$ を x を通る軌道 (orbit) と呼ぶ。F_t の同じ軌道上にあることは M 上の同値関係である。軌道は、１点、円周、または $\mathbf{R}$ でパラメータ付けられる。円周でパラメータ付けられた軌道は１次元部分多様体であるが、$\mathbf{R}$ でパラメータ付けられている場合には、必ずしもそうであるとは限らない。

【問題 0.2.2】 コンパクト多様体 M 上のフロー φ_t を考える。

(1) １点 $x_0 \in M$ に対し、$\varphi_t(x_0)$ が t について定値写像ではないとする。このとき、ある実数 T $(T \geqq 0)$ が存在し、「$\varphi_{t_1}(x_0) = \varphi_{t_2}(x_0)$ ならば、整数 n があって、$t_2 - t_1 = nT$ となる」ことを示せ。

(2) １点 $x_0 \in M$ に対し、$\varphi_t(x_0)$ を考える。M の点 y で、y の任意の近傍 $U_y \subset M$ に対し、$\sup\{t \in \mathbf{R} \mid \varphi_t(x) \in U_y\} = +\infty$ となるものが存在することを示せ。

【解】 (1) $A = \{t \in \mathbf{R} \mid \varphi_t(x_0) = x_0\} \subset \mathbf{R}$ を考える。$0 \in A$ である。また A の 2 つの元 a_1, a_2 に対し、$\varphi_{a_1-a_2}(x_0) = \varphi_{a_1}(\varphi_{-a_2}(x_0)) = x_0$ だから、$a_1 - a_2 \in A$ である。従って A は $\mathbf{R}$ の部分群となる。もしも、$a_i \in A$ $(i = 1, 2, \ldots)$ が収束点列で $a = \lim_{i\to\infty} a_i$ とすると、$\varphi_t(x_0)$ は t について連続であるから、$\varphi_a(x_0) = \lim_{i\to\infty}\varphi_{a_i}(x_0) = \lim_{i\to\infty} x_0 = x_0$ となる。従って、A は閉部分群である。

$A = \{0\}$ のとき、$T = 0$ として (1) が成立する。

$A \neq \{0\}$ のとき、$T = \inf\{a \in A \mid a > 0\}$ とおく。

$T > 0$ ならば $A = \{nT \mid n \in \mathbf{Z}\}$ である。$a \in A \setminus \{nT \mid n \in \mathbf{Z}\}$ に対して、$|a - nT| < T$ となる n が存在するが、$a - nT \in A$ であるから $a = nT$ となる。

$T = 0$ ならば $A = \mathbf{R}$ である。$a_i \in A$, $a_i > 0$, $\lim_{i\to\infty} a_i = 0$ とすると、$\bigcup_i \{na_i \mid n \in \mathbf{Z}\}$ は $\mathbf{R}$ で稠密となるが、A は閉集合であるから $A = \mathbf{R}$ とな

る。このとき、$t \in \mathbf{R}$ に対して $\varphi_t(x_0) = x_0$ となり、定値写像であるから条件を満たさない。

(2) $\varphi_t(x_0) = x_0$ となる正の実数 t が存在すれば、$y = x_0$ ととればよい。$\{\varphi_t(x_0) \mid t \in \mathbf{Z}_{>0}\}$ の集積点 y をとるとこれが求める点である。

0.3　常微分方程式の解の存在と一意性

フローが与えられればそれを生成するベクトル場が定まることを述べたが、逆に、ベクトル場 X に対して、$F_t : M \longrightarrow M$ で、$F_s \circ F_t = F_{s+t}$ を満たすものがあるかどうかを考える。

この問題は、多様体上で常微分方程式を考える問題である。この節では、各座標近傍上あるいはユークリッド空間の開集合上での常微分方程式を復習する。

$\mathbf{R}^n$ の開部分集合 U, U に含まれるコンパクト部分集合 K が与えられているとする。K の各点 $\mathbf{x}$ に対し、ある ε 近傍 $B_\varepsilon(\mathbf{x})$ が存在して、$B_\varepsilon(\mathbf{x}) \subset U$ であるが、K はコンパクトだから、このような ε を $\mathbf{x} \in K$ に依らずに一定にとることができる。

定理 0.3.1（常微分方程式の解の存在と一意性、初期値に対する連続性）　有界連続関数 $X : (a, b) \times U \longrightarrow \mathbf{R}^n$ が次のリプシッツ条件を満たしているとする。正実数 L が存在して、$t \in (a, b)$, $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2 \in U$ に対し、

$$\|X(t, \mathbf{x}_1) - X(t, \mathbf{x}_2)\| \leqq L\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|.$$

また、$\displaystyle\sup_{(t,\mathbf{x})\in(a,b)\times U} X(t, \mathbf{x}) \leqq M$ とする。このとき、$t_0 \in (a, b)$ に対し、正実数 ε_0 が存在して、$F : (t_0 - \varepsilon_0, t_0 + \varepsilon_0) \times K \longrightarrow U$ で、$F(t, \mathbf{x})$ は t について微分可能、$\mathbf{x}$ について連続であり、$F(t_0, \mathbf{x}) = \mathbf{x}$, $\dfrac{\mathrm{d}\,F}{\mathrm{d}\,t}(t, \mathbf{x}) = X(t, F(t, \mathbf{x}))$ を満たすものが存在する。

常微分方程式を満たす $F(t, \mathbf{x})$ は、積分方程式

$$F(t, \mathbf{x}) = \mathbf{x} + \int_{t_0}^{t} \frac{\mathrm{d}\,F}{\mathrm{d}\,s}(s, \mathbf{x})\,\mathrm{d}\,s = \mathbf{x} + \int_{t_0}^{t} X(s, F(s, \mathbf{x}))\,\mathrm{d}\,s$$

を満たす。逆に、積分方程式 $F(t,\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \displaystyle\int_{t_0}^{t} X(s, F(s,\mathbf{x}))\,\mathrm{d}\,s$ を満たす連続写像 $F(t,\mathbf{x})$ は微分方程式の解である。

ε_0 は後で決めることにして、$I_{\varepsilon_0} = (t_0 - \varepsilon_0, t_0 + \varepsilon_0)$ とおいて、連続写像全体の空間 $C = C^0(I_{\varepsilon_0} \times K, U)$ を考える。$F \in C$ に対し、

$$\mathit{\Gamma}(F)(t,\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \int_{t_0}^{t} X(s, F(s,\mathbf{x}))\,\mathrm{d}\,s$$

とすると、$\mathit{\Gamma}(F) \in C^0(I_{\varepsilon_0} \times K, \mathbf{R}^n)$ であり、F が積分方程式を満たすことは $F = \mathit{\Gamma}(F)$ と同値である。

$$\mathit{\Gamma}(F_1)(t,\mathbf{x}) - \mathit{\Gamma}(F_2)(t,\mathbf{x}) = \int_{t_0}^{t} \big(X(s, F_1(s,\mathbf{x})) - X(s, F_2(s,\mathbf{x}))\big)\,\mathrm{d}\,s$$

だから、

$$\begin{aligned}
&\sup_{(t,\mathbf{x})\in I_{\varepsilon_0}\times K} \|\mathit{\Gamma}(F_1)(t,\mathbf{x}) - \mathit{\Gamma}(F_2)(t,\mathbf{x})\| \\
&\leqq \sup_{t\in I_{\varepsilon_0}} \Big| \int_{t_0}^{t} L \sup_{\mathbf{x}\in K} \|F_1(s,\mathbf{x}) - F_2(s,\mathbf{x})\|\,\mathrm{d}\,s \Big| \\
&\leqq \varepsilon_0 L \sup_{(t,\mathbf{x})\in I_{\varepsilon_0}\times K} \|F_1(t,\mathbf{x}) - F_2(t,\mathbf{x})\|
\end{aligned}$$

$F_0 : I_{\varepsilon_0} \times K \longrightarrow \mathbf{R}^n$ を $F_0(t,\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ とし、$F_1 = \mathit{\Gamma}(F_0)$ とすると、

$$F_1(t,\mathbf{x}) - F_0(t,\mathbf{x}) = \int_{t_0}^{t} X(s,\mathbf{x})\,\mathrm{d}\,s$$

だから、

$$\sup_{(t,\mathbf{x})\in I_{\varepsilon_0}\times K} \|F_1(t,\mathbf{x}) - F_0(t,\mathbf{x})\| \leqq \sup_{t\in I_{\varepsilon_0}} \Big| \int_{0}^{t} \sup_{\mathbf{x}\in K} \|X(s,\mathbf{x})\|\,\mathrm{d}\,s \Big| \leqq \varepsilon_0 M$$

ここで、$\varepsilon_0 = \min\{\dfrac{1}{2L}, \dfrac{\varepsilon}{4M}\}$ ととる。

$\varepsilon_0 \leqq \dfrac{1}{2L}$ だから、$\mathit{\Gamma} : C \longrightarrow C^0(I_{\varepsilon_0} \times K, \mathbf{R}^n)$ は $C^0(I_{\varepsilon_0} \times K, \mathbf{R}^n)$ 上の

$$\|F_1 - F_2\| = \sup_{(t,\mathbf{x})\in I_{\varepsilon_0}\times K} \|F_1(t,\mathbf{x}) - F_2(t,\mathbf{x})\|$$

で定義される距離に対して、リプシッツ写像でリプシッツ定数が $\dfrac{1}{2}$ より小なるものである。このことから、F_i $(i = 1, 2)$ がともに $F_i = \mathit{\Gamma}(F_i)$ をみたすと、$\|F_1 - F_2\| \leqq \dfrac{1}{2}\|F_1 - F_2\|$ を満たし、$F_1 = F_2$ となる。すなわち、解の一意

性が示される。

$\varepsilon_0 \leqq \dfrac{\varepsilon}{4M}$ だから $\|F_1 - F_0\| \leqq \dfrac{\varepsilon}{4}$ で、$F_1 \in C$ である。$F_k \in C$ が $F_k = \Gamma(F_{k-1})$ と定義されているときに、$F_{k+1} = \Gamma(F_k)$ とする。

$$\|F_{k+1} - F_k\| = \|\Gamma(F_k) - \Gamma(F_{k-1})\| \leqq \frac{1}{2}\|F_k - F_{k-1}\| \leqq \frac{1}{2^k}\|F_1 - F_0\| \leqq \frac{\varepsilon}{2^{k+2}}$$

従って、

$$\|F_{k+1} - F_0\| \leqq \sum_{j=0}^{k} \|F_{j+1} - F_j\| \leqq \sum_{j=0}^{k} \frac{\varepsilon}{2^{j+2}} < \frac{\varepsilon}{2}$$

となり、$F_k \in C$ であり、F_k は、$F_\infty \in C^0(I_{\varepsilon_0} \times K, \mathbf{R}^n)$ に一様収束する。$F_\infty \in C$ であり、F_∞ は、$\Gamma(F_\infty) = F_\infty$、すなわち、$F_\infty(t, \mathbf{x}) = \mathbf{x} + \displaystyle\int_{t_0}^{t} X(s, F_\infty(s, \mathbf{x}))\,\mathrm{d}\,s$ をみたす。

この証明は、逆写像定理の証明とほとんど同じであることに注意しよう。

注意 0.3.2　この定理の証明は、$X : (a,b) \times U \longrightarrow \mathbf{R}^n$ を有界連続写像 $X : (a,b) \times U \times \Lambda \longrightarrow \mathbf{R}^n$ に取り替えても成立する。ここで Λ は位相空間で、リプシッツ条件は正実数 L が存在して、$t \in (a,b)$, $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2 \in U$, $\lambda \in \Lambda$ に対し、$\|X(t, \mathbf{x}_1, \lambda) - X(t, \mathbf{x}_2, \lambda)\| \leqq L\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|$. というものである。これを λ をパラメータとする常微分方程式と呼ぶ。解は、パラメータ λ に対しても連続関数として得られている。

【問題 0.3.3】　K は凸とするとき、上で求まった解 $F(t, \mathbf{x})$ は $\mathbf{x}$ についてリプシッツ連続であることを示せ。

【解】　$\mathbf{x}^1$ を初期値とする解を $\Phi_1(t) = F(t, \mathbf{x}^1)$ と書く。Φ_1 は、

$$\Phi_1(t) = \mathbf{x}^1 + \int_{t_0}^{t} X(s, \Phi_1(s))\,\mathrm{d}\,s$$

を満たす。$\Gamma_0(\Phi) = \mathbf{x}^0 + \displaystyle\int_{t_0}^{t} X(s, \Phi(s))\,\mathrm{d}\,s$ を初期値 $\mathbf{x}^0$ の解を求めるための写像としよう。${\Gamma_0}^k(\Phi_1) = \Phi_{k+1}$ とおくと、

$$\Phi_2 - \Phi_1 = \Gamma_0(\Phi_1) - \Phi_1 = \mathbf{x}^0 - \mathbf{x}^1$$

である。また、

$$\|\varPhi_{k+1}-\varPhi_k\| \leqq \frac{1}{2}\|\varPhi_k-\varPhi_{k-1}\| \leqq \frac{1}{2^{k-1}}\|\varPhi_2-\varPhi_1\| = \frac{1}{2^{k-1}}\|\mathbf{x}^0-\mathbf{x}^1\|$$

従って、$\|\varPhi_{k+1}-\varPhi_1\| \leqq \sum_{j=1}^{k}\frac{1}{2^{k-1}}\|\mathbf{x}^0-\mathbf{x}^1\| < 2\|\mathbf{x}^0-\mathbf{x}^1\|$ である。このことから、$\|\mathbf{x}^0-\mathbf{x}^1\| \leqq \frac{\varepsilon}{8}$ ならば、$\varPhi_{k+1}$ の値は U 内にあり、$\varPhi_\infty = \lim_{k\to\infty}\varPhi_{k+1}$ は $\mathbf{x}^0$ を初期値とする解となる。$\|\mathbf{x}^0-\mathbf{x}^1\| \leqq \frac{\varepsilon}{8}$ ならば、$\|\varPhi_\infty-\varPhi_1\| \leqq 2\|\mathbf{x}^0-\mathbf{x}^1\|$ がわかったが、$\mathbf{x}^0$, $\mathbf{x}^1$ を結ぶ線分上の内分点を初期値とする解を考えれば、解 $F(t,\mathbf{x})$ は $\mathbf{x}$ について K 上リプシッツ定数を 2 とするリプシッツ連続関数である。

【問題 0.3.4】　$X(t,\mathbf{x})$ は $\mathbf{x}$ について、C^1 級であるとする。このとき、$t=t_0$ において初期値 $\mathbf{x}$ を持つ解 $F(t,\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f_1(t,\mathbf{x}) \\ \vdots \\ f_n(t,\mathbf{x}) \end{pmatrix}$ は、初期値 $\mathbf{x}$ について C^1 級で、$A_{ij}(t,\mathbf{x}) = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(t,\mathbf{x})$ は $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}A_{ij}(t,\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial \xi_i}{\partial x_k}{}_{(t,F(t,\mathbf{x}))}A_{kj}(t,\mathbf{x})$ を満たすことを示せ。

ヒント：$X(t,\mathbf{x}+\mathbf{v})-X(t,\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n}v_iY_i(t,\mathbf{x},\mathbf{v})$ とする連続関数 $Y_i(t,\mathbf{x},\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} Y_{i1}(t,\mathbf{x},\mathbf{v}) \\ \vdots \\ Y_{in}(t,\mathbf{x},\mathbf{v}) \end{pmatrix}$ が存在する。さらに、$Y_i(t,\mathbf{x},0) = \frac{\partial X}{\partial x_i}(t,\mathbf{x},0)$ である。$(s, \frac{1}{s}\bigl(F(t,\mathbf{x}+s\mathbf{v})-F(t,\mathbf{x})\bigr))$ の満たす常微分方程式についての解の存在と一意性、解のパラメータ s に対する連続性を用いる。

【解】

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\bigl(F(t,\mathbf{x}+s\mathbf{v})-F(t,\mathbf{x})\bigr) \\
&= X(t,F(t,\mathbf{x}+s\mathbf{v}))-X(t,F(t,\mathbf{x})) \\
&= \sum_{i=1}^{n}(f_i(t,\mathbf{x}+s\mathbf{v})-f_i(t,\mathbf{x}))Y_i(t,F(t,\mathbf{x}),F(t,\mathbf{x}+s\mathbf{v})-F(t,\mathbf{x}))
\end{aligned}$$

だから、Y_i を並べた行列を

$$\begin{aligned}Y(s) &= Y(t, F(t,\mathbf{x}), F(t,\mathbf{x}+s\mathbf{v}) - F(t,\mathbf{x})) \\ &= \bigl(Y_1(t, F(t,\mathbf{x}), F(t,\mathbf{x}+s\mathbf{v}) - F(t,\mathbf{x})), \\ &\qquad \ldots, Y_n(t, F(t,\mathbf{x}), F(t,\mathbf{x}+s\mathbf{v}) - F(t,\mathbf{x}))\bigr)\end{aligned}$$

とすると、$\dfrac{1}{s}\bigl(F(t,\mathbf{x}+s\mathbf{v}) - F(t,\mathbf{x})\bigr)$ は $t = t_0$ のとき初期値が $\mathbf{v}$ であるような s をパラメータとする次の微分方程式の解である。

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\mathbf{u} = Y(s)\mathbf{u}$$

この線形常微分方程式の係数行列 $Y(s) = Y(t, F(t,\mathbf{x}), F(t,\mathbf{x}+s\mathbf{v}) - F(t,\mathbf{x}))$ は、s に対して連続である。

この線形常微分方程式は、s が 0 になるときも連続に定義されている。$s = 0$ においては、$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\mathbf{u} = Y(0)\mathbf{u}$ で、$Y(0) = \bigl(\dfrac{\partial \xi_i}{\partial x_j}{}_{(t,F(t,\mathbf{x}))}\bigr)$ となる。解のパラメータに対する連続性から $\dfrac{1}{s}\bigl(F(t,\mathbf{x}+s\mathbf{v}) - F(t,\mathbf{x})\bigr)$ は、$\mathbf{v}$ を初期値とする線形常微分方程式 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\mathbf{u} = Y(0)\mathbf{u}$ の解に収束する。従って、$F(t,\mathbf{x})$ の初期値に対する $\mathbf{v}$ 方向の微分が存在する。従って、偏微分も存在する。

$F(t,\mathbf{x})$ の成分の偏微分を $A_{ij}(t,\mathbf{x}) = \dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(t,\mathbf{x})$ とすると、$A_{ij}(t,\mathbf{x})$ は $A_{ij}(t_0,\mathbf{x}) = \delta_{ij}$ であり、線形常微分方程式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}A_{ij}(t,\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \xi_i}{\partial x_k}{}_{(t,F(t,\mathbf{x}))} A_{kj}(t,\mathbf{x})$$

を満たす。$\dfrac{\partial \xi_i}{\partial x_k}{}_{(t,F(t,\mathbf{x}))}$ の $\mathbf{x}$ をパラメータと見ると、パラメータに対する解の連続性から、$A_{ij}(t,\mathbf{x})$ は、$\mathbf{x}$ に対し連続である。従って、$F(t,\mathbf{x})$ は C^1 級の写像である。

【問題 0.3.5】　$X : (a,b) \times U \longrightarrow \mathbf{R}^n$ が C^∞ 級とする。このとき、$t = t_0$ において初期値 $\mathbf{x}$ を持つ解 $F(t,\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f_1(t,\mathbf{x}) \\ \vdots \\ f_n(t,\mathbf{x}) \end{pmatrix}$ は、C^∞ 級の写像である。

【解】　X が C^r 級のとき、$F(t,\mathbf{x})$ が C^r 級となることがわかっているとする。X を C^{r+1} 級として、$F(t,\mathbf{x})$ が C^{r+1} 級となることを示す。

$A_{ij}(t,\mathbf{x}) = \dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(t,\mathbf{x})$ は、

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}A_{ij}(t,\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \xi_i}{\partial x_k}_{(t,F(t,\mathbf{x}))} A_{kj}(t,\mathbf{x})$$

を満たす。ここで、$\frac{\partial \xi_i}{\partial x_k}_{(t,F(t,\mathbf{x}))}$ は、$\frac{\partial \xi_i}{\partial x_k}$ が C^r 級、$F(t,\mathbf{x})$ が C^r 級だから、C^r 級である。また、$\frac{\mathrm{d}\,F}{\mathrm{d}\,t}(t,\mathbf{x}) = X(t,F(t,\mathbf{x}))$ は、X が C^{r+1} 級, $F(t,\mathbf{x})$ が C^r 級だから、C^r 級である。従って、$F(t,\mathbf{x})$ は C^{r+1} 級となる。

0.4　コンパクト多様体上のベクトル場

実はベクトル場は必ずしもフローを生成しない。$F_t(x)$ は、t が $x \in M$ に依存する開区間 (a_x, b_x) 上でのみ定義されるのが一般の状態である。これは、$F_t(x)$ が多様体上からはみ出てしまうということである。たとえば $x^2\frac{\partial}{\partial x}$ の解は、初期値 x_0 に対して $x = \frac{x_0}{1-x_0 t}$ であり、$x_0 > 0$ ならば $(-\infty, \frac{1}{x_0})$ で定義され、$\lim_{t\to\frac{1}{x_0}} x(t) = \infty$ である。これは、$\mathbf{R}$ がコンパクトでないために起こる現象である。

この節では、コンパクト多様体上の C^∞ 級ベクトル場 X は、フロー F_t を生成することを示す。

定理 0.4.1　M をコンパクト多様体、X を M 上の C^∞ 級ベクトル場とする。M 上のフロー F_t が存在し、$X = \frac{\mathrm{d}\,F_t}{\mathrm{d}\,t} \circ F_{-t}$ となる。

証明　まず、M の座標近傍系から有限部分被覆 $\{(U_i,\varphi_i)\}_{i=1,\ldots,k}$ をとる。$U_i \supset \overline{V}_i \supset V_i \supset \overline{W}_i \supset W_i$ で、$\bigcup W_i = M$ となるものをとる。$\varphi_i(\overline{V}_i) \subset \varphi_i(U_i)$ で、$\varphi_i(\overline{V}_i)$ はコンパクトだから、ベクトル場 $X = \sum_j \xi_j^{(i)} \frac{\partial}{\partial x_j^{(i)}}$ については $\varphi_i(V_i)$ 上で有界連続でリプシッツ条件を満たす。$\varphi_i(\overline{W}_i) \subset \varphi_i(V_i)$ について、正実数 $\varepsilon^{(i)}$ に対し、$F^{(i)} : (-\varepsilon^{(i)}, \varepsilon^{(i)}) \times \varphi_i(\overline{W}_i) \longrightarrow \varphi_i(V_i)$ が存在し、$\frac{\mathrm{d}\,F^{(i)}}{\mathrm{d}\,t}(t,\mathbf{x}) = X^{(i)}(F^{(i)}(t,\mathbf{x}))$ を満たす。

$\varepsilon = \min\{\varepsilon^{(i)}\}$ とすると、任意の $x \in M$ に対し、$x \in W_i$ となる W_i をとれば、$F^i(t,x) = {\varphi_i}^{-1}(F^{(i)}(t,\varphi_i(x)))$ は曲線 $F_x^i : (-\varepsilon,\varepsilon) \longrightarrow M$ で、$\frac{\mathrm{d}\,F_x^i}{\mathrm{d}\,t}(t) = X(F_x^i(t))$ を満たす。$x \in W_j$ とすると、F_x^j も定義されるが、$F_x^j = F_x^i$

となる。その事情は、次のことによる。

常微分方程式の解

$$F^{(i)} : (-\varepsilon, \varepsilon) \times \varphi_i(W_i \cap W_j) \longrightarrow \varphi_i(V_i \cap V_j),$$
$$F^{(j)} : (-\varepsilon, \varepsilon) \times \varphi_j(W_i \cap W_j) \longrightarrow \varphi_j(V_i \cap V_j)$$

を比較する。$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}F_t^{(i)} \circ F_{-t}^{(i)}$ はベクトル場 X の $\varphi_i(W_i \cap W_j)$ における表示 $\displaystyle\sum_j \xi_j^{(i)} \frac{\partial}{\partial x_j^{(i)}}$ を与える。$(\varphi_j \circ {\varphi_i}^{-1})_* \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}F_t^{(i)} \circ F_{-t}^{(i)}$ はベクトル場 X の $\varphi_j(W_i \cap W_j)$ における表示すなわち $\displaystyle\sum_\ell \xi_\ell^{(j)} \frac{\partial}{\partial x_\ell^{(j)}}$ と一致している。

$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}(\varphi_j \circ {\varphi_i}^{-1})(F^{(i)}(t, \mathbf{x})) = (\varphi_j \circ {\varphi_i}^{-1})_* \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}F^{(i)}(t, \mathbf{x})$ だから、常微分方程式の解の一意性から、$(\varphi_j \circ {\varphi_i}^{-1})(F^{(i)}(t, \mathbf{x}))$ は、$F^{(j)}(t, (\varphi_j \circ {\varphi_i}^{-1})(\mathbf{x}))$ と一致する。

従って、C^∞ 級写像 $F : (-\varepsilon, \varepsilon) \times M \longrightarrow M$ で、$\dfrac{\mathrm{d}\,F}{\mathrm{d}\,t}(t, x) = X(F(t, x))$ となるものがあることがわかった。

ここで、$n \geqq 2$ に対し $F(t, x)$ が $t \in (-\varepsilon, \dfrac{n}{2}\varepsilon)$ 上定義されているときに、$t \in (\dfrac{n-1}{2}\varepsilon, \dfrac{n+1}{2}\varepsilon)$ に対し、$F(t, x) = F(t - \dfrac{n-1}{2}\varepsilon, F(\dfrac{n-1}{2}\varepsilon, x))$ とすると、$\dfrac{\mathrm{d}\,F}{\mathrm{d}\,t}(t, x) = X(F(t - \dfrac{n-1}{2}\varepsilon, F(\dfrac{n-1}{2}\varepsilon, x))) = X(F(t, x))$ を満たす。同様に、$t \in (-\dfrac{n}{2}\varepsilon, \varepsilon)$ 上定義されているときに、$t \in (-\dfrac{n+1}{2}\varepsilon, -\dfrac{n-1}{2}\varepsilon)$ に対し、$F(t, x) = F(t + \dfrac{n-1}{2}\varepsilon, F(-\dfrac{n-1}{2}\varepsilon, x))$ とすると、$\dfrac{\mathrm{d}\,F}{\mathrm{d}\,t}(t, x) = X(F(t + \dfrac{n-1}{2}\varepsilon, F(-\dfrac{n-1}{2}\varepsilon, x))) = X(F(t, x))$ を満たす。こうして、C^∞ 級写像 $F : \mathbf{R} \times M \longrightarrow M$ で、$\dfrac{\mathrm{d}\,F}{\mathrm{d}\,t}(t, x) = X(F(t, x))$ となるものがある。

さて $F(t + s, x)$ を考える。これは、$t = 0$ のとき、$F(0 + s, x) = F(s, x)$ となる常微分方程式 $\dfrac{\mathrm{d}\,F}{\mathrm{d}\,t}(t, x) = X(F(t, x))$ の解である。そのような解は $F(t, F(s, x))$ と書かれていたから、$F(t + s, x) = F(t, F(s, x))$ となっている。

■

【問題 0.4.2】　$\mu : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}$ を $\|\mathbf{x}\| < 1$ ならば $\mu(\mathbf{x}) > 0$ を満たし、$\operatorname{supp}\mu = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2 \mid \|\mathbf{x}\| \leq 1\}$ となる C^∞ 級関数とする。平面上のベクトル場 $\mu\dfrac{\partial}{\partial x_1}$ が生成するフロー $\varPhi_t$ について、$\displaystyle\lim_{t\to\infty} \varPhi_t(\mathbf{x})$, $\displaystyle\lim_{t\to-\infty} \varPhi_t(\mathbf{x})$ を求めよ。

【解】　$\|\mathbf{x}\| \geqq 1$ ならば、$\mathbf{x}$ においてベクトル場は 0 であるから、$\Phi_t(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ であり、$\displaystyle\lim_{t\to\infty} \Phi_t(\mathbf{x}) = \lim_{t\to-\infty} \Phi_t(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ である。$\|\mathbf{x}\| < 1$ のとき、$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ に対して、$\Phi_t(\mathbf{x}) = (\varphi_t(\mathbf{x}), x_2, \dots, x_n)$ と書かれる。$\|\mathbf{x}\| < 1$ において、ベクトル場は 0 にならないので、$\displaystyle\lim_{t\to\pm\infty} \Phi_t(\mathbf{x})$ は $\|\mathbf{x}\| < 1$ の点にはなりえない。$t < 0$ ならば $\varphi_t(\mathbf{x}) < x_1$, $t > 0$ ならば $\varphi_t(\mathbf{x}) > x_1$ であるから、$\displaystyle\lim_{t\to\pm\infty} \Phi_t(\mathbf{x}) = (\pm\sqrt{1 - {x_2}^2 - \cdots - {x_n}^2}, x_2, \dots, x_n)$ となる。

0.5　連結多様体上の有限部分集合

【問題 0.5.1】　連結な多様体 M 上の 2 点 x_1, x_2 に対し、微分同相写像 $F : M \longrightarrow M$ で $F(x_1) = x_2$ となるものがあることを示せ。

【解】　$x_1 \in M$ を固定して、

$$A = \{x \in M \mid \text{ある微分同相写像 } F : M \longrightarrow M \text{ により、} F(x_1) = x\}$$

とおく。x_1 のまわりの座標近傍 (U, φ) をとり、$\varphi(U) \subset \mathbf{R}^n$ に台をもつベクトル場を前の問のように作ると、A は x_1 の近傍 V を含むことがわかる。$x \in A$ ならば、$F(U)$ の点は、A に含まれるので、A は開集合である。

M 上の関係 $\sim$ を

$$x \sim y \Longleftrightarrow \text{ある微分同相写像 } F : M \longrightarrow M \text{ により、} F(x_1) = x$$

で定義する。これは同値関係である。従って、M は同値類に分割される。

同値類は開集合であることを示したから、閉集合でもある。従って M が連結の時、$A = M$ となる。

注意 0.5.2　この問いの F を、$F_0 = \mathrm{id}_M$, $F_1 = F$ となるアイソトピー F_t とともにとることができること、F はコンパクト集合の外では恒等写像であるような微分同相写像とできることが、同じ証明によりわかる。

【問題 0.5.3】　次元が 2 以上の連結な多様体上の相異なる n 点の 2 組 x_1, $\dots$, x_n; y_1, $\dots$, y_n に対して、微分同相写像 $F : M \longrightarrow M$ で $F(x_i) = y_i$ $(i = 1, \dots, n)$ となるものがあることを示せ。

【解】　n についての帰納法で示す。$n=1$ のときに前の問。$n-1$ 点の組までは示されたとする。与えられた n 点の組に対して、$F_1: M \longrightarrow M$ で $F_1(x_i)=y_i$ $(i=1,\ldots,n-1)$ とするものがある。$M'=M\setminus\{y_1,\ldots,y_{n-1}\}$ とおくと次元が 2 以上であるから M' は連結な多様体である。$F': M' \longrightarrow M'$ で $F'(F_1(x_n))=y_n$ とするものが存在する。前の注意から、F' は M における y_i $(i=1,\ldots,n-1)$ の近傍においては恒等写像であるようにとれる。$\widehat{F}'$ を F' を M に拡張した微分同相写像とする。$F=\widehat{F}'\circ F_1$ が求める微分同相写像である。

【問題 0.5.4】　次元が 2 以上の連結な多様体上の 2 点 x_0, x_1 に対し、M 上のフロー F_t で $F_1(x_0)=x_1$ となるものがあることを示せ。このとき曲線 $\{F(t,x_0) \mid t\in(-\varepsilon,1+\varepsilon)\}\subset M$ は x_0, x_1 を含む 1 次元部分多様体である。

【解】　問題 0.4.2 のベクトル場が生成するフローにより、点 y_0 に十分近い y_1 に対して、座標近傍に台を持つフロー F_t が構成できる。問題 0.5.3 により、微分同相 $G: M \longrightarrow M$ で $G(y_i)=x_i$ とするものがある。このとき、$G\circ F_t\circ G^{-1}$ は求める性質を持つフローである。

【問題 0.5.5】　M, N をコンパクト多様体とする。C^∞ 級写像 $f: M\longrightarrow N$ について, M 上のベクトル場 ξ, N 上のベクトル場 η が、すべての $x\in M$ に対し、$f_*(\xi(x))=\eta(f(x))$ を満たすとする。（ $f_*\xi=\eta$ とも書かれ、M 上のベクトル場 ξ が、N 上のベクトル場 η に射影されるという。）ξ が生成するフローを $\varphi_t: M\longrightarrow M$, η が生成するフローを $\psi_t: N\longrightarrow N$ とするとき次を示せ。

$$f(\varphi_t(x))=\psi_t(f(x))$$

【解】　$f(\varphi_t(x))$ が N 上の η が生成するフローの軌道であることを見ればよい。$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}f(\varphi_t(x))=f_*(\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\varphi_t(x))=f_*(\xi(\varphi_t(x)))=\eta(f(\varphi_t(x)))$ であり、$t=0$ のとき $f(\varphi_0(x))=f(x)$ である。η の生成するフローを ψ_t とすると（常微分方程式の解の一意性から）$\psi_t(f(x))=f(\varphi_t(x))$ となる。

【問題 0.5.6】　M をコンパクト多様体とする。C^∞ 級写像 $f: M\longrightarrow \mathbf{R}$ に対し、$[a,b]\subset\mathbf{R}$ 上の点は、すべて正則値であるとする。$f^{-1}([a,b])$ と $f^{-1}(a)\times[a,b]$ は微分同相であることを示せ。

【解】　M の有限座標近傍系 $\{(U_i,\varphi_i)\}_{i=1,\dots,k}$ をとり、U_i に台を持つ関数 $\lambda_i \geqq 0$ による 1 の分解があるとする。$f^{-1}([a,b])$ と交わる $\varphi_i : U_i \longrightarrow \mathbf{R}^n$ の第 1 座標 $x_1^{(i)}$ は f であるとして良い。このとき、U_i 上のベクトル場 $\lambda_i \dfrac{\partial}{\partial x_1^{(i)}}$ は M 上の $M\backslash U_i$ で 0 であるようなベクトル場と考えられ、$(f_*)_x(\lambda_i \dfrac{\partial}{\partial x_1^{(i)}}) = \lambda_i(x)\dfrac{\partial}{\partial t}$ である。$\xi = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \frac{\partial}{\partial x_1^{(i)}}$ とおくと、$(f_*)_x\xi(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{k}\lambda_i(x)\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}$ である。従って、ξ の生成するフローを F_t とすると $x \in f^{-1}([a,b]),\, a-f(x) \leqq t \leqq b-f(x)$ に対し $f(F_t(x)) = f(x)+t$ となる。$p : f^{-1}([a,b]) \longrightarrow f^{-1}(a)$ を $p(x) = F_{a-f(x)}(x)$ とする。$(p,f) : f^{-1}([a,b]) \longrightarrow f^{-1}(a)\times[a,b]$ の逆写像は $G(x',t) = F_{t-a}(x')$ で与えられる。$(p,f), G$ ともに C^∞ 級であるので、これらは微分同相写像である。

【問題 0.5.7】　連結コンパクト 1 次元多様体 M 上には、向きを定めることが出来る。（座標変換の微分が正に取れる。）このことを使って M 上に 0 にならないベクトル場が存在することを示し、M は $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ と微分同相であることを示せ。

【解】　M の座標近傍系 $\{(U_i,\varphi_i)\}$ が、$g_{ij} = \varphi_i{\varphi_j}^{-1} : \varphi_j(U_i\cap U_j) \longrightarrow \varphi_i(U_i\cap U_j)$ の微分について $Dg_{ij} > 0$ を満たしているとする。$\{U_i\}$ に従属する 1 の分割 λ_i をとる。$t^{(i)}$ を U_i 上の座標関数とし、U_i に台をもつベクトル場 $\lambda_i \dfrac{\partial}{\partial t^{(i)}}$ を考える。

$X = \displaystyle\sum_i \lambda_i \frac{\partial}{\partial t^{(i)}}$ が M 上の 0 にならないベクトル場となることを示す。U_j 上では $X = \displaystyle\sum_i \lambda_i Dg_{ji}\frac{\partial}{\partial t^{(j)}}$ と書かれるが、$Dg_{ji} > 0,\, \displaystyle\sum_i \lambda_i = 1$ であるから X は U_j の各点で正である。

φ_t を X が生成するフローとする。φ_t の軌道は、問題 0.2.2 により、1 点、円周または実数からの単射像となる。軌道が 1 点となる点はベクトル場が 0 となる点であるから、存在しない。ひとつの軌道 $\varphi_t(x_0)$ が M と一致ずれば、M はコンパクトだから、円周 $\mathbf{R}/T\mathbf{Z}$ と微分同相となる。

$A = \{\varphi_t(x_0) \mid t \in \mathbf{R}\}$ が M と一致しないとすると、$x \in M, x \notin A, x$ の周りの連結な座標近傍 U_i で A と交わるものが存在する。U_i 上で 0 とならないベクトル場 X の軌道は、U_i を含むから、$U_i \subset A$ となり、x のとり方に矛盾

する。

注意 0.5.8　コンパクト連結１次元多様体 M が向き付けを持つことは次のように示される。向き付けを持たないとすると、$\widehat{M}$ は向き付けを持つコンパクト連結１次元多様体であるから、円周と微分同相である。$\widehat{M}$ 上に向きを変える微分同相 F で、$F^2 = \mathrm{id}_{\widehat{M}}$ であり、固定点を持たないものが存在し、$M = \widehat{M}/\{\mathrm{id}_{\widehat{M}}, F\}$ となる。円周上の向きを変える微分同相は固定点を持つことを示せば、向き付けを持たないことから矛盾が導かれる。

$\widehat{M}$ 上のフロー φ_t を用いて、$x_0 \in \widehat{M}$ をとる。T を $x_0 = \varphi_T(x_0)$ となる正実数のうち最小のものとする。$F(x_0) = \varphi_{t_0}(x_0)$ とすると、$\widehat{M} = \{\varphi_t(x_0) \mid t \in [0, T]\}$ だから、$0 < t_0 < T$ ととることができる。

$\widehat{M} = \{x_0\} \cup \{\varphi_t(x_0) \mid t \in (0, t_0)\} \cup \{F(x_0)\} \cup \{\varphi_t(x_0) \mid t \in (t_0, T)\}$ のように互いに交わりを持たない連結な集合に分割される。F は微分同相で $F \circ F = \mathrm{id}_{\widehat{M}}$ だから、$\widehat{M} \setminus \{x_0, F(x_0)\}$ の連結成分を連結成分に写す。

次の議論から、$F(\{\varphi_t(x_0) \mid t \in (0, t_0)\})$ は、$\{\varphi_t(x_0) \mid t \in (0, t_0)\}$ 一致することがわかる。

$\widehat{M}$ の向き付けられた座標近傍系 $\{(U_i, \varphi_i = t^{(i)})\}$ において、$\dfrac{\partial}{\partial t^{(i)}}$ は定義されている各点の上で互いに正実数倍になっている。F は向きを逆にするから、$(F_*)_{x_0} X(x_0)$ は $X(F(x_0))$ の負実数倍である。従って、ε を $\varphi_\varepsilon(x_0)$ が x_0 の座標近傍に入るような十分小な正実数とすると、ある正実数 $\delta(\varepsilon)$ に対し、$F(\varphi_\varepsilon(x_0)) = \varphi_{t_0 - \delta(\varepsilon)}(x_0)$ となる。従って $F(\{\varphi_t(x_0) \mid t \in (0, t_0)\}) = \{\varphi_t(x_0) \mid t \in (0, t_0)\}$ である。

$\{\varphi_t(x_0) \mid t \in [0, t_0]\}$ は $\varphi(\bullet, x_0)$ により $[0, t_0]$ と同相であるから、中間値の定理から、$F(x) = x$ となる $x \in \{\varphi_t(x_0) \mid t \in [0, t_0]\}$ が存在する。

【問題 0.5.9】(フローボックス定理)　m 次元コンパクト多様体 M 上のフロー $\varphi_t(x)$ が、ベクトル場 ξ で生成されているとする。M の $m-1$ 次元コンパクト部分多様体 N に対し、$x \in N$ に対して、$\xi(x) \notin T_x N$ とする。このとき、正実数 ε で、写像 $(-\varepsilon, \varepsilon) \times N \ni (t, x) \longmapsto \varphi_t(x) \in M$ が M の開集合への埋め込みとなるようなものが存在することを示せ。

【解】　$F : \mathbf{R} \times N \longrightarrow M$ を $F(t, x) = \varphi_r(x)$ で定義する。$(0, x)$ における接写像 $F_* : \mathbf{R} \times T_x N \longrightarrow T_x M$ を考えると、$F_* | T_x N = \mathrm{id}_{T_x N}$, $F_*(\dfrac{\partial}{\partial t}{}_{(0,x)} = \xi(x)$ であるから、$\operatorname{rank} F_* = m$ である。従って、逆写像定理から、$(0, x) \in \mathbf{R} \times N$ の近傍 $(-\varepsilon_x, \varepsilon_x) \times U_x$, $x \in M$ の近傍 V_x があり、F は微分同相 $(-\varepsilon_x, \varepsilon_x) \times U_x \longrightarrow V_x$

を与える。$\{U_x\}_{x\in N}$ は N の開被覆であるが、N はコンパクトであるから、有限部分被覆 $\{U_{x_i}\}_{i=1,\dots,k}$ が存在する。$\varepsilon = \min\{\varepsilon_{x_i} \mid i = 1,\dots,k\}$ とすると、$F|(-\varepsilon,\varepsilon)\times N : (-\varepsilon,\varepsilon)\times N \longrightarrow M$ は、$(-\varepsilon,\varepsilon)\times U_{x_i}$ 上で像への微分同相である。

$0<\delta<\varepsilon$ をどのようにとっても $F|[-\delta,\delta]\times N$ が単射にならないとする。

$F(t_j,z_j)=F(s_j,y_j)$, t_j, $s_j\to 0$, z_j, y_j は同じ U_{x_i} に含まれない、という点列 $\{((t_j,z_j),(s_j,y_j))\}$ が存在する。部分列をとり、z_j は $z_\infty\in N$ に収束し、y_j は z_∞ を含む U_{x_i} の外の点 $y_\infty\in N$ に収束するとしてよいが、$F(0,z_\infty)=F(0,y_\infty)$ となり、F が N で単射であることに反する。

従って、十分小な ε に取り直せば、$F|(-\varepsilon,\varepsilon)\times N$ は、像への微分同相である。像は開集合の和集合で開集合となる。