多様体 M から多様体 N への C^∞ 級の写像の全体を $C^\infty(M,N)$ と書く。M または N が実数直線 $\mathbf{R}$ の場合を考えると、$C^\infty(\mathbf{R},N)$ の元がたくさんあることは、ひとつの座標近傍への写像を構成できるので、容易にわかる。一方、$C^\infty(M,\mathbf{R})$ の元を作るためには、少し努力が必要である。ユークリッド空間の中の多様体 $M \subset \mathbf{R}^N$ に対して、M の点に対して、その点の $\mathbf{R}^N$ における k 番目の座標 x_k を対応させる写像は、$C^\infty(M,\mathbf{R})$ の元である。ユークリッド空間 $\mathbf{R}^N$ の中の多様体であることは、その前提として M 上に C^∞ 関数 $x_1,\dots x_N$ があることが必要である。さらに、それらを並べた M から $\mathbf{R}^N$ への写像が像への同相写像となることにより、ユークリッド空間 $\mathbf{R}^N$ の中の多様体であることになる。

0.1　関数の台

C^∞ 級多様体 M 上の関数 f に対し、f の台 (support) $\operatorname{supp} f$ を

$$\operatorname{supp} f = \overline{\{x \in M \mid f(x) \neq 0\}}$$

で定義する。$x \in M \setminus \operatorname{supp} f$ とは x のある近傍上で f が 0 であることである。

定理 0.1.1　多様体 M の任意の点 x_0 と x_0 の任意の近傍 V に対し、M 上の C^∞ 級関数 $\mu : M \longrightarrow \mathbf{R}$ で、M 上で $\mu(x) \geqq 0$, $\mu(x_0) > 0$ かつ $\operatorname{supp} M \subset V$ となるものが存在する。

証明　$\mu_0 : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}$ を $\mu(\mathbf{x}) = \rho(1 - \|\mathbf{x}\|)$ と定義すると、$\mathbf{R}^n$ 上で $\mu_0(\mathbf{x}) \geqq 0$, $\mu_0(\mathbf{x}) > 0 \Longleftrightarrow \|\mathbf{x}\| < 1$ となる。

$x_0 \in M$ に対し、x_0 のまわりの座標近傍 (U,φ) をとる。$\varphi(x_0) \subset \varphi(U \cap V) \subset \mathbf{R}^n$ に対し、ある正実数 ε について、ε 近傍 $B_\varepsilon(\varphi(x_0)) \subset \varphi(U \cap V)$ である。$\mu_1(\mathbf{x}) = \mu_0(\dfrac{2}{\varepsilon}\big(\mathbf{x} - \varphi(x_0)\big))$ は $\overline{B_{\frac{\varepsilon}{2}}(\varphi(x_0))}$ に台を持つ C^∞ 級非負関数である。M 上の関数 μ を

$$\mu(x) = \begin{cases} \mu_1(\varphi(x)) & x \in U \cap V \\ 0 & x \in M \setminus (U \cap V) \end{cases}$$

で定義する。このとき、$\operatorname{supp} \mu$ は $U \cap V$ の閉集合だから、$x \in M \setminus (U \cap V)$ に対して、x のある近傍 W_x 上で $\mu|W_x = 0$ となる。従って、μ はこの点 x

において C^∞ 級である。定義から、$U \cap V$ 上の点では C^∞ 級であるから、M 上の C^∞ 級関数となる。 ■

定理 0.1.2 多様体 M のコンパクト部分集合 K と K を含む開集合 U が与えられているとする。M 上の C^∞ 級関数 $\nu : M \longrightarrow \mathbf{R}$ で、M 上で $\nu(x) \geqq 0$, $\nu|K > 0$ かつ $\operatorname{supp}\nu$ は U のコンパクト部分集合となるものが存在する。

証明 前の定理により、K の点 x_0 に対し、C^∞ 級関数 $\mu_{x_0} : M \longrightarrow \mathbf{R}$ で、M 上で $\mu_{x_0}(x) \geqq 0$, $\mu_{x_0}(x_0) > 0$ かつ $\operatorname{supp}\mu_{x_0}$ は U のコンパクト部分集合であるものが存在する。このとき、μ_{x_0} は $\{y \in M \mid \mu_{x_0}(y) > 0\} = \operatorname{int}(\operatorname{supp}\mu_{x_0})$ を満たすようにとられている。$\{\operatorname{int}(\operatorname{supp}\mu_x)\}_{x\in K}$ は K の開被覆である。K はコンパクトだから、$x_1, \ldots, x_k \in K$ をとって、$K \subset \displaystyle\bigcup_{i=1}^{k} \operatorname{int}(\operatorname{supp}\mu_{x_i})$ となる。$\nu = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \mu_{x_i}$ とおけばよい。 ■

もう少し強いこともいえる。

定理 0.1.3 多様体 M のコンパクト部分集合 K と K を含む開集合 U が与えられているとする。M 上の C^∞ 級関数 $\nu : M \longrightarrow \mathbf{R}$ で、M 上で $0 \leqq \nu(x) \leqq 0$, $\nu|K = 1$ かつ $\operatorname{supp}\nu$ は U のコンパクト部分集合となるものが存在する。

証明 前の定理により、$\nu_1 : M \longrightarrow \mathbf{R}$ で、$\nu_1 \geqq 0$, $\nu_1|K > 0$, $\operatorname{supp}\nu_1$ は U のコンパクト部分集合となるものが存在する。$K_2 = \operatorname{supp}\nu_1 \setminus \operatorname{int}(\operatorname{supp}\nu_1)$ とおくと、K_2 は開集合 $U \setminus K$ のコンパクト部分集合である。再び前の定理により、$\nu_2 : M \longrightarrow \mathbf{R}$ で、$\nu_2 \geqq 0$, $\nu_2|K_2 > 0$, $\operatorname{supp}\nu_2$ は $U \setminus K$ のコンパクト部分集合となるものが存在する。$(\nu_1 + \nu_2)|\operatorname{supp}\nu_1 > 0$ となるから、$\operatorname{supp}\nu = \operatorname{supp}\nu_1 \subset \operatorname{int}(\operatorname{supp})(\nu_1 + \nu_2)$ である。ここで、

$$\nu(x) = \begin{cases} \dfrac{\nu_1(x)}{\nu_1(x) + \nu_2(x)} & x \in \operatorname{int}(\operatorname{supp}(\nu_1 + \nu_2)) \\ 0 & x \in M \setminus \operatorname{int}(\operatorname{supp}(\nu_1 + \nu_2)) \end{cases}$$

と定義すると、ν は C^∞ 級関数であり、$0 \leqq \nu(x) \leqq 1$, $\nu|K = 1$ を満たす。

■

注意 0.1.4　多様体 M のコンパクト部分集合 K と K を含む開集合 U が与えられているとする。M の部分多様体 U 上の C^∞ 級関数 $f : U \longrightarrow \mathbf{R}$ に対し、νf は M 上の C^∞ 級関数 $\nu f : M \longrightarrow \mathbf{R}$ と考えられ、$\nu f|K = f|K$ となる。

こうして、多様体上には多くの C^∞ 級関数が存在することとなった。このことを用い、接空間を方向微分の全体として定義しなおすこともできる。

【問題 0.1.5】　ユークリッド空間上の C^∞ 級関数 $f(x_1, \ldots, x_n)$ に対し、次を満たす C^∞ 級関数 $g_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_n(x_1, \ldots, x_n)$ が存在することを示せ。

$f(x_1, \ldots, x_n) = f(0, \ldots, 0) + x_1 g_1(x_1, \ldots, x_n) + \cdots + x_n g_n(x_1, \ldots, x_n)$

(このとき、$\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(0, \ldots, 0) = g_k(0, \ldots, 0)$ となる。)

ヒント：$f(x_1, \ldots, x_n) - f(0, \ldots, 0) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}\, f(tx_1, \ldots, tx_n)}{\mathrm{d}\, t}\,\mathrm{dt}$

【解】

$$\begin{aligned} f(x_1, \ldots, x_n) - f(0, \ldots, 0) &= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}\, f(tx_1, \ldots, tx_n)}{\mathrm{d}\, t}\,\mathrm{dt} \\ &= \int_0^1 \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx_1, \ldots, tx_n) x_i \,\mathrm{dt} \end{aligned}$$

だから、$g_i = \displaystyle\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx_1, \ldots, tx_n)\,\mathrm{dt}$ とおけば良い。このとき、$g_i(0, \ldots, 0) = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(0, \ldots, 0)$ となる。

【問題 0.1.6】　n 次元 C^∞ 級多様体 M の p における方向微分とは多様体 M 上の滑らかな関数のなす実ベクトル空間 $C^\infty(M)$ 上の線形形式 D で、$D(f \cdot g) = Df \cdot g(p) + f(p) \cdot Dg$ を満たすものである。

(1). p における方向微分の全体 $\mathcal{D}_p$ は実ベクトル空間をなすことを示せ。

(2). M 上の曲線 $c(t)$ で $c(0) = p$ となるものに対して、$C^\infty(M) \ni f \longmapsto D_c(f) = \dfrac{\mathrm{d}(f \circ c)}{\mathrm{d}\, t}(0)$ とおくと、D_c は p における方向微分であることを示せ。

(3). p のまわりの座標近傍 $(U, \varphi) = (U, (x_1, \ldots, x_n))$ に対し、曲線 $t \longmapsto \varphi^{-1}(0, \ldots, 0, t, 0, \ldots, 0)$ (k 番目の座標) に対する方向微分を $\dfrac{\partial}{\partial x_k}$ と書くとき、$\{\dfrac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial}{\partial x_n}\}$ が $\mathcal{D}_p$ の基底となることを示せ。

【解】　(1).　$D_1,\ D_2 \in \mathcal{D}_p,\ a_1,\ a_2 \in \mathbf{R}$ とし、$(a_1D_1+a_2D_2)(f\cdot g) = a_1D_1(f\cdot g)+a_2D_2(f\cdot g) = a_1D_1f\cdot g(p)+a_1f(p)\cdot D_1g+a_2D_2f\cdot g(p)+a_2f(p)\cdot D_2g = (a_1D_1f+a_2D_2f)\cdot g(p)+f(p)\cdot(a_1D_1g+a_2D_2g) = (a_1D_1+a_2D_2)f\cdot g(p)+f(p)\cdot(a_1D_1+a_2D_2)g$

(2).

(3). p の近傍で 0 となる関数 f について、その近傍上でのみ 0 でない関数 g をとると $Df=D(f\cdot g)=Df\cdot g(p)+f(p)\cdot Dg=Df\cdot g(p)$ だから $Df=0$ がわかる。従って、Df は f の p の近傍での値のみにより定まっている。また、p の近傍 U で定義された任意の関数 f に対し、p の近傍 V $(\subset U)$ 上で、f に一致する M 上の C^∞ 級関数がある。

0.2　コンパクト多様体のユークリッド空間への埋め込み

【問題 0.2.1】　コンパクトハウスドルフ空間 X は正規空間であることを示せ。
すなわち、A_1, A_2 を X の閉集合、$A_1\cap A_2=\emptyset$ とするとき、開集合 U_1, U_2 で、$A_1\subset U_1, A_2\subset U_2, U_1\cap U_2=\emptyset$ となるものが存在することを示せ。

【解】　A_1, A_2 はコンパクト集合の閉集合だからコンパクトである。(U_α を X の開集合として、A_i の開被覆 $\{A_i\cap U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ が与えられると、$\{U_\alpha\}\cup\{X\setminus A_i\}$ は X の被覆だから、有限部分被覆 $\{U_{\alpha_i}\}\cup\{X\setminus A_i\}$ をとることが出来る。($\{X\setminus A_i\}$ は必ずしも必要とは限らない。) このとき、$\{A_i\cap U_{\alpha_i}\}$ は A_i の有限被覆である。)

まず、A_1 が 1 点のときを考える。$A_1=\{x_0\}$ とする。X はハウスドルフであるから、A_2 の各点 y に対し、$x\in V_y, y\in U_y$ で $V_y\cap U_y=\emptyset$ となる開集合 V_y, U_y が存在する。$\{U_y\}_{y\in A_2}$ は A_2 の開被覆であるから、有限部分被覆 $\{U_{y_i}\}$ をとることが出来る。このとき、$V=\bigcap_i V_{y_i}$ は x_0 を含む開集合、$U=\bigcup_i U_{y_i}$ は A_2 を含む開集合で、$V\cap U=\emptyset$ となる。

さて、この結果を一般の A_1, A_2 に適用する。A_1 の各点 x に対して、$x\in V_x$, $A_2\subset U_x, V_x\cap U_x=\emptyset$ となる開集合 V_x, U_x が存在する。$\{V_x\}_{x\in A_1}$ は A_1 の開被

覆であるから、有限部分被覆 $\{U_{x_j}\}$ をとることが出来る。このとき、$V=\bigcup_j V_{x_j}$ は A_1 を含む開集合、$U=\bigcap_j U_{x_j}$ は A_2 を含む開集合で、$V\cap U=\emptyset$ となる。

【問題 0.2.2】　コンパクトハウスドルフ空間 X の開被覆 $\{U_i\}$ に対し、X の開被覆 $\{V_i\}$ で、$\overline{V}_i\subset U_i$ となるものが存在することを示せ。

【解】　X の開被覆 $\{U_i\}$ の有限部分被覆 $\{U_1,\dots,U_k\}$ をとる。ここに現れない U_ℓ に対しては、$V_\ell=\emptyset$ ととることに決め。$U_1,\dots,U_k$ を順に $V_1,\dots,V_k$ に取り換える。$V_1,\dots,V_{j-1}$ が、$\overline{V_1}\subset U_1,\dots,\overline{V_{j-1}}\subset U_{j-1}$ $\bigcup_{i=1}^{j-1}V_i\cup\bigcup_{i=j}^{k}U_i=M$ ととられているときに、

$$K_j=M\setminus(\bigcup_{i=1}^{j-1}V_i\cup\bigcup_{i=j+1}^{k}U_i)\subset U_j$$

を考える。$K_j\cap(M\setminus U_j)=\emptyset$ だから、開集合 V_j, W_j で、$K_j\subset V_j$, $M\setminus U_j\subset W_j$, $V_j\cap W_j=\emptyset$ となるものが存在する。このとき、$\overline{V_j}\subset U_j$, $\bigcup_{i=1}^{j}V_i\cup\bigcup_{i=j+1}^{k}U_i=M$ となっている。従って、帰納法により、X の開被覆 $\{V_i\}$ で、$\overline{V}_i\subset U_i$ となるものが存在することがわかった。

さてコンパクト多様体はユークリッド空間に埋め込まれることを示そう。

定理 0.2.3　M を n 次元コンパクト多様体とする。M からある次元 N のユークリッド空間 $\mathbf{R}^N$ への埋め込み $\Phi: M\longrightarrow\mathbf{R}^N$ が存在する。

証明　M の座標近傍系 $\{(U_i,\varphi_i)\}$ に対し、有限部分被覆 $\{U_1,\dots,U_k\}$ をとる。$\overline{V}_i\subset U_i$ となる開被覆 $\{V_1,\dots,V_k\}$ をとり、さらに、$\overline{W}_i\subset V_i$ となる開被覆 $\{W_1,\dots,W_k\}$ をとる。

$\overline{V}_i\subset U_i$ に対し、C^∞ 級関数 $\nu_i: M\longrightarrow\mathbf{R}$ で、$\nu_i\geqq 0$, $\operatorname{supp}\nu_i\subset U_i$, $\nu_i|\overline{V}_i=1$ となるものをとる。

また、$\overline{W}_i\subset V_i$ に対し、C^∞ 級関数 $\mu_i: M\longrightarrow\mathbf{R}$ で、$\mu_i\geqq 0$, $\operatorname{supp}\mu_i\subset V_i$, $\nu_i|\overline{W}_i>0$ となるものをとる。

座標近傍 (U_i,φ_i) において、$\varphi_i=(x_1^{(i)},\dots,x_n^{(i)})$ とする。$\nu_i\varphi_i=$

$(\nu_i x_1^{(i)}, \ldots, \nu_i x_n^{(i)})$ は、M から $\mathbf{R}^n$ への C^∞ 級写像である。

$\Phi = (\mu_1, \nu_1\varphi_1, \ldots, \mu_k, \nu_k\varphi_k)$ とおくと $\Phi : M \longrightarrow \mathbf{R}^{k(n+1)}$ は C^∞ 写像である。

M はコンパクトであるから、$\Phi_* : T_xM \longrightarrow \mathbf{R}^{k(n+1)}$ のランクが n であり、Φ は単射であることを示せば良い。

$x \in V_i \subset M$ とすると、$\Phi|V_i$ の成分 $\nu_i\varphi_i = \varphi_i$ であるから、$(\nu_i\varphi_i|V_i)\circ{\varphi_i}^{-1} = \mathrm{id}_{\varphi_i(V_i)}$ であり、$\Phi_* : T_xM \longrightarrow \mathbf{R}^{k(n+1)}$ のランクは n となる。

Φ が単射であることは、$\Phi(x) = \Phi(y)$ とすると、$\mu_i(x) = \mu_i(y)$ であるが、ある i に対しては、$\mu_i(x) = \mu_i(y) > 0$ となっている。このとき、x, y は V_i の元である。従って $\nu_i\varphi_i(x) = \nu_i\varphi_i(y)$ から、$\varphi_i(x) = \varphi_i(y)$ となり、$x = y$ がわかる。 ■

こうして、コンパクト多様体 M は常にユークリッド空間に埋め込まれることがわかった。

ユークリッド空間の中の多様体 $M \subset \mathbf{R}^N$ に対しては、接束を $TM = \{(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \in \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N \mid \mathbf{v} \in T_{\mathbf{x}}M\}$ と定義することも出来た。ユークリッド空間内には内積が定義されているから、

$$\nu M = \{(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \in \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N \mid \mathbf{v} \perp T_{\mathbf{x}}M\}$$

というものも定義される。ここで $\nu_{\mathbf{x}}M = \{\mathbf{v} \in \mathbf{R}^N \mid \mathbf{v} \perp T_{\mathbf{x}}M\}$ は、接空間 $T_{\mathbf{x}}M$ に直交するベクトルを集めたもので、法空間と呼ばれる。νM は $\mathbf{R}^N$ における M の法束と呼ばれる。νM はユークリッド空間の中の N 次元多様体である。$P_\nu : \nu M \longrightarrow M$ が定義され、次のような図式が可換になる。

$$\begin{array}{ccc}
M \times \mathbf{R}^N & \longrightarrow & TM \\
\downarrow & & \downarrow P_T \\
\nu M & \xrightarrow[P_\nu]{} & M
\end{array}$$

但し、$M \times \mathbf{R}^N$ からの写像は $\mathbf{R}^N$ から $T_{\mathbf{x}}M, \nu_{\mathbf{x}}N$ への直交射影である。

$$\begin{array}{cccc}
\mathbf{R}^N \cong & T_{\mathbf{x}}M \oplus \nu_{\mathbf{x}}M & \longrightarrow & T_{\mathbf{x}}M \\
& \downarrow & & \downarrow P_T \\
& \nu_{\mathbf{x}}M & \xrightarrow[P_\nu]{} & \{\mathbf{x}\}
\end{array}$$

TM は $(V_i \times \mathbf{R}^n, g_{ij} \times Dg_{ij})$ から定義された。同じように νM もある $A_{ij}(x_j) \in GL(N-n;\mathbf{R})$ に対して、$(V_i \times \mathbf{R}^{N-n}, g_{ij} \times A_{ij})$ から定義されるベクトル束である。

注意 0.2.4　M を $n+1$ 次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^{n+1}$ の中の n 次元コンパクト多様体とすると、法束は、1 次元ベクトル空間をファイバーとするベクトル束である。もしも、M が向きづけ可能でないとすると、$M \subset \mathbf{R}^{n+1}$ と 1 回だけ交わる 1 次元コンパクト部分多様体 K が存在する。$n \geqq 2$ とすると、K に対して円板からのはめ込み写像が定義される。円板と M は横断的にとることが出来、円板と M の交点が D の 1 次元のコンパクト部分多様体となる。この部分多様体が、D の境界と 1 点で交わることはありえない。

従って、$n+1$ 次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^{n+1}$ の中の n 次元コンパクト多様体 M は向きづけ可能である。

【問題 0.2.5】　M をユークリッド空間 $\mathbf{R}^N$ に埋め込まれたコンパクト多様体とする.

(1) 次で定義される X は C^∞ 多様体であることを示せ.

$$X = \{(x, y) \in \mathbf{R}^{2N} \mid x \in M,\ y \text{ は } T_xM \text{ に直交する } \}$$

(2) $(x, y) \longmapsto x + y$ で定義される写像 $e : X \longrightarrow \mathbf{R}^N$ は $X \cap (\mathbf{R}^N \times \{0\})$ の近傍では微分同相写像になっていることを示せ.
ヒント：逆写像定理。

0. 3　C^∞ 級写像

多様体 M 上の関数が非常にたくさん存在することと、それにより、コンパクト多様体 M からユークリッド空間に埋め込み $M \longrightarrow \mathbf{R}^N$ が存在することがわかった。

ホイットニーによれば、n 次元の多様体から $2n+1$ 次元ユークリッド空間への埋め込みが存在する。

次元が高いユークリッド空間に埋め込まれたからといって、多様体の形が良くわかるというものではないが、一つの手掛かりを与えていることは確かである。実際、どのような次元のユークリッド空間に埋め込まれるかという

のは多様体の複雑さをはかる量になる。

円周は、もちろん２次元ユークリッド空間に埋め込まれる。

２次元球面は３次元ユークリッドに埋め込まれる。

実射影平面 $\mathbf{R}P^2$ は３次元ユークリッドに埋め込まれないが、４次元ユークリッド空間には埋め込まれる。

埋め込まれない理由は、向きづけられないことにある。メビウスの帯が、$\mathbf{R}P^2$ のなかにとれるが、このメビウスの帯の中心線にそって、片側に中心線を押し出し、ある点のところで、$\mathbf{R}P^2$ を横切ってつなぐと $\mathbf{R}P^2$ に１点で交わる閉曲線が出来る。このようなことは起こってはならない。

円周の３次元ユークリッド空間への埋め込みを考えると、非常に複雑な埋め込みが存在することがわかる。

このような埋め込みの２次元ユークリッド空間への射影を考えると、円周から２次元ユークリッド空間へのはめ込みが得られることが多い。すなわち、円周に対し、その接線の方向 $\in \mathbf{R}P^2$ を対応させる写像が、$\mathbf{R}P^2$ に描く曲線が考えられるが、その曲線の補空間の方向に射影すると、円周から２次元ユークリッド空間へのはめ込みが得られる。しかしはめ込みの空間もそれほど簡単ではない。（回転数が定義される。）

このようなことは、埋め込みやはめ込みの空間は、数学的に非常に興味深いことを示しており、スメール・ヘフリガー理論、グロモフ・フィリップス理論を生むことになった。

円周 S^1 は、もちろん２次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^2$ に埋め込まれる。$\mathbf{R}^2$ への円周の埋め込みは、円板を囲む。すなわち D^2 から $\mathbf{R}^2$ への埋め込みの境界への制限となる。ジョルダンの定理。

一方、円周 S^1 の３次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^3$ への埋め込みは、D^2 から $\mathbf{R}^3$ への埋め込みの境界への制限となるとは限らない。

４次元以上のユークリッド空間 $\mathbf{R}^n$ $(n \geqq 4)$ への埋め込みは、再び、D^2 から $\mathbf{R}^n$ への埋め込みの境界への制限となる。

多様体自体の形の研究のためには、もっと低い次元の多様体への写像を手掛かりにするほうが現実的である。

多様体の形を理解する方法は、それを良くわかる多様体から構成的に理解することである。

良くわかる多様体の第一は、球面 S^n であり、第２はそれらの直積 $S^m \times S^n$

である。また、次元が１、２の多様体は良くわかっている。

将来、示すこととして、コンパクト連結１次元多様体は円周 S^1 と微分同相である。また、コンパクトでない可分な連結１次元多様体は $\mathbf{R}$ と微分同相である。

２次元多様体の分類をこの本で行なうことは出来ない。コンパクト連結２次元多様体は、まず向きづけ可能かどうかで分類される。向きづけ可能なものは、球面 S^2, トーラス T^2, 種数 2 の有向閉曲面 Σ_2, 種数 3, 4, ... の有向閉曲面 $\Sigma_3, \Sigma_4, \ldots$ という可算個のものがある。向きづけ不可能なものには、実射影平面 $\mathbf{R}P^2$, クラインボトル K^2, 種数 3, 4, ... の向き付け不可能閉曲面 $N_3, N_4, \ldots$ という可算個のものがある。

$$\Sigma_{2k+1} = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid z^2 = ((3k+2)^2 - (x^2+y^2)) \prod_{n=-k}^{k} ((x-3n)^2 + y^2 - 1)\}$$

$$\Sigma_{2k} = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid z^2 = ((3k+2)^2 - (x^2+y^2)) \prod_{n=1}^{k} ((x-3n)^2 + y^2 - 1)((x+3n)^2 + y^2 - 1)\}$$

と定義することも出来る。この $\Sigma_k \subset \mathbf{R}^3$ について、$\mathbf{x} \in \Sigma_k$ に対し、$-\mathbf{x} \in \Sigma_k$ であり、$\mathbf{x}$ と $-\mathbf{x}$ を同一視して得られる空間 $\Sigma_k/\sim$ は多様体となり、$N_k = \Sigma_k/\sim$ である。

コンパクト連結多様体から良くわかっている連結多様体に沈め込み $F : M \longrightarrow N$ があるときには、$y \in N$ に対し $K = F^{-1}(y)$ は部分多様体となるが、さらに $y \in N$ に対し、ある近傍 V_y で、$F^{-1}(V_y) \cong V_y \times K$ となるものがある。

将来、様々な写像の構成には、１の分割 (partition of unity) がしばしば用いられる。

【問題 0.3.1】　M をコンパクト多様体とする。M の座標近傍系 $\{(U_i, \varphi_i)\}$ に対し、C^∞ 級関数 $\lambda_i : M \longrightarrow \mathbf{R}$ で次を満たすものが存在する。$0 \leqq \lambda_i(x) \leqq 1$, $\operatorname{supp} \lambda_i \subset U_i$, 有限個の i を除いて $\lambda_i = 0$, $\displaystyle\sum_i \lambda_i = 1$.

【解】　$\{U_i\}$ の有限部分被覆 $\{U_{i_j}\}$ をとる。$\overline{V}_{i_j} \subset U_{i_j}$ となる開被覆 $\{V_{i_j}\}$ をとる。$\overline{V}_{i_j} \subset U_{i_j}$ に対し、C^∞ 級関数 μ_{i_j} で $\mu_{i_j}|\overline{V}_{i_j} > 0$, $\operatorname{supp} \mu_{i_j} \subset U_{i_j}$ とな

るものをとる。$\lambda_{i_j} = \dfrac{\mu_{i_j}}{\sum_{\ell=1}^{k} \mu_{i_\ell}}$ とおく。$\{i_1, \ldots, i_k\}$ 以外の i については $\lambda_i = 0$ とおくとこれが題意を満たす。

この問題のような $\{\lambda_i\}$ を $\{U_i\}$ に従属した１の分割と呼ぶ。

0.4　多様体の埋め込み

コンパクト２次元多様体は、４次元ユークリッド空間に埋め込まれることが知られている。

向き付けを持たないコンパクト２次元多様体 N^2 は、４次元ユークリッド空間に埋め込まれるが、３次元ユークリッド空間には埋め込まれない。２次元多様体 N の３次元ユークリッド空間への影をみることはできる。

$\mathbf{R}P^2$ の３次元ユークリッド空間への影は、「ホイットニーの傘」と呼ばれる特異点を持つものを容易に作ることが出来る。実際には、ボーイ曲面と呼ばれるはめ込みも存在する、ボーイ曲面の図は川崎徹郎著「曲面と多様体」朝倉書店にあるものがわかりやすい。

さらに、$\mathbf{R}P^2$ の２次元ユークリッド空間への影をみると、円板になる。このときの１点の逆像は有限個の点である。容易に作ることが出来るものは、分岐被覆の形の特異点を持つものである。一方、これは変形すると、カスプという形の特異点を持つ写像になる。

さらに、$\mathbf{R}P^2$ の１次元ユークリッド空間への影をみると、線分になる。このときの１点の逆像は多くの場合、有限個の円である。

このような例でわかるように、写像 $F : M \longrightarrow N$ が与えられ、N の形と、$F^{-1}(y)$ の形が理解できれば、M の形がわかることが期待できる。そのためには、良い写像であることが必要である。

一番よいと思われる条件は、$F_*|T_xM \longrightarrow T_{F(x)}N$ のランクが $\dim N$ のときである。このとき x は F の正則点と呼ばれる。$y \in N$ は $F^{-1}(y)$ の点が全て正則点のとき正則値と呼ばれる。正則値 y に対し、$F^{-1}(y)$ は $\dim M - \dim N$ 次元の部分多様体となる。

正則点でない点を臨界点とよび、臨界点の集合の F による像を臨界値とよぶ。

$m = \dim M < n = \dim N$ のときは、$F(M)$ が臨界値、$N \setminus F(M)$ が正則値となる。このときは正則値の逆像は空集合である。

0.5 サードの定理

臨界値しかない写像 $F : M \longrightarrow N$ があると困ることになるが、C^∞ 級写像についてはサードの定理といわれるものがある。

定理 0.5.1（サードの定理） $F : M \longrightarrow N$ を可分な多様体の間の C^∞ 級写像とする。F の臨界値の集合は測度 0 である。

これにより、F の正則値はともかく存在する。臨界値は測度 0 といっても、臨界点の集合が、ただの閉集合となっているときは解析はほとんど不可能である。

実際には、臨界点の集合が、部分多様体になる写像が存在する。そのことは、横断性とワイエルシュトラスの多項式近似定理から導かれる。

そのような臨界点についての様子がわかる例としてモース関数がある。

定義 0.5.2 多様体 M 上の C^∞ 級関数 f の臨界点 x において f のヘッセ行列が正則であるとき、臨界点 x は非退化であるという。多様体 M 上の C^∞ 級関数 f がモース関数であるとは、f の臨界点がすべて非退化であることである。

ここで、f の臨界点 x における f のヘッセ行列とは、x の周りの座標近傍 $(U, \varphi = (x_1, \ldots, x_n))$ について、$f \circ \varphi^{-1}$ の 2 階微分の行列 $\Big(\dfrac{\partial^2(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i \partial x_j}(\varphi(x))\Big)_{i,j=1,\ldots,n}$ のことである。

すなわち、この座標近傍では、$f \circ \varphi^{-1}$ は 2 次関数 $\displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i \partial x_j}(\varphi(x)) x_i x_j$ で近似される。

ヘッセ行列が正則であることは、座標近傍のとり方によらない。$\varphi = (x_1, \ldots, x_n)$, $\psi = (y_1, \ldots, y_n)$ を x の周りの座標関数とすると、$f \circ \varphi^{-1} = (f \circ \psi^{-1}) \circ (\psi \circ \varphi^{-1})$ は

$$(f\circ\varphi^{-1})(x_1,\dots,x_n)=(f\circ\psi^{-1})(y_1(x_1,\dots,x_n),\dots,y_n(x_1,\dots,x_n))$$

と書かれる。$\dfrac{\partial(f\circ\varphi^{-1})}{\partial x_i}=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial(f\circ\psi^{-1})}{\partial y_k}\frac{\partial y_k}{\partial x_i}$ であるから、

$$\frac{\partial^2(f\circ\varphi^{-1})}{\partial x_i\partial x_j}=\sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n}\frac{\partial^2(f\circ\psi^{-1})}{\partial y_k\partial y_\ell}\frac{\partial y_k}{\partial x_i}\frac{\partial y_\ell}{\partial x_j}+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial(f\circ\psi^{-1})}{\partial y_k}\frac{\partial^2 y_k}{\partial x_i\partial x_j}$$

となるが、臨界点 x 上では、右辺の第 2 項は 0 となる。従って、$P=(\frac{\partial y_k}{\partial x_i})_{i,j=1,\dots,n}$ を微分 $D(\psi\circ\varphi^{-1})_{\varphi(x)}$ をあらわす行列、$f\circ\varphi^{-1}$, $f\circ\psi^{-1}$ のヘッセ行列を $H_{f\circ\varphi^{-1}}$, $H_{f\circ\psi^{-1}}$ とすると、$H_{f\circ\varphi^{-1}}={}^tPH_{f\circ\psi^{-1}}P$ が成立する。従って、ヘッセ行列が正則であることは、座標近傍の取り方によらない。

2 次関数 $\displaystyle\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2(f\circ\varphi^{-1})}{\partial x_i\partial x_j}(\varphi(x))x_ix_j$ で近似される。の等位面を 2 次曲面と呼んだ。**??**節で 2 次曲面の形は行列 $\displaystyle\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2(f\circ\varphi^{-1})}{\partial x_i\partial x_j}(\varphi(x))$ の正の固有値の（重複を許した）個数、負の固有値の（重複を許した）個数によって定まる。$H_{f\circ\varphi^{-1}}={}^tPH_{f\circ\psi^{-1}}P$ はヘッセ行列の正の固有値の（重複を許した）個数、負の固有値の（重複を許した）個数も座標近傍の取り方によらないことを示している。負の固有値の個数をモース臨界点の指数 (index) と呼ぶ。

2 次関数は、座標系を正則行列によりとりかえることで $-\displaystyle\sum_{i=1}^{k}x_i^2+\sum_{i=k+1}^{n}x_i^2$ の形の標準形をもつ。これが f を近似していることから、モース関数自体も座標関数をうまく取り替えると、その座標近傍でこの形にかかれることは 0.8 節に述べるモースの補題により示される。

【問題 0.5.3】 $(a,b,c)\in\mathbf{R}^3$ は $(0,0,0)$ ではないとする。$\mathbf{R}^2$ 上の関数

$$f(x,y)=(2+\cos y)(a\cos x+b\sin x)+c\sin y$$

は、$\mathbf{R}^2/(2\pi\mathbf{Z})^2$ 上の関数 $F:\mathbf{R}^2/(2\pi\mathbf{Z})^2\longrightarrow\mathbf{R}$ を定義する。F の臨界点の個数が有限個であるための条件を述べよ。臨界点におけるヘッシアンが退化するかどうか調べよ。

【解】 $(m,n)\in\mathbf{Z}^2$ に対して、$f(x+2\pi m,y+2\pi n)=f(x,y)$ だから F は定義されている。

$$Df=((2+\cos y)(-a\sin x+b\cos x),(-\sin y)(a\cos x+b\sin x)+c\cos y)$$

であり、$Df=(0,0)$ とすると, $-a\sin x+b\cos x=0$ がわかる。

$a\cos x+b\sin x=0$ とすると $\begin{pmatrix}\cos x & \sin x\\ -\sin x & \cos x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$ だから $(a,b)=(0,0)$ となる。このとき $c\neq 0$ であるが、$y=0 \mod \pi$ で $Df=(0,0)$ すなわち $DF=(0,0)$ となり、F の臨界点の個数は無限個である。

$(a,b)\neq(0,0)$ ならば、$a\cos x+b\sin x\neq 0$ である。$-a\sin x+b\cos x=0$ かつ $\tan y=\dfrac{c}{a\cos x+b\sin x}$ をみたす (x,y) において、$Df=(0,0)$ となる。$(\cos x,\sin x)=\pm(\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}})$ を満たす $\mod 2\pi$ で 2 つの x に対し、それぞれ $\tan y=\pm\dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$ をみたす y が 2 つ定まるので、F の臨界点の個数は 4 である。f の 2 階微分の行列は

$$\begin{pmatrix}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}-(2+\cos y)(a\cos x+b\sin x) & -\sin y(-a\sin x+b\cos x)\\ -\sin y(-a\sin x+b\cos x) & -\cos y(a\cos x+b\sin x)-c\sin y\end{pmatrix}$$

である。これは、$(a,b)=(0,0)$, $\cos y=0$ のとき、$\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & \pm c\end{pmatrix}$ であり、退化している。$(a,b)\neq(0,0)$ のとき、臨界点では
$\begin{pmatrix}-(2+\cos y)(\pm\sqrt{a^2+b^2}) & 0\\ 0 & -\cos y(\pm\dfrac{a^2+b^2+c^2}{\sqrt{a^2+b^2}})\end{pmatrix}$ において $\cos y\neq 0$ であるから非退化である。$\cos y$ の符号は $\pm$ が $+$, $-$ のそれぞれの場合に正負になるから、4 つの臨界点の符号は、1 つは $(+,+)$, 2 つは $(+,-)$, 1 つは $(-,-)$ となる。

【問題 0.5.4】 $\mathbf{C}P^n=(\mathbf{C}^{n+1}\setminus\{0\})/\mathbf{C}^\times$ を n 次元複素射影空間とする。$S^{2n+1}=\{(z_1,...,z_{n+1})\in\mathbf{C}^{n+1}\mid \sum_{k=1}^{n+1}|z_k|^2=1\}$ を $\mathbf{C}^{n+1}$ の単位球面とする。$U(1)=\{e^{\sqrt{-1}\theta}\mid\theta\in\mathbf{R}\}$ とする。

(0) $U(1)\times S^{2n+1}\longrightarrow S^{2n+1}$ を

$$(e^{\sqrt{-1}\theta},(z_1,...,z_{n+1}))\longmapsto(e^{\sqrt{-1}\theta}z_1,...,e^{\sqrt{-1}\theta}z_{n+1})$$

で定義すると、これは群 $U(1)$ の S^{2n+1} への作用であることを示せ。

(1) 結合写像

$$S^{2n+1} \xrightarrow{\ i\ } \mathbf{C}^{n+1} \setminus \{0\} \xrightarrow{\ p\ } \mathbf{C}P^n$$

の rank を求めよ.

(2) $f(z_1, ..., z_{n+1}) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} k|z_k|^2 \Big/ \sum_{k=1}^{n+1} |z_k|^2$ で定義される関数 $f : \mathbf{C}^{n+1} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbf{R}$ は $\mathbf{C}P^n$ 上の C^∞ 級関数 F を誘導することを示せ.

(3) F の臨界点 ($F_* : T_x\mathbf{C}P^n \longrightarrow \mathbf{R}$ が 0 となる点 x) を求めよ。

ヒント：合成写像 $T_zS^{2n+1} \longrightarrow T_x\mathbf{C}P^n \longrightarrow \mathbf{R}$ が 0 でない点 z の定める点 $x = [z]$ は正則点である。

(4) F の臨界点におけるヘッセ行列を求めよ。

【解】 (0). $U(1) \times S^{2n+1} \longrightarrow S^{2n+1}$ は同じ式で定義される写像 $U(1) \times \mathbf{C}^{n+1} \longrightarrow \mathbf{C}^{n+1}$ の制限であり、C^∞ 級写像である。$e^{\sqrt{-1}\theta_1}(e^{\sqrt{-1}\theta_2}\mathbf{z}) = (e^{\sqrt{-1}\theta_1}e^{\sqrt{-1}\theta_2})\mathbf{z}$ であるから、これは、群の作用である。

(1). $\mathbf{z}^0 = (z_1^0, \dots, z_{n+1}^0) \in S^{2n+1} \subset \mathbf{C}^{n+1}$ について、$z_i^0 \neq 0$ とする。$\mathbf{C}P^n$ の座標近傍 (V_i, φ_i) を $V_i = \{[\mathbf{z}] \mid z_i \neq 0\}$, $\varphi_i(\mathbf{z}) = (\dfrac{z_1}{z_i}, \dots, \dfrac{z_{i-1}}{z_i}, \dfrac{z_{i+1}}{z_i}, \dots, \dfrac{z_{n+1}}{z_i}) \in \mathbf{C}^n \cong \mathbf{R}^{2n}$ で定めると、$(p \circ i)(\mathbf{z}^0) \in V_i$ である。$\mathbf{v} \in \mathbf{C}^n$ に対し、$\varphi_i((p \circ i)(\mathbf{z}^0))$ を通る C^∞ 級曲線

$$(x_1(t), \dots, x_{i-1}(t), x_{i+1}(t), \dots, x_{n+1}(t)) = \varphi_i((p \circ i)(\mathbf{z}^0)) + t\mathbf{v}$$

に対し、$\mathbf{x}(t) = (x_1(t), \dots, x_{i-1}(t), 1, x_{i+1}(t), \dots, x_{n+1}(t)) \in \mathbf{C}^{n+1}$ とおく。$\dfrac{\mathbf{x}(t)}{\|\mathbf{x}(t)\|} \in S^{2n+1}$ であるが、その第 i 成分は正実数である。$z_i^0 = r_i^0 e^{\sqrt{-1}\theta_i^0}$ $(r_i^0 \in \mathbf{R}_{>0})$ とすると、$\mathbf{z}^0 = e^{\sqrt{-1}\theta_i^0}\dfrac{\mathbf{x}(0)}{\|\mathbf{x}(0)\|}$ であることがわかる。従って、$c(t) = e^{\sqrt{-1}\theta_i^0}\dfrac{\mathbf{x}(t)}{\|\mathbf{x}(t)\|}$ は S^{2n+1} 上の C^∞ 級曲線で、

$$((p \circ i) \circ c)(t) = {\varphi_i}^{-1}(\varphi_i((p \circ i)(\mathbf{z}^0)) + t\mathbf{v})$$

を満たす。この曲線 c の定める $T_{\mathbf{z}^0}S^{2n+1}$ の元は、接写像 $(p \circ i)_*$ で、${\varphi_i}^{-1}(\varphi_i((p \circ i)(\mathbf{z}^0)) + t\mathbf{v})$ の定める $T_{(p\circ i)(\mathbf{z}^0)}\mathbf{C}P^n$ の元に写る。$T_{(p\circ i)(\mathbf{z}^0)}\mathbf{C}P^n$ の任意の元は、ある $\mathbf{v} \in \mathbf{C}^n$ により上の曲線で代表されるから、接写像 $(p \circ i)_*$ は全射である。従って $(p \circ i)_*$ のランクは $2n$ である。

(2) $\mathbf{z}' = (z'_1, \dots, z'_{n+1})$, $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_{n+1})$ が、$\mathbf{z}' = \lambda\mathbf{z}$ $(\lambda \in \mathbf{C} \setminus \{0\})$ を満たすとすると、$f(\mathbf{z}') = f(\mathbf{z})$ であるから、f は $\mathbf{C}P^n$ 上の関数 $F : \mathbf{C}P^n \longrightarrow \mathbf{R}$

を定義する。$\mathbf{C}P^n$ の座標近傍 (V_i,φ_i) に対し、

$$F\circ\varphi_i^{-1}(x_1,\dots,x_n)=(i+\sum_{k=1}^{i-1}k|x_k|^2+\sum_{k=i}^{n}(k+1)|x_k|^2)\Big/(1+\sum_{k=1}^{n}|x_k|^2)$$

は $\mathbf{C}^n\cong\mathbf{R}^{2n}$ 上の C^∞ 級関数である。従って、F は C^∞ 級関数である。

(3) S^{2n+1} 上の関数として、$f=\sum_{k=1}^{n+1}k|z_k|^2$ を考える。S^{2n+1} の座標近傍 $(U_i^\pm,\varphi_i^\pm)$, $(V_i^\pm,\psi_i^\pm)$ を
$U_i^\pm=\{\mathbf{z}\in S^{2n+1}\mid \operatorname{Re}z_i\gtrless 0\}$, $V_i^\pm=\{\mathbf{z}\in S^{2n+1}\mid \operatorname{Im}z_i\gtrless 0\}$,
$\varphi_i^\pm(\mathbf{z})=(z_1,\dots,z_{i-1},\operatorname{Im}z_i,z_{i+1},\dots,z_{n+1})\in\mathbf{C}^{i-1}\times\mathbf{R}\times\mathbf{C}^{n+1-i}$,
$\psi_i^\pm(\mathbf{z})=(z_1,\dots,z_{i-1},\operatorname{Re}z_i,z_{i+1},\dots,z_{n+1})\in\mathbf{C}^{i-1}\times\mathbf{R}\times\mathbf{C}^{n+1-i}$
で定義する。
$f\circ\varphi_i^{\pm-1}(z_1,\dots,z_{i-1},x_i,z_{i+1},\dots,z_{n+1})=i+\sum_{k=1}^{n+1}(k-i)|z_k|^2$,
$f\circ\psi_i^{\pm-1}(z_1,\dots,z_{i-1},y_i,z_{i+1},\dots,z_{n+1})=i+\sum_{k=1}^{n+1}(k-i)|z_k|^2$ である。$\varphi_i^\pm(U_i^\pm)$ 上で、$Df\circ\varphi_i^{\pm-1}=0$ となるのは、$z_k=0$ $(k=1,\dots,i-1,i+1,\dots,n+1)$ の時である。また、$\psi_i^\pm(V_i^\pm)$ 上で、$Df\circ\psi_i^{\pm-1}=0$ となるのも、$z_k=0$ $(k=1,\dots,i-1,i+1,\dots,n+1)$ の時である。

従って、$\mathbf{z}=(z_1,\dots,z_{n+1})\in S^{2n+1}$ が $\exists i,j,i\neq j,z_i\neq 0,z_j\neq 0$ を満たせば、$\mathbf{z}$ は S^{2n+1} 上の関数 f の正則点である。

$F\circ(p\circ i)=f$ だから、接写像について、$F_*\circ(p\circ i)_*=f_*$ である。従って、$f:S^{2n+1}\longrightarrow\mathbf{R}$ の正則点 $\mathbf{z}$ に対して、$(p\circ i)(\mathbf{z})$ は $F:\mathbf{C}P^n\longrightarrow\mathbf{R}$ の正則点である。ゆえに臨界点は、$(p\circ i)(\mathbf{e}_i)$ $(i=1,\dots,n+1)$ の $n+1$ 個である。

さて、これらの点でのヘッセ行列は次のように計算される。V_i 上で

$$\begin{aligned}
&(F\circ{\varphi_i}^{-1})(w_1,\dots,w_{i-1},w_{i+1},\dots,w_{n+1})\\
&=(i+\sum_{k=1}^{i-1}k|w_k|^2+\sum_{k=i}^{n}(k+1)|w_k|^2)\Big/(1+\sum_{k=1}^{n}|w_k|^2)\\
&=(i+\sum_{k=1}^{i-1}k|w_k|^2+\sum_{k=i}^{n}(k+1)|w_k|^2)(1-\sum_{k=1}^{n}|w_k|^2+(\sum_{k=1}^{n}|w_k|^2)^2-\dots)\\
&=i+\sum_{k=1}^{i-1}(k-i)|w_k|^2+\sum_{k=i}^{n}(k+1-i)|w_k|^2)+\dots
\end{aligned}$$

従って、$(p\circ i)(\mathbf{e}_i)$ におけるヘッセ行列は対角行列 $\operatorname{diag}(2(1-i),2(1-i),\dots,-2,-2,2,2,\dots,2(n+1-i),2(n+1-i))$ になる。従って、$(p\circ i)(\mathbf{e}_i)$

はモース型臨界点で指数は $2(i-1)$ である。

0.6　サードの定理の証明の概略

Milnor: Topology from the differentiable viewpoint による。

(0)　$A \subset \mathbf{R}^n$ が測度 0 であるとは、任意の正実数 ε に対し、次を満たす閉立方体の可算族 Q_i があること: $A \subset \bigcup_i Q_i$, Q_i の辺の長さを δ_i とするとき、$\sum_i {\delta_i}^n \leqq \varepsilon$ となる。

(1)　$\mathbf{R}^n$ の測度 0 の集合のリプシッツ同相写像による像は測度 0 である。従って、連続微分可能同相写像による像についても同様。

(2)　これにより、微分可能多様体の部分集合が測度 0 であることが定義される。また、サードの定理は、滑らかな写像 $F : \mathbf{R}^m \longrightarrow \mathbf{R}^n$ に対して示せばよい。

(3)　サードの定理は、$m < n$ に対して正しい。

(4)　F の臨界点の集合を C とする。$C = \{x \in \mathbf{R}^m \mid \operatorname{rank} T_x F < n\}$. F の k 階の偏微分がすべて 0 となる点の集合を C_k とする: $C \supset C_1 \supset C_2 \supset \cdots \supset C_k$.

(5)　フビニの定理「$A \cap \{x\} \times \mathbf{R}^{m-1} \subset \{x\} \times \mathbf{R}^{m-1}$ がすべての x に対し測度 0 ならば、$A \subset \mathbf{R}^m$ が測度 0 となる。」を認める。

(6)　「$F(C - C_1)$ は測度 0.」

$C - C_1$ の点 x の近傍で、$F = (f_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, f_n(x_1, \ldots, x_m))$ の偏微分の 1 つは 0 とならない。$\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j} \neq 0$ のとき、座標の順序を入れ換えて、$\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} \neq 0$ とする。逆写像定理から、この近傍で、$h : (x_1, x_2, \ldots, x_m) \longmapsto (f_1, x_2, \ldots, x_m)$ は、局所微分同相。$F \circ h^{-1}$ は第 1 番目の座標が、恒等写像で、$F(C - C_1) = (F \circ h^{-1})(h(C - C_1))$ である。

$$
\begin{aligned}
&F(C - C_1) \cap \{y_1\} \times \mathbf{R}^{n-1} \\
&= (F \circ h^{-1})(h(C - C_1)) \cap \{y_1\} \times \mathbf{R}^{n-1} \\
&= (F \circ h^{-1})(h(C - C_1) \cap \{x_1\} \times \mathbf{R}^{m-1}).
\end{aligned}
$$

ここで $h(C - C_1) \cap \{x_1\} \times \mathbf{R}^{m-1}$ が $F \circ h^{-1} | \{x_1\} \times \mathbf{R}^{m-1}$ の臨界点集合に含まれることがわかる。

従って、低い次元のユークリッド空間の間の写像 $\mathbf{R}^{m-1} \longrightarrow \mathbf{R}^{n-1}$ に対して、サードの定理が示されていれば、(5) から (6) が従う。

(7)　「$k \geqq 1$ のとき、$F(C_k - C_{k+1})$ は測度 0.」

$C_k - C_{k+1}$ の点 x の近傍で、偏微分 $\dfrac{\partial^{k+1} f_i}{\partial x_{s_1} \partial x_{s_2} \cdots \partial x_{s_{k+1}}}$ は 0 でないが、$w(x) = \dfrac{\partial^{k+1} f_i}{\partial x_{s_2} \cdots \partial x_{s_{k+1}}}$ は 0 である。座標の順序を入れ換えて、$s_1 = 1$ とする。逆写像定理から、この近傍で、$h : (x_1, x_2, \ldots, x_m) \longmapsto (w, x_2, \ldots, x_m)$ は局所微分同相。$h(C_k - C_{k+1}) \subset \{0\} \times \mathbf{R}^{m-1}$ であるが、$h(C_k - C_{k+1})$ は $F \circ h^{-1}$ を $\{0\} \times \mathbf{R}^{m-1}$ に制限した写像の臨界点の集合 (の C_k) に含まれる。

従って、低い次元のユークリッド空間からの写像 $\mathbf{R}^{m-1} \longrightarrow \mathbf{R}^n$ に対して、サードの定理が示されていれば、(7) が従う。

(8)　「$(k+1)n > m$ ならば、$F(C_k)$ は測度 0.」

k 階偏微分がすべて 0 の点 x_0 の近傍の点 x_1 では、

$$\|F(x_1) - F(x_0)\| \leqq K\|x_1 - x_0\|^{k+1}.$$

$[0,1]^m$ を M^m の立方体に等分すると，C_k と交わる小立方体は辺の長さが $(K\dfrac{1}{M})^{k+1}$ の M^m 個の立方体に含まれる。その体積 $K^{n(k+1)}\dfrac{M^m}{M^{n(k+1)}}$ は、$(k+1)n > m$ のとき、分割を細かくすれば 0 に収束する。

(9)　(3) により、帰納法 (6), (7) が成立している。

0.7　モース関数の存在

(1)　ユークリッド空間 $\mathbf{R}^n$ 上の関数 f を考える。$(a_1, \ldots, a_n)$ に対し、$L(x_1, \ldots, x_n) = \displaystyle\sum_i a_i x_i$ と置く。$f - L : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}$ を考えると、$f - L$ の臨界点 x は $T_x f = L$ となる x である。$f - L$ の臨界点 x におけるヘッセ行列は $(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j})$ である。$f - L$ が退化するヘッセ行列をもつことは、$T_x f = L$ となる x で行列 $(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j})$ が定義する線形写像が全射でないことである。行列 $(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j})$ は写像 $(x_1, \ldots, x_n) \longmapsto (\dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial f}{\partial x_n})$ のヤコビ行列だから、L は写像 $(x_1, \ldots, x_n) \longmapsto (\dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial f}{\partial x_n})$ の臨界値である。

サードの定理から、臨界値は測度０で、十分小さい L について、$f-L$ はモース関数となる。

(2)　モース関数に 2 階微分まで近い関数はモース関数である。

(3)　コンパクト多様体 M 上の任意の関数 F を考える。座標近傍による有限被覆 U_i を取り、$V_i \subset \overline{V_i} \subset U_i$ で、$\{V_i\}$ が M の被覆となるものをとる。また、V_i 上 1, $M-U_i$ 上 0 となる関数 μ_i を取る。

(3)-1　$F|U_1$ に対し、f_1 を $F|U_1$ を近似する U_1 上のモース関数とすると、$F_1=\mu_1 f_1+(1-\mu_1)F$ は V_1 上でモース関数。

(3)-2　$F_1|U_2$ に対し、f_2 を $F_1|U_2$ を近似する U_2 上のモース関数とすると、$F_2=\mu_2 f_2+(1-\mu_2)F_1$ は、V_2 上でモース関数だが、V_1 上でも F_1 を十分近似していればモース関数。

(3)-k　同様に、$F_{k-1}|U_k$ に対し、f_k を $F_{k-1}|U_k$ を近似する U_k 上のモース関数とすると、$\mu_k f_k+(1-\mu_{k-1})F_{k-1}$ は、V_k 上でモース関数だが、$V_1\cup\cdots\cup V_{k-1}$ 上でも F_{k-1} を十分近似していればモース関数。

0.8　モースの補題

$(0,\ldots,0)$ を f の臨界点、$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(0,\ldots,0)$ は非退化とする。線形変換で $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(0,\ldots,0)$ は対角化されているとする。(少なくとも $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(0,\ldots,0) \neq 0$ とする。)

前に復習の問題として出した表示 $f = x_1 g_1 + \cdots + x_n g_n$ について、$g_i(0,\ldots,0) = 0$ だから、$g_i = x_1 h_{i1} + \cdots + x_n h_{in}$ と書かれる。このとき、$h_{ii} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(0,\ldots,0) \neq 0.$

$f = \displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} h_{ij} x_i x_j$ について順に平方完成を行う。h_{ij} を $\dfrac{h_{ij}+h_{ji}}{2}$ におきかえて、$h_{ij}=h_{ji}$ としてよい。h_{11} は $(0,\ldots,0)$ の近傍で 0 でないから、

$$f = h_{11}(x_1 + \frac{h_{12}}{2h_{11}} x_2 + \cdots + \frac{h_{1n}}{2h_{11}} x_n)^2 + \sum_{i,j=2}^{n} h'_{ij} x_i x_j$$

と変形される。

$$y_1 = \sqrt{|h_{11}|}(x_1 + \frac{h_{12}}{2h_{11}} x_2 + \cdots + \frac{h_{1n}}{2h_{11}} x_n)$$

とおいて、$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \longmapsto (y_1, x_2, \ldots, x_n)$ はヤコビ行列式が $\sqrt{|h_{11}|}$ だから局所微分同相である。これで座標変換すると、

$$f = \mathrm{sign}(h_{11})y_1^2 + \sum_{i,j=2}^{n} h'_{ij}x_ix_j$$

と書かれる。但し、h'_{ij} は $(y_1, x_2, \ldots, x_n)$ の関数の形に書き換わっている。

引き続き、$\displaystyle\sum_{i,j=2}^{n} h'_{ij}x_ix_j$ について、$x_2, \ldots, x_n$ についての線形変換で $h'_{22}(0, \ldots, 0) \neq 0$ とする。$h'_{22}(0, \ldots, 0) \neq 0$ だから、平方完成を行って、

$$y_2 = \sqrt{|h'_{22}|}(x_2 + \frac{h'_{23}}{2h'_{22}}x_3 + \cdots + \frac{h'_{2n}}{2h'_{22}}x_n)$$

を使って座標変換すると、

$$f = \mathrm{sign}(h_{11})y_1^2 + \mathrm{sign}(h'_{22})y_2^2 + \sum_{i,j=3}^{n} h''_{ij}x_ix_j$$

となる。以下同様。

0.9　コンパクト多様体上の関数の空間

コンパクト多様体上のモース関数の存在を示すにあたって、座標近傍の有限被覆をとり、関数を一つ一つの座標近傍上で順に変形して、モース関数の持つべき性質が、一つ多くの座標近傍上で成立するようにしていった。この議論は、コンパクト多様体上の実数値関数全体の空間においてモース関数は、開かつ稠密な集合であることを述べている。こういう述べ方のためには、関数全体の空間の位相をきちんと定めておかなければならない。次のようにして位相を定める。

M を n 次元コンパクト多様体とし、$\{(U_i, \varphi_i = (x_1^{(i)}, \ldots, x_n^{(i)}))\}$ を有限座標近傍系とする。$V_i \subset \overline{V}_i \subset U_i$ で、$\{V_i\}$ は開被覆、$\overline{V}_i$ はコンパクトとなるものをとる。

$C^\infty(M)$ の C^r 位相を定めるためには、$\varepsilon > 0$ に対して、$\{V_i\}$ に依存して $f \in C^\infty(M)$ の ε 近傍 $N_\varepsilon(f, \{V_i\})$ を次のように定めればよい。

$$N_\varepsilon(f, \{V_i\}) = \{f + g \in C^\infty(M) \bigm| \forall s \leq r,\ \forall i,\ \|D^s((h \circ \varphi_i^{-1})|\varphi_i(\overline{V}_i))\| < \varepsilon\}$$

重要なことは、次の補題である。

補題 0.9.1　上述の $\{V_i\}$, 及び有限座標近傍系 $\{(U'_j, \varphi'_j = (y_1^{(j)}, \ldots, y_n^{(j)}))\}$ と $V'_j \subset \overline{V'}_j \subset U'_j$ に対して、$K > 0$ が存在し、$N_\varepsilon(f, \{V_i\}) \subset N_{K\varepsilon}(f, \{V'_j\})$ が成立する。

これにより、異なる有限座標近傍系を用いても定義される C^r 位相は等しくなる。

定義 0.9.2　コンパクト多様体 M 上の C^∞ 級関数の空間の C^r 位相とは、有限座標近傍系 $\{(U_i, \varphi_i = (x_1^{(i)}, \ldots, x_n^{(i)}))\}$ および $V_i \subset \overline{V}_i \subset U_i$ で、$\{V_i\}$ は開被覆、$\overline{V}_i$ はコンパクトとなるものに対し、$f \in C^\infty$ の近傍を $\varepsilon > 0$ に対し $N_\varepsilon(f, \{V_i\})$ により定めたものである。

証明　$g_{ij} = (\varphi_i {\varphi'_j}^{-1}) | \varphi'_j(U_i \cap U'_j)$ により、$(h \circ {\varphi'_j}^{-1}) = (h \circ {\varphi_i}^{-1}) \circ g_{ij}$ と書かれる。

$r = 0$ に対しては、$N_\varepsilon(f, \{V_i\})$, $N_{K\varepsilon}(f, \{V'_j\})$ は一致する。

$r = 1$ のときは、チェインルールにより、$D(h \circ {\varphi'_j}^{-1}) = D(h \circ {\varphi_i}^{-1}) \circ g_{ij} \cdot Dg_{ij}$ であり、$K = \max\limits_{i,j} \max\limits_{\mathbf{x} \in \varphi'_j(\overline{V}_i \cap \overline{V'}_j)} \|Dg_{ij}(\mathbf{x})\|$ とすると、$N_\varepsilon(f, \{V_i\}) \subset N_{K\varepsilon}(f, \{V'_j\})$ が成立する。ここで、i, j が有限個であることと、$\overline{V}_i \cap \overline{V'}_j$ がコンパクトであることを用いている。この K の定め方は、ノルム $\|Dg_{ij}(\mathbf{x})\|$ をオペレータノルムとして成立するが、異なるノルムをとっても K を定数倍すれば成立する。

$r = 2$ については、モース型臨界点の議論での計算

$$\frac{\partial^2 (f \circ \varphi_i^{-1})}{\partial x_\alpha^{(i)} \partial x_\beta^{(i)}} = \sum_{\gamma=1}^n \sum_{\delta=1}^n \frac{\partial^2 (f \circ \psi_j^{-1})}{\partial y_\gamma^{(j)} \partial y_\delta^{(j)}} \frac{\partial y_\gamma^{(j)}}{\partial x_\alpha^{(i)}} \frac{y_\delta^{(j)}}{\partial x_\beta^{(i)}} + \sum_{\gamma=1}^n \frac{\partial (f \circ \psi^{-1})}{\partial y_\gamma^{(j)}} \frac{\partial^2 y_\gamma^{(j)}}{\partial x_\alpha^{(i)} \partial x_\beta^{(i)}}$$

により、$\max\limits_{i,j} \max\limits_{\alpha,\gamma} \max\limits_{\mathbf{x} \in \varphi'_j(\overline{V}_i \cap \overline{V'}_j)} |\dfrac{y_\gamma^{(j)}}{\partial x_\alpha^{(i)}}(\mathbf{x})|$, $\max\limits_{i,j} \max\limits_{\alpha,\beta,\gamma} \max\limits_{\mathbf{x} \in \varphi'_j(\overline{V}_i \cap \overline{V'}_j)} |\dfrac{\partial^2 y_\gamma^{(j)}}{\partial x_\alpha^{(i)} \partial x_\beta^{(i)}}(\mathbf{x})|$ から定まる K が存在して $N_\varepsilon(f, \{V_i\}) \subset N_{K\varepsilon}(f, \{V'_j\})$ が成立する。

一般の s に対して、チェインルールのさらに微分をとると、

$\max\limits_{i,j} \max\limits_{\alpha,\gamma} \max\limits_{\mathbf{x} \in \varphi'_j(\overline{V}_i \cap \overline{V'}_j)} |\dfrac{y_\gamma^{(j)}}{\partial x_\alpha^{(i)}}(\mathbf{x})|, \ldots, \max\limits_{i,j} \max\limits_{\alpha_1,\ldots,\alpha_s,\gamma} \max\limits_{\mathbf{x} \in \varphi'_j(\overline{V}_i \cap \overline{V'}_j)} |\dfrac{\partial^s y_\gamma^{(j)}}{\partial x_{\alpha_1}^{(i)} \cdots \partial x_{\alpha_s}^{(i)}}(\mathbf{x})|$ から定まる K が存在して $N_\varepsilon(f, \{V_i\}) \subset N_{K\varepsilon}(f, \{V'_j\})$ が成立する。このよう

な合成写像の高次の微分を書き表す式はファー・ディ・ブルーノの公式と呼ばれている。 ■

注意 0.9.3　コンパクトとは限らない多様体 M に対して、$\overline{V}_i$ がコンパクトであるような開被覆 $\{V_i\}$ をとれば、$C^\infty(M)$ の位相を定めることができるが、この位相は、$\{V_i\}$ のとり方に依存する。

0.7 節では、コンパクト多様体 M に対して、モース関数の全体は $C^\infty(M)$ の C^2 位相で開かつ稠密であることを示したことになっている。