0.1　曲線の接ベクトル

ユークリッド空間の中の p 次元多様体 M 上の C^∞ 級曲線 $\Phi:(a,b)\longrightarrow M\subset\mathbf{R}^n$ を考える．Φ の $t_0\in(a,b)$ における接ベクトルは $\dfrac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}(t_0)$ であった。これは、$\mathbf{R}^n$ の $\mathbf{x}^0=\Phi(t_0)$ を基点とするベクトルと考えられた．$\mathbf{x}^0$ を基点とするベクトルで、M 上の曲線の接ベクトルとなり得るものは、$\mathbf{x}^0$ を基点とする p 次元の実ベクトル空間となっている。

定義**??**で与えられた n 次元多様体 M 上の曲線 $\Phi:(a,b)\longrightarrow M\subset\mathbf{R}^n$ が、C^∞ 級であることは**??**で定義した．点の運動と考えれば、その $t=t_0$ における速度ベクトルにあたる $t=t_0$ における接ベクトルを考えたい．

問題は、曲線は M 上に確かにあるので、接ベクトルもありそうだが，その居場所がない、あるいは、座標近傍をとらないと微分も出来ないから、居場所がばらばらであることである．つまり、$x_0=\Phi(t_0)$ のまわりの座標近傍を (U,φ) とする。$\varphi\circ\Phi$ が、t_0 の近傍で C^∞ 級である。$\dfrac{\mathrm{d}(\varphi\circ\Phi)}{\mathrm{d}t}(t_0)$ は、$\varphi(U)\subset\mathbf{R}^n$ の $\varphi(\Phi(t_0))$ を基点とする接ベクトルである．この接ベクトルは、座標近傍 (U,φ) を取り換えると、異なる点を基点とする異なるベクトルとなる．

曲線は、$x_0=\Phi(t_0)\in M$ を通るのだから，接ベクトルの居場所は、$x_0\in M$ によって定まるものであって欲しい。

曲線の接ベクトルの持つべき、最小限の性質は何かということを考えると、２つの x_0 を通る曲線の接ベクトルは同じかどうか、一方が他方の実数倍かどうかが、判定できることである．また、３つのベクトルの和が定義されそれが 0 かどうかわかることも必要であろう．

接ベクトルが、直接定義されていなくても、曲線の接ベクトルが同じかどうかわかるかという問題であるが，これは判定できる．すなわち、$\Phi_1:(a_1,b_1)\longrightarrow M$, $\Phi_2:(a_2,b_2)\longrightarrow M$, $\Phi_1(t_1)=\Phi_2(t_2)=x_0\in M$ とする。x_0 のまわりの座標近傍 (U,φ) をとると、$\dfrac{\mathrm{d}(\varphi\circ\Phi_1)}{\mathrm{d}t}(t_1)$, $\dfrac{\mathrm{d}(\varphi\circ\Phi_2)}{\mathrm{d}t}(t_2)$ は、$\varphi(x_0)\in\varphi(U)\subset\mathbf{R}^n$ を基点とする $\mathbf{R}^n$ のベクトルである．x_0 のまわりの別の座標近傍 (V,ψ) をとると、$\psi(x_0)\in\psi(V)\subset\mathbf{R}^n$ を基点とする $\mathbf{R}^n$ のベクトル $\dfrac{\mathrm{d}(\psi\circ\Phi_1)}{\mathrm{d}t}(t_1)$, $\dfrac{\mathrm{d}(\psi\circ\Phi_2)}{\mathrm{d}t}(t_2)$ を得る．ここで、$\dfrac{\mathrm{d}(\varphi\circ\Phi_1)}{\mathrm{d}t}(t_1)=\dfrac{\mathrm{d}(\varphi\circ\Phi_2)}{\mathrm{d}t}(t_2)$

ならば、$\dfrac{\mathrm{d}(\psi\circ\varPhi_1)}{\mathrm{d}\,t}(t_1)=\dfrac{\mathrm{d}(\psi\circ\varPhi_2)}{\mathrm{d}\,t}(t_2)$ である。実際、t_0 の近傍で、$\psi\circ\varPhi_i=(\psi\circ\varphi^{-1})\circ(\varphi\circ\varPhi_i)$, $(i=1,\,2)$ として、

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}(\psi\circ\varPhi_1)}{\mathrm{d}\,t}(t_1)&=D(\psi\circ\varphi^{-1})_{(\varphi(x_0))}\frac{\mathrm{d}(\psi\circ\varPhi_1)}{\mathrm{d}\,t}(t_1)\\&=D(\psi\circ\varphi^{-1})_{(\varphi(x_0))}\frac{\mathrm{d}(\psi\circ\varPhi_2)}{\mathrm{d}\,t}(t_2)=\frac{\mathrm{d}(\psi\circ\varPhi_2)}{\mathrm{d}\,t}(t_2)\end{aligned}$$

従って、２つの曲線が M の同じ点 x_0 を通るときの接ベクトルが同じかどうかを、局所座標を取って判定することとすると、同じかどうかの判定は出来ることになる．

ここで、考え方を逆転して、局所座標を取って判定したとき、同じ接ベクトルを持つ曲線の同値類を、接ベクトルと定めると、曲線の接ベクトルが M の点 x_0 におけるベクトルと考えられることになる．

定義 0.1.1（接ベクトル）　多様体の点 x_0 を通る C^∞ 級の曲線全体の集合

$$\mathcal{C}=\{\varPhi_i:(a_i,b_i)\longrightarrow M\;\big|\;\varPhi_i(t_i)=x_0\}_{i\in I}$$

を考える．点 x_0 のまわりの座標近傍 (U,φ) をとり、$\mathcal{C}$ の元の間の関係 $\sim$ を

$$\varPhi_1\sim\varPhi_2\iff\frac{\mathrm{d}(\varphi\circ\varPhi_1)}{\mathrm{d}\,t}(t_1)=\frac{\mathrm{d}(\varphi\circ\varPhi_2)}{\mathrm{d}\,t}(t_2)$$

により定義すると、これは同値関係となり、さらに同値関係は座標近傍 (U,φ) のとり方に依らない。この同値類を M の x_0 における接ベクトルと呼ぶ.

0. 2　接ベクトル空間

同値類の空間 $\mathcal{C}/\sim$ を考える。点 x_0 のまわりの座標近傍 (U,φ) をとると、写像

$$\begin{array}{ccc}\mathcal{C}&\longrightarrow&\mathbf{R}^n\\ \varPhi_i&\longmapsto&\dfrac{\mathrm{d}(\varphi\circ\varPhi_i)}{\mathrm{d}\,t}(t_i)\end{array}$$

は、同値類は値が等しいことで定めたので単射 $\varphi_*:\mathcal{C}/\sim\longrightarrow\mathbf{R}^n$ を定義する。これは、全射である．実際、$\mathbf{v}=(v_1,\ldots,v_n)$ に対し、$c^{\mathrm{v}}_{\varphi}(t)=\varphi^{-1}(t\mathbf{v}+\varphi(x_0))$

と置く。但し、$t \in (-\varepsilon_\varphi^{\mathbf{v}}, \varepsilon_\varphi^{\mathbf{v}})$ で定義され、この範囲で、$t\mathbf{v}+\varphi(x_0) \in \varphi(U)$ とする。このとき、$\varphi_*(c_\varphi^{\mathbf{v}}) = \dfrac{\mathrm{d}(t\mathbf{v}+\varphi(x_0))}{\mathrm{d}\,t}(0) = \mathbf{v}$ である。

点 x_0 のまわりの座標近傍 (U,φ) を用いて定義された全単射 $\varphi_* : \mathcal{C}/\sim \longrightarrow \mathbf{R}^n$ により、$\mathbf{R}^n$ の実ベクトル空間としての構造 (スカラー倍と和) を $\mathcal{C}/\sim$ に導入する。

$\mathcal{C}/\sim$ のベクトル空間としての構造 (スカラー倍と和) は、x_0 のまわりの別の座標近傍 (V,ψ) を用いて定義しても変わらない。これは、$\dfrac{\mathrm{d}(\psi\circ\Phi_i)}{\mathrm{d}\,t}(t_i) = D(\psi\circ\varphi^{-1})_{(\varphi(x_0))}\dfrac{\mathrm{d}(\varphi\circ\Phi_i)}{\mathrm{d}\,t}(t_i)$ から従う。実際に計算すると次のようになる. $\mathbf{v}_i \in \mathbf{R}^n$, $a_i \in \mathbf{R}$ $(i=1,2)$ とする。

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}(\psi\circ c_\varphi^{a_1\mathbf{v}_1+a_2\mathbf{v}_2})}{\mathrm{d}\,t}(0)\\
&= D(\psi\circ\varphi^{-1})_{(\varphi(x_0))}\frac{\mathrm{d}(t(a_1\mathbf{v}_1+a_2\mathbf{v}_2)+\varphi(x_0))}{\mathrm{d}\,t}(0)\\
&= D(\psi\circ\varphi^{-1})_{(\varphi(x_0))}(a_1\mathbf{v}_1+a_2\mathbf{v}_2)\\
&= a_1 D(\psi\circ\varphi^{-1})_{(\varphi(x_0))}\mathbf{v}_1 + a_2 D(\psi\circ\varphi^{-1})_{(\varphi(x_0))}\mathbf{v}_2\\
&= a_1\frac{\mathrm{d}(\psi\circ c_\varphi^{\mathbf{v}_1})}{\mathrm{d}\,t}(0) + a_2\frac{\mathrm{d}(\psi\circ c_\varphi^{\mathbf{v}_2})}{\mathrm{d}\,t}(0)
\end{aligned}
$$

定義 0.2.1　n 次元実ベクトル空間 $\mathcal{C}/\sim$ を $T_{x_0}M$ と書き、M の x_0 における接空間 (接ベクトル空間) とよぶ。

座標近傍 (U,φ) をとり、$\varphi(x) = (x_1(x),\ldots,x_n(x))$ とする。$\mathbf{e}_i = (0,\ldots,0,\overset{i}{1},0,\ldots,0)$ が、$T_{x_0}M$ の基底となる。後に述べる理由で、$[c_\varphi^{\mathbf{e}_i}] = \dfrac{\partial}{\partial x_i}$ と書く.

理由は一つは曲線は曲線に沿う（偏）微分を表していると考えてよいこと。

もう一つは、座標近傍 (V,ψ) をとり、$\psi(x) = (y_1(x),\ldots,y_n(x))$ とする。このとき、基底は $[c_\psi^{\mathbf{e}_i}] = \dfrac{\partial}{\partial y_i}$ と書かれる。

Φ が定める接ベクトルは、$\displaystyle\sum_{i=1}^n \frac{\mathrm{d}(x_i\circ\Phi)}{\mathrm{d}\,t}(t_0)\frac{\partial}{\partial x_i}, \sum_{i=1}^n \frac{\mathrm{d}(y_i\circ\Phi)}{\mathrm{d}\,t}(t_0)\frac{\partial}{\partial y_i}$ と書かれる。$\psi\circ\varphi^{-1}$ は座標で $(y_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,y_n(x_1,\ldots,x_n))$ と書かれ、そのヤコビ行列は $\left(\dfrac{\partial y_i}{\partial x_j}\right)_{i,j=1,\ldots,n}$ と書かれる。従って、

$$
\frac{\mathrm{d}(y_i\circ\Phi)}{\mathrm{d}\,t}(t_0) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial y_i}{\partial x_j}{}_{(\varphi(x_0))}\frac{\mathrm{d}(x_j\circ\Phi)}{\mathrm{d}\,t}(t_0)
$$

であるが、これを

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\mathrm{d}(y_i\circ\Phi)}{\mathrm{d}\,t}(t_0)\frac{\partial}{\partial y_i}=\sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial y_i}{\partial x_j}{}_{(\varphi(x_0))}\frac{\mathrm{d}(x_j\circ\Phi)}{\mathrm{d}\,t}(t_0)\Big)\frac{\partial}{\partial y_i}$$
$$=\sum_{j=1}^{n}\frac{\mathrm{d}(x_j\circ\Phi)}{\mathrm{d}\,t}(t_0)\frac{\partial}{\partial x_j}$$

と書いてみると、座標変換に伴う接ベクトルの変換は、$\dfrac{\partial}{\partial x_j}$ に $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial y_i}{\partial x_j}{}_{(\varphi(x_0))}\frac{\partial}{\partial y_i}$ を代入したものになっている。

0.3　接写像

C^∞ 級写像 $F : M \longrightarrow N$ が与えられているとする。$x \in M$ を通る曲線 $\Phi : (a,b) \longrightarrow M$ $(\Phi(t_0) = x)$ で表される接ベクトルに対し、$F(x) \in N$ を通る曲線 $F\circ\Phi : (a,b) \longrightarrow M$ $((F\circ\Phi)(t_0) = F(x))$ で表される接ベクトルを対応させることができる。

これは、写像 $F_* : T_xM \longrightarrow T_{F(x)}N$ を導く。この写像は線形写像である。実際、前と同じように $\mathbf{v}_i \in \mathbf{R}^n$, $a_i \in \mathbf{R}$ $(i = 1, 2)$ とする。

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}(\psi\circ F\circ c_\varphi^{a_1\mathbf{v}_1+a_2\mathbf{v}_2})}{\mathrm{d}\,t}(0)\\
&= D(\psi\circ F\circ\varphi^{-1})_{(\varphi(x_0))}\frac{\mathrm{d}(t(a_1\mathbf{v}_1+a_2\mathbf{v}_2)+\varphi(x_0))}{\mathrm{d}\,t}(0)\\
&= D(\psi\circ F\circ\varphi^{-1})_{(\varphi(x_0))}(a_1\mathbf{v}_1+a_2\mathbf{v}_2)\\
&= a_1D(\psi\circ F\circ\varphi^{-1})_{(\varphi(x_0))}\mathbf{v}_1+a_2D(\psi\circ F\circ\varphi^{-1})_{(\varphi(x_0))}\mathbf{v}_2\\
&= a_1\frac{\mathrm{d}(\psi\circ F\circ c_\varphi^{\mathbf{v}_1})}{\mathrm{d}\,t}(0)+a_2\frac{\mathrm{d}(\psi\circ F\circ c_\varphi^{\mathbf{v}_2})}{\mathrm{d}\,t}(0)
\end{aligned}$$

こうして定義された写像 F_* を F の x における接写像という。

接写像 F_* については、T_xF, D_xF, $(dF)_x$ 等様々な記法がある。F_* という書き方は、C^∞ 級写像

$$M_1 \xrightarrow{F_1} M_2 \xrightarrow{F_2} M_3$$

とその合成 $F_2\circ F_1 : M_1 \longrightarrow M_3$ に対して、

$$T_xM_1 \xrightarrow{(F_1)_*} T_{F_1(x)}M_2 \xrightarrow{(F_2)_*} T_{F_2(F_1(x))}M_3$$

と $(F_2 \circ F_1)_* : T_xM_1 \longrightarrow T_{(F_2\circ F_3)(x)}M_3$ が定義されるが、これが、共変性 $(F_2 \circ F_1)_* = (F_2)_*(F_1)_*$ を満たすときに、下付きの $*$ で誘導された写像を表すことによっている。

接写像 $F_* : T_xM \longrightarrow T_{F(x)}N$ は線形写像であるから、そのランクが定義される。ランクは、座標近傍をとって計算したヤコビ行列 $D(\psi\circ F\circ\varphi^{-1})_{(\varphi(x_0))}$ のランクである。$\psi\circ F\circ\varphi^{-1}$ はユークリッド空間の開集合の間の写像であるから、これに対して、逆写像定理、陰関数定理が成立する。

0.4　部分多様体

$M \subset N$ が n 次元多様体 N の（正則な）p 次元部分多様体であることを、ユークリッド空間の多様体と同じように定義する。近傍として座標近傍をとる。$p+q=n$ とする。次のように書かれる。

- 陰関数表示

  すべての $x^0 \in M$ に対し、ある座標近傍 (U,φ) をとると、U 上で定義された C^∞ 級関数 $F : U \longrightarrow \mathbf{R}^q$ で、$D(F\circ\varphi^{-1})$ のランクが q であるようなものがあって、$M\cap U = \{x\in U \mid F(x) = F(x^0)\}$ となる。

- パラメータ表示

  すべての $\mathbf{x}^0 \in M$ とその近傍 U に対し、U に含まれる座標近傍 (V,φ) をとると、p 次元ユークリッド空間の開集合 W 上で定義された V に値を持つ像への同相写像となる C^∞ 級単射 $\varPhi : W \longrightarrow V$ で, すべての $\mathbf{u}\in W$ に対し $D(\varphi\circ\varPhi)$ のランクは p であり、$M\cap V = \{\varPhi(\mathbf{u}) \mid \mathbf{u}\in W\}$ となる。

座標近傍のとり方に自由度があるので、これらは次と同値である。次が通常の部分多様体の定義である。

定義 0.4.1（部分多様体）　すべての $\mathbf{x}^0 \in M$ に対し、ある座標近傍 (U,φ) をとると、$\varphi(x) = (x_1,\dots,x_n)$ とするとき、

$$M\cap U = \{\mathbf{x}\in U \mid x_{p+1} = \cdots = x_n = 0\}$$

となる。

これを見ると、多様体 N の定義は座標近傍系 $\{(U_i,\varphi_i)\}_{i\in I}$ で与えられていたはずで、そのなかにこのような座標近傍 (U,φ) が入っているかどうかわからないという疑問が湧くであろう。それはまったく正当である。そこで、次のような定義をおく。

C^∞ 級多様体 N が、座標近傍系 $\{(U_i,\varphi_i)\}_{i\in I}$ で与えられているとき、N の開集合と $\mathbf{R}^n$ の中への同相写像 (U,φ) $(U\subset N,\ \varphi: U\longrightarrow\varphi(U)\subset\mathbf{R}^n)$ が、$\{(U_i,\varphi_i)\}_{i\in I}$ と両立するとは、$\{(U_i,\varphi_i)\}_{i\in I}\cup\{(U,\varphi)\}$ が、座標近傍系となることである。（特に座標変換が、C^∞ 級となることが重要である。）

この考えをもう少しひろげると、次の定義を得る。N の 2 つの座標近傍系 $\{(U_i,\varphi_i)\}_{i\in I}$，$\{(U'_i,\varphi'_j)\}_{J\in J}$ が同値とは、その和集合 $\{(U_i,\varphi_i)\}_{i\in I}\cup\{(U'_i,\varphi'_j)\}_{J\in J}$ が、座標近傍系となることである。（一方の各元がもう一方の座標近傍系と両立することである。）$F: N\longrightarrow N$ が微分同相写像であることは、$\{(U_i,\varphi_i)\}_{i\in I}$ と $\{(F^{-1}(U_i),\varphi_i\circ F)\}_{i\in I}$ が同値であることである。

このような同値類を、N の C^∞ 構造と呼ぶが、ここでは、考えている座標近傍系 $\{(U_i,\varphi_i)\}_{i\in I}$ と両立する (U,φ) は全て座標近傍と呼ぶことにする。

C^∞ 級多様体とは、N の開集合と $\mathbf{R}^n$ の中への同相写像 (U,φ) が座標近傍であるかどうか判定できる空間のことである。

このような座標近傍の自由度があると、C^∞ 級写像 $F: M\longrightarrow N$ に対し、接写像 $F_*: T_{x_0}M\longrightarrow T_{F(x_0)}N$ のランクが $\min\{m,n\}$ であるとき、次のような x_0 の座標近傍 (U,φ), $F(x_0)$ の座標近傍 (V,ψ) が存在する。$\varphi=(x_1,\dots,x_m)$, $\psi=(y_1,\dots,y_n)$ として、

$$m\leqq n \text{ ならば、}\qquad (y_i\circ F\circ\varphi^{-1})(x_1,\dots,x_m)=\begin{cases}x_i & (i=1,\dots,m)\\ 0 & (i=m+1,\dots,n)\end{cases}$$

$$m\geqq n \text{ ならば、}\qquad (y_i\circ F\circ\varphi^{-1})(x_1,\dots,x_m)=x_i\ (i=1,\dots,m)$$

とくに、$m\geqq n$ のとき、

$$F^{-1}(F(x_0))\cap U=\{x\in U\mid x_{m+1}(x)=\cdots=x_n(x)=0\}$$

であり、F の逆像は $m-n$ 次元部分多様体となる。

多様体 M, N の次元を m, n とし、$m<n$ とする。$F: M\longrightarrow N$ について、接写像 $F_*: T_xM\longrightarrow T_{F(x)}N$ のランクが全ての $x\in M$ に対して、

$m = \dim M$ であるとする。このような F は immersion (はめ込み) と呼ばれる。

immersion F は単射とは限らない。immersion F が単射であっても、$F(M) \subset N$ が（正則な）部分多様体とは限らない。F により、N の位相から M に誘導される位相が、M の位相と一致するときに、$F(M)$ は（正則な）部分多様体となる。このような F は embedding (埋め込み) と呼ばれる。

定理 0.4.2　$F : M \longrightarrow N$ が単射である immersion とする。M がコンパクトとすると $F(M) \subset N$ は N の部分多様体である。

多様体 M, N の次元を m, n とし、$m \geq n$ とする。$F : M \longrightarrow N$ の接写像 $F_* : T_xM \longrightarrow T_{F(x)}N$ のランクが全ての $x \in M$ に対して、$n = \dim N$ であるとする。このような F は submersion (沈め込み) と呼ばれる。このとき、$F^{-1}(y)$ は M の $m - n$ 次元部分多様体である。

M をコンパクト、N は連結とする。F が submersion であるとすると F は全射である。このとき $F^{-1}(y)$ は空集合ではない $m - n$ 次元部分多様体であるが、さらに、y に依らず、微分同相であることが将来示される。

【問題 0.4.3】　$F : N_1 \longrightarrow N_2$ を多様体の間の C^∞ 級写像とする。$M_1 \subset N_1$, $M_2 \subset N_2$ を部分多様体とする。$F(M_1) \subset M_2$ とすると、F を $M_1 \longrightarrow M_2$ と考えた写像 $G : M_1 \longrightarrow M_2$ も C^∞ 級写像となることを示せ。

【解】　$F|M_1 = F \circ i_{M_1}$ は C^∞ 級写像である。M_2 が部分多様体であるから、$F(x_0) \in M_2 \subset N_2$ の座標近傍 (V, ψ) で、$\psi = (y_1, \ldots, y_{m_2})$ とするとき、$y_{n_2+1} = \cdots = y_{m_2} = 0$ となる。従って、$(y_1, \ldots, y_{n_2}) \circ F \circ \varphi^{-1}$ は C^∞ 級写像である。よって $G : M_1 \longrightarrow M_2$ も C^∞ 級写像となる。

【問題 0.4.4】　(1) $GL(n; \mathbf{R})$ は、n^2 次元 C^∞ 級多様体であることを示せ。$SL(n; \mathbf{R})$ は、$GL(n; \mathbf{R})$ の $n^2 - 1$ 次元 C^∞ 級部分多様体であることを示せ。ヒント：陰関数定理。det の微分が $\det = 1$ の点で 0 でないことを、行列式の行あるいは列による展開を用いて示す。

(2) 行列の積 $GL(n; \mathbf{R}) \times GL(n; \mathbf{R}) \longrightarrow GL(n; \mathbf{R})$, 逆行列をとる操作 $GL(n; \mathbf{R}) \longrightarrow GL(n; \mathbf{R})$ は、C^∞ 級の写像であることを確認し、$SL(n; \mathbf{R})$ に対しても、それぞれの操作が C^∞ 級であることを示せ。

【解】 $n\times n$ 実行列の全体 $M_n(\mathbf{R})$ は $\mathbf{R}^{n^2}$ と同一視され、n^2 次元ユークリッド空間として n^2 次元 C^∞ 級多様体である。$GL(n;\mathbf{R}) = \{A \in M_n(\mathbf{R}) \mid \det A \neq 0\}$ det という $M_n(\mathbf{R})$ 上で定義された連続関数（多項式）が 0 ではない A の全体であるから、$M_n(\mathbf{R})$ の開集合で、これはその開集合を座標近傍にとることにより、n^2 次元 C^∞ 級多様体である。

$SL(n;\mathbf{R}) = \{A \in GL(n;\mathbf{R}) \mid \det A = 1\}$ は $\det : GL(n;\mathbf{R}) \longrightarrow \mathbf{R}$ の 1 の逆像である。$A = (x_{ij})$ の行列式は、i 行による展開 $\det(x_{ij}) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_{ij}A_{ij}$ をもつ。ここで A_{ij} は x_{ij} の余因子である。(A_{ij} は A の第 i 行、第 j 列を除いた $(n-1)\times(n-1)$ 行列の行列式に $(-1)^{i+j}$ を掛けたものである。) 従って、$\dfrac{\partial \det}{\partial x_{ij}} = A_{ij}$ である。さて、det のヤコビ行列は A_{ij} を並べたものになるが、このヤコビ行列は $SL(n;\mathbf{R})$ 上で 0 ではない。実際、すべての A_{ij} が 0 とすると、i 行による展開の式から $\det A = 0$ となるからである。

行列の積 $GL(n;\mathbf{R}) \times GL(n;\mathbf{R}) \longrightarrow GL(n;\mathbf{R})$ は $\mathbf{R}^{n^2}$ の開集合としてとった座標で、双１次形式にかかれるから C^∞ 級である。行列の逆 $GL(n;\mathbf{R}) \longrightarrow GL(n;\mathbf{R})$ は、余因子行列の転置行列を行列式で割ったものであるが、これは分母が 0 にならない分数式であるから C^∞ 級である。

【問題 0.4.5】 $O(n) = \{A \mid A \in M(n;\mathbf{R})$ ($n\times n$ 実行列), ${}^tAA = I$ (単位行列)$\}$ は、$\dfrac{n(n-1)}{2}$ 次元 C^∞ 級多様体であることを示せ。
ヒント：陰関数定理。 $A \longmapsto {}^tAA$ の A における微分が線形写像 $X \longmapsto {}^tXA + {}^tAX$ となること、この線形写像は、$X \longmapsto {}^tAX$, $Y \longmapsto {}^tY + Y$ を結合したもので、ランクがわかる。($U(n)$ についても同様。)

【解】 $A \longmapsto {}^tAA$ で定義される写像 $C : M(n;\mathbf{R}) \longrightarrow M(n;\mathbf{R})$ を考える。$M(n;\mathbf{R})$ は $\mathbf{R}^{n^2}$ と同一視できる。$X \in M(n;\mathbf{R})$ について、

$$C(A+X) - C(A) = {}^t(A+X)(A+X) - {}^tAA = {}^tXA + {}^tAX + {}^tXX$$

で ${}^tXX$ は X の成分に関する 2 次式を成分としているから、$DC_{(A)}X = {}^tXA + {}^tAX$ である。さて、${}^tAA = I$ だから $\det {}^tA \det A = (\det A)^2 = 1$ で、特に $A, {}^tA$ は正則である。従って、$X \longmapsto {}^tAX$ のランクは n^2 である。一方 $Y \longmapsto {}^tY + Y$ はランクが $\dfrac{n(n+1)}{2}$ の線形写像である。従って、これらの線形写像の合成 $X \longmapsto {}^tXA + {}^tAX$ のランクは $\dfrac{n(n+1)}{2}$ である。従って、

I の逆像 $O(n)$ は $\dfrac{n(n-1)}{2}$ 次元 C^∞ 級多様体である。

注意 0.4.6 (1) $O(n)$ は $\det = \pm 1$ となる 2 つの連結成分からなる。$\det = +1$ の成分が $SO(n)$ である。

(2) $U(n) = \{A \mid A \in M(n; \mathbf{C})\ (n \times n \text{ 複素行列}), A^*A = I\}$ が実 n^2 次元多様体となることも同様に示される。

【問題 0.4.7】 C^∞ 級多様体 X の部分多様体 Y, Z が横断的に交わるとは, すべての $x \in Y \cap Z$ について $T_xY + T_xZ = T_xX$ が成立することである。

X のコンパクト部分多様体 Y, Z が横断的に交わるとき, $Y \cap Z$ も X のコンパクト部分多様体になることを示せ.

ヒント：$x_0 \in Y \cap Z$ の近傍 U には、コンパクト部分多様体 Y, Z を定義する C^∞ 級写像 $U \longrightarrow \mathbf{R}^{\dim X - \dim Y}$, $U \longrightarrow \mathbf{R}^{\dim X - \dim Z}$ がある。

【解】 $x_0 \in Y \cap Z$ の座標近傍 (U, φ) を取り、U 上でコンパクト部分多様体 Y, Z を定義する C^∞ 級写像 $F_Y : U \longrightarrow \mathbf{R}^{\dim X - \dim Y}$, $F_Z : U \longrightarrow \mathbf{R}^{\dim X - \dim Z}$ をとる。$U \cap Y = {F_Y}^{-1}(F_Y(x_0))$, $U \cap Z = {F_Z}^{-1}(F_Z(x_0))$, $F_{Y*} : T_xX \longrightarrow \mathbf{R}^{\dim X - \dim Y}$ のランクは $\dim X - \dim Y$, $F_{Z*} : T_xX \longrightarrow \mathbf{R}^{\dim X - \dim Z}$ のランクは $\dim X - \dim Z$ である。$(F_Y, F_Z) : U \longrightarrow \mathbf{R}^{\dim X - \dim Y} \times \mathbf{R}^{\dim X - \dim Z}$ を考える。$T_xY + T_xZ = T_xX$ であるが、$T_xY = (T_xY \cap T_xZ) \oplus V_Y$, $T_xZ = (T_xY \cap T_xZ) \oplus V_Z$ となるような部分ベクトル空間 V_Y, V_Z をとると、$F_{Y*}|V_Y \longrightarrow \mathbf{R}^{\dim X - \dim Y}$, $F_{Z*}|V_Z \longrightarrow \mathbf{R}^{\dim X - \dim Z}$ は同型写像である。このとき、$(F_Y, F_Z)_*|(V_Y \oplus V_Z) \longrightarrow \mathbf{R}^{\dim X - \dim Y} \oplus \mathbf{R}^{\dim X - \dim Z}$ は同型写像であるから、$(F_Y, F_Z)_* : T_xX \longrightarrow \mathbf{R}^{\dim X - \dim Y} \oplus \mathbf{R}^{\dim X - \dim Z}$ のランクは $2\dim X - \dim Y - \dim Z$ である。従って、$U \cap (Y \cap Z) = (F_Y, F_Z)^{-1}(F_Y(x_0), F_Z(x_0))$ は、$\dim Y + \dim Z - \dim X$ 次元部分多様体となる。

0.5 接束

多様体 M の点 x における接ベクトル空間 T_xM を全ての点 x にわたって disjoint union をとった集合を考える。この集合に自然な位相を考え、$2n$ 次

元の多様体とすることができる。

もしも多様体 M がユークリッド空間 $\mathbf{R}^N$ 内の p 次元多様体であるとすると、$\mathbf{x}^0 \in M$ における接空間 $T_{\mathbf{x}^0}M$ は $\mathbf{x}^0$ を基点とする $\mathbf{R}^N$ の p 次元部分空間である。これらの和を単純にとると、これは disjoint union とならないことも多いが、$\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N$ の中の、$\{\mathbf{x}^0\} \times T_{\mathbf{x}^0}M$ については和をとることができる。すなわち、

$$\{(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \in \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N \mid \mathbf{x} \in M, \mathbf{v} \in T_{\mathbf{x}}M\}$$

はユークリッド空間の中の $2p$ 次元多様体となる。

一般の多様体に対してもこのような多様体を定義することが出来る。

M の座標近傍系 $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i\in I}$ をとり、$V_i = \varphi_{U_i}$, $V_{ij} = \varphi_j(U_i \cap U_j)$, $g_{ij} = \varphi_i \circ (\varphi_j|U_i \cap U_j)^{-1} : V_{ij} \longrightarrow V_{ji}$ とする。$\bigsqcup_{i\in I} V_i$ において、

$$V_{ji} \ni x_i \sim x_j \in V_{ij} \Longleftrightarrow x_i = g_{ij}(x_j)$$

と定義すると, $\sim$ は同値関係であり、$X = (\bigsqcup_{i\in I} V_i)/\sim$ は M と微分同相な多様体となることを示した。

さらに、disjoint union $\bigsqcup_{i\in I}(V_i \times \mathbf{R}^n)$ を考えて、その上の、関係 $\sim$ を

$$V_{ji} \times \mathbf{R}^n \ni (x_i, v_i) \sim (x_j, v_j) \in V_{ij} \times \mathbf{R}^n \Longleftrightarrow x_i = g_{ij}(x_j), v_i = Dg_{ij(x)}v_j$$

と定義する。

写像 $G_{ij} : V_{ji} \times \mathbf{R}^n \longrightarrow V_{ij} \times \mathbf{R}^n$ を $G_{ij}(x_j, v_j) = (g_{ij}(x_j), Dg_{ij(x_j)}v_j)$ で定義すると、これは微分同相写像であり、$G_{ii} = \mathrm{id}_{V_i \times \mathbf{R}^n}$ とすると、$G_{ij}G_{jk} = G_{ik}$ を満たす。従って、$\bigsqcup_{i\in I}(V_i \times \mathbf{R}^n)$ 上の関係 $\sim$ は同値関係であり、
$Y = \bigsqcup_{i\in I}(V_i \times \mathbf{R}^n)/\sim$ がハウスドルフであれば、$2n$ 次元多様体となる。

さて、$\bigsqcup_{i\in I}(V_i \times \mathbf{R}^n) \longrightarrow \bigsqcup_{i\in I} V_i$ を第１成分への射影を集めた写像とする。これは同値類を同値類に写すので、写像 $P : Y \longrightarrow X$ が定義される。この写像は、連続な全射である。実際、連続性は開集合 $W \in X$ に対して、

$$p_Y^{-1}(P^{-1}(W)) = \mathrm{pr}_1{}^{-1}(p_X^{-1}(W)) = p_X^{-1}(W) \times \mathbf{R}^n$$

は $\bigsqcup_{i\in I}(V_i\times\mathbf{R}^n)$ の開集合である。

さて、$p_X|V_i : V_i \longrightarrow p_X(V_i)$, $p_Y|(V_i\times\mathbf{R}^n) : V_i\times\mathbf{R}^n \longrightarrow p_X(V_i\times\mathbf{R}^n)$ は同相写像であり、$h_i : P^{-1}(p_X(V_i)) \longrightarrow p_X(V_i)\times\mathbf{R}^n$ という同相写像で、$\mathrm{pr}_1\circ h_i = P$ が満たされる。このとき $\mathbf{R}^n$, X がハウスドルフであることから Y がハウスドルフであることがわかる。

こうして定義された多様体 Y は M の接束と呼ばれ、TM とかかれる。$P : Y \longrightarrow X$ から、射影 $p : TM \longrightarrow M$ が定義される。

注意 0.5.1　上の TM の構成で、$G_{ij} : V_{ij}\times\mathbf{R}^n \longrightarrow V_{ji}\times\mathbf{R}^n$ が、$G_{ij}G_{jk} = G_{ik}$ を満たすことが鍵となっている。この関係式は、$G_{ij}(x_j, v_j) = (g_{ij}(x_j), Dg_{ij\,(x_j)}v_j)$ の $Dg_{ij\,(x_j)} \in GL(n;\mathbf{R})$ が, チェインルールにより $Dg_{ij\,(x_j)}Dg_{jk\,(x_k)} = Dg_{ik\,(x_k)}$ を満たすことにより保証されている。一般に、$G_{ij}(x_j, v_j) = (g_{ij}(x_j), A_{ij\,(x_j)}v_j)$ として、$A_{ij\,(x_j)} \in GL(m,\mathbf{R})$ が、$A_{ij\,(x_j)}A_{jk\,(x_k)} = A_{ik\,(x_k)}$ を満たしていれば、$Z = \bigsqcup_{i\in I}(V_i\times\mathbf{R}^m)/\sim$ は $n+m$ 次元多様体になり、$P : Z \longrightarrow X$ が定義される。このような Z はベクトル束と呼ばれる。

【問題 0.5.2】　位相空間 E, B の間に連続写像 $p : E \longrightarrow B$ があって、次の条件を満たすとする。ある位相空間 F があって、B の各点 b に対し、b の開近傍 U_b を選べば、同相写像 $h : p^{-1}(U_b) \longrightarrow U_b\times F$ で、$\mathrm{pr}_1\circ h = p$ を満たすものが存在する。ここで pr_1 は第 1 成分への射影 $U_b\times F \longrightarrow U_b$ である。
B, F がハウスドルフ空間であると仮定すると、E もハウスドルフ空間となることを示せ。

【解】　$x_1, x_2 \in E$ に対し、$p(x_1) \neq p(x_2)$ とすると、B はハウスドルフ空間だから、開集合 U_1, U_2 で、$p(x_1) \in U_1$, $p(x_2) \in U_2$, $U_1\cap U_2 = \emptyset$ となるものがある。p は連続写像だから、$p^{-1}(U_1)$, $p^{-1}(U_2)$ は E の開集合で、$x_1 \in p^{-1}(U_1)$, $x_2 \in p^{-1}(U_2)$, $p^{-1}(U_1)\cap p^{-1}(U_2) = \emptyset$ となる。

x_1, $x_2 \in E$ に対し、$p(x_1) = p(x_2) = b$ とすると、仮定により与えられる開近傍 U_b を選べば、同相写像 $h : p^{-1}(U_b) \longrightarrow U_b\times F$ で、$\mathrm{pr}_1\circ h = p$ を満たすものがある。$x_1 \neq x_2$ であるから、$\mathrm{pr}_2(h(x_1)) \neq \mathrm{pr}_2(h(x_2)) \in F$ である。F はハウスドルフだから、F の開集合 V_1, V_2 で、$\mathrm{pr}_2(h(x_1)) \in V_1$, $\mathrm{pr}_2(h(x_2)) \in V_2$, $V_1\cap V_2 =$ となるものがとれる。

$h^{-1}(U_b \times V_1)$, $h^{-1}(U_b \times V_2)$ は、E の開集合であり、$x_1 \in h^{-1}(U_b \times V_1)$, $x_2 \in h^{-1}(U_b \times V_2)$, $h^{-1}(U_b \times V_1) \cap h^{-1}(U_b \times V_2) = \emptyset$ を満たす。

【問題 0.5.3】 多様体 M, N の間の C^∞ 級写像 $F : M \longrightarrow N$ が引きおこすそれらの接束の間の写像 $F_* : TM \longrightarrow TN$ は C^∞ 級であることを示せ。

【解】 M, N の座標近傍系 $\{(U_i, \varphi_i)\}$, $\{(V_j, \psi_j)\}$ をとると、TM, TN はそれぞれ $\bigsqcup \varphi_i(U_i) \times \mathbf{R}^m$, $\bigsqcup \psi_j(V_j) \times \mathbf{R}^n$ の商空間として定義され、座標近傍系は、$\varphi_i(U_i) \times \mathbf{R}^m$, $\psi_i(V_i) \times \mathbf{R}^n$ の像および像からの逆写像として定義される。従って、$\varphi_i(U_i \cap F^{-1}(V_j)) \times \mathbf{R}^m \longrightarrow \psi_i(V_i) \times \mathbf{R}^n$ 引き起こされる写像 $(u_i, v_i) \longmapsto (\psi_j \circ F \circ {\varphi_i}^{-1}(u_i), D(\psi_j \circ F \circ {\varphi_i}^{-1})_{(u_i)} v_i)$ が C^∞ 級だから、$F_* : TM \longrightarrow TN$ は C^∞ 級である。

【問題 0.5.4】 ユークリッド空間 $\mathbf{R}^N$ の中の多様体 M に対して、TM と $X = \{(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \in \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N \mid \mathbf{x} \in M, \mathbf{v} \in T_{\mathbf{x}}M\}$ は微分同相であることを示せ。

【解】 まず、X は $\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N$ 多様体である。$\mathbf{x}_0 \in M$ に対して、$\mathbf{x}_0$ の近傍 U 上でグラフ表示が与えられているとする。すなわち、$\mathbf{R}^N$ の座標を並べ替えて、$\mathbf{x}_0 = (\mathbf{x}_1^0, \mathbf{x}_2^0) \in \mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^{N-p}$ とし、$\mathbf{x}_1^0$ の近傍 W 上で定義された写像 $g : W \longrightarrow \mathbf{R}^{N-p}$ により、$M \cap U = \{(\mathbf{x}_1, g(\mathbf{x}_1)) \mid \mathbf{x}_1 \in W\}$ と書かれているとする。このとき、$\mathbf{v} \in T_{(\mathbf{x}_1, g(\mathbf{x}_1))}M$ とは $\mathbf{v} = (\mathbf{v}_1, Dg_{(\mathbf{x}_1)}\mathbf{v}_1)$ と書かれる事である。従って、$(\mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0)$ の近傍 $U \times \mathbf{R}^N$ に対し、$X \cap (U \times \mathbf{R}^N) = \{((\mathbf{x}_1, g(\mathbf{x}_1)), (\mathbf{v}_1, Dg_{(\mathbf{x}_1)}\mathbf{v}_1)) \mid (\mathbf{x}_1, \mathbf{v}_1) \in W \times \mathbf{R}^p\}$ と書かれ、これが、X のグラフ表示を与える。

TM は、M のパラメータ表示 $\Phi_i : W_i \longrightarrow \mathbf{R}^N$ による被覆 $\{\Phi_i(W_i)\}$ について、$(\Phi_i(W_i), {\Phi_i}^{-1})$ を座標金傍系として、$\bigsqcup W_i \times \mathbf{R}^p$ の商空間として定義されている。$W_i \times \mathbf{R}^p \longrightarrow \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N$ を $(u, v) \longmapsto (\Phi_i(u), D\Phi_{i(u)}v)$ によって定めれば、これが TM からの連続写像となることがわかる。この $TM \longrightarrow X$ の逆写像は、X のグラフ表示をひとつのパラメータ表示と見ることで与えられ、TM の定義から逆写像も連続である。これの写像が C^∞ 級となることも X のグラフ表示による座標近傍上で恒等写像となることからわかるので、微分同相である。