6

多様体上のベクトル場

6.1　多様体の部分集合の比較

多様体の部分集合 A_0, A_1 が本質的に同じであることをどのように言い表せばよいであろうか？

ユークリッド空間の２つの部分集合 A_0, A_1 に対しては、一方を他方に、回転と平行移動の合成で写すことができれば、それらは合同と呼ばれる。相似変換で写りあうものを相似な図形と呼ぶ。

多様体においては、多様体の微分同相写像で写りあうものを同じものと考えるのが適当である。すなわち、微分同相写像 $F : M \longrightarrow M$ によって、$F(A_0) = A_1$ となるときには、多様体 M の部分集合としての、A_0 の性質と A_1 の性質はまったく差がないと考えられる。

さらに、徐々に写すあるいは連続的に移動して写すということを考えると、次のようなことが考えられる。

$F_t : M \longrightarrow M$ という t に対して連続的に変化する微分同相写像によって、$F_0 = \mathrm{id}_M$ で $F_0(A_0) = A_0$ であり、$F_1(A_0) = A_1$ となる。このとき、$A_t = F_t(A_0)$ は A_0 から連続的に変化する A_0 と同じ性質を持つ部分集合である。従って、t に対して連続的に変化する微分同相写像 $F_t : M \longrightarrow M$ を考えることが重要であろう。

$F_t : M \longrightarrow M$ が t に対して連続的ということを、$F : [0,1] \times M \longrightarrow M$ という C^∞ 級写像があって、$F_t(x) = F(t,x)$ となっていることと定義する。$F : [0,1] \times M \longrightarrow M$ という C^∞ 級写像とは、$\mathbf{R} \times M \longrightarrow M$ という C^∞ 写

像の $[0,1]\times M$ への制限のことである。

t に対して連続的に変化する微分同相写像 $F_t : M \longrightarrow M$ $(t \in [0,1])$ で、$F_0 = \mathrm{id}_M$ をみたすものをアイソトピーと呼ぶ。

上の C^∞ 級写像 $F : \mathbf{R}\times M \longrightarrow M$ について、$\mathbf{R}\times M$ の点 (t_0, x_0) を固定すると、$F_t(x_0)$ は $F_{t_0}(x_0)$ を通る曲線だから、$T_{F_{t_0}(x_0)}M$ の接ベクトルを定める。F_{t_0} は微分同相写像だから、任意の点 $y_0 \in M$ に対し、$x_0 = {F_{t_0}}^{-1}(y_0)$ をとれば、$T_{y_0}M$ の接ベクトルが定まる。

このような $X_t = \dfrac{\partial F_t}{\partial t}\circ {F_t}^{-1}$ は、多様体の各点 y_0 に対し、$T_{y_0}M$ の元を対応させるものである。さらに、y_0 のまわりの局所座標 (U,φ), $\varphi = (x_1,\dots,x_n)$ をとると、$X_t = \sum \xi_i(t,x_1,\dots,x_n)\dfrac{\partial}{\partial x_i}$ は次のように表される。

$$
\begin{aligned}
&(\varphi\circ(F_t\circ {F_{t_0}}^{-1})\circ\varphi^{-1})(x_1,\dots,x_n)\\
&=(f_1(t,t_0,x_1,\dots,x_n),\dots,f_n(t,t_0,x_1,\dots,x_n))
\end{aligned}
$$

として、$f_i(t,t_0,x_1,\dots,x_n)$ は、$(t,t_0,x_1,\dots,x_n)$ について C^∞ 級関数であり、

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n}\xi_i(t,f_1(t,t_0,x_1,\dots,x_n),\dots,f_n(t,t_0,x_1,\dots,x_n))\frac{\partial}{\partial x_i}\\
&=\sum_{i=1}^{n}\frac{\mathrm{d}\,f_i}{\mathrm{d}\,t}(t,t_0,x_1,\dots,x_n)\frac{\partial}{\partial x_i}
\end{aligned}
$$

である。これは、$(t_0,\varphi(y_0))$ の近傍 $(\subset \mathbf{R}\times\varphi(U))$ 上の $\mathbf{R}^n$ に値を持つ C^∞ 級の写像である。接束 TM の座標近傍のとり方から、(t_0,y_0) の近傍において、$X(t,y)=X_t(y)$ により定められる写像 $X:\mathbf{R}\times M\longrightarrow TM$ は C^∞ 級写像となる。

各 t に対し、$X_t : M\longrightarrow TM$ は $p\circ X_t = \mathrm{id}_M$ となるような C^∞ 級写像であるこの性質 $p\circ X = \mathrm{id}_M$ を持つ C^∞ 級写像 $X : M\longrightarrow TM$ を M 上の C^∞ 級ベクトル場と呼ぶ。X_t が t に依存しているときには時刻に依存する C^∞ 級ベクトル場と呼ぶ。

X_t から見ると、F_t は $\dfrac{\mathrm{d}\,F_t}{\mathrm{d}\,t} = X_t\circ F_t$, $F_0 = \mathrm{id}_M$ を満たしている。

局所座標で書くと、$F_t\circ {F_{t_0}}^{-1}$ の表示を見ると、

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\begin{pmatrix} f_1(t,t_0,x_1,\dots,x_n) \\ \vdots \\ f_n(t,t_0,x_1,\dots,x_n) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \xi_1(t,f_1(t,t_0,x_1,\dots,x_n),\dots,f_n(t,t_0,x_1,\dots,x_n)) \\ \vdots \\ \xi_n(t,f_1(t,t_0,x_1,\dots,x_n),\dots,f_n(t,t_0,x_1,\dots,x_n)) \end{pmatrix}$$

但し、$\begin{pmatrix} f_1(t_0,t_0,x_1,\dots,x_n) \\ \vdots \\ f_n(t_0,t_0,x_1,\dots,x_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ であり、$\begin{pmatrix} f_1(t,t_0,x_1,\dots,x_n) \\ \vdots \\ f_n(t,t_0,x_1,\dots,x_n) \end{pmatrix}$ は $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ を $t=t_0$ における初期値とする正規形の常微分方程式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1(t,x_1,\dots,x_n) \\ \vdots \\ \xi_n(t,x_1,\dots,x_n) \end{pmatrix}$$

の解となっている。

6.2　フ　ロ　ー

アイソトピーの特別な場合として、$F_t : M \longrightarrow M$ が $\mathbf{R}$ の M 上への作用を定義している場合が考えられる。すなわち、$F_s \circ F_t = F_{s+t}$ となる場合である。この $\mathbf{R}$ の作用をフロー (流れ) とよぶ。このとき、$F_t(x_0) = F_{t-t_0}(F_{t_0}(x_0))$ である。従って、$X_{t_0}(y_0) = \dfrac{\partial F}{\partial t}(t_0, {F_{t_0}}^{-1}(y_0)) = \dfrac{\partial F}{\partial t}(0, y_0) = X_0(y_0)$ となり、ベクトル場 X_t は t に依存しない。

問 6.2.1. コンパクト多様体 M 上のフロー φ_t を考える。

(1)　$x \in M$ に対し、$\varphi_t(x)$ が t について定値写像ではないとする。このと

き、ある実数 T $(T \geqq 0)$ が存在し、「$\varphi_{t_1}(x) = \varphi_{t_2}(x)$ ならば、整数 n があって、$t_2 - t_1 = nT$ となる」ことを示せ。

(2)　$x \in M$ に対し、$\varphi_t(x)$ を考える。M の点 y で、y の任意の近傍 $U_y \subset M$ に対し、$\sup\{t \in \mathbf{R} \mid \varphi_t(x) \in U_y\} = +\infty$ となるものが存在することを示せ。

6.3　常微分方程式の解の存在と一意性

$\mathbf{R}^n$ の開集合 U, U に含まれるコンパクト集合 K が与えられているとする。K の各点 $\mathbf{x}$ に対し、ある ε 近傍 $B_\varepsilon(\mathbf{x})$ が存在して、$B_\varepsilon(\mathbf{x}) \subset U$ であるが、K はコンパクトだから、このような ε を $\mathbf{x} \in K$ に依らずに一定にとることができる。

定理 6.3.1 (常微分方程式の解の存在と一意性、初期値に対する連続性). 有界連続関数 $X : (a,b) \times U \longrightarrow \mathbf{R}^n$ が次のリプシッツ条件を満たしているとする。正実数 L が存在して、$t \in (a,b)$, $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2 \in U$ に対し、$\|X(t,\mathbf{x}_1) - X(t,\mathbf{x}_2)\| \leqq L\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|$. また、$\sup_{(t,\mathbf{x})\in(a,b)\times U} X(t,\mathbf{x}) \leqq M$ とする。このとき、$t_0 \in (a,b)$ に対し、正実数 ε_0 が存在して、$F : (t_0-\varepsilon_0, t_0+\varepsilon_0) \times K \longrightarrow U$ で、$F(t,\mathbf{x})$ は t について微分可能、$\mathbf{x}$ について連続であり、$F(t_0,\mathbf{x}) = \mathbf{x}$, $\dfrac{\mathrm{d}\,F}{\mathrm{d}\,t}(t,\mathbf{x}) = X(t, F(t,\mathbf{x}))$ を満たすものが存在する。

常微分方程式を満たす $F(t,\mathbf{x})$ は、積分方程式

$$F(t,\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \int_{t_0}^{t} \frac{\mathrm{d}\,F}{\mathrm{d}\,s}(s,\mathbf{x})\,\mathrm{d}\,s = \mathbf{x} + \int_{t_0}^{t} X(s, F(s,\mathbf{x}))\,\mathrm{d}\,s$$

を満たす。逆に、積分方程式 $F(t,\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \displaystyle\int_{t_0}^{t} X(s, F(s,\mathbf{x}))\,\mathrm{d}\,s$ を満たす連続写像 $F(t,\mathbf{x})$ は微分方程式の解である。

ε_0 は後で決めることにして、$I_{\varepsilon_0} = (t_0 - \varepsilon_0, t_0 + \varepsilon_0)$ とおいて、連続写像全体の空間 $C = C^0(I_{\varepsilon_0} \times K, U)$ を考える。$F \in C$ に対し、

$$\Gamma(F)(t,\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \int_{t_0}^{t} X(s, F(s,\mathbf{x}))\,\mathrm{d}\,s$$

とすると、$\Gamma(F) \in C^0(I_{\varepsilon_0} \times K, \mathbf{R}^n)$ であり、F が積分方程式を満たすことは $F = \Gamma(F)$ と同値である。

$$\Gamma(F_1)(t,\mathbf{x}) - \Gamma(F_2)(t,\mathbf{x}) = \int_{t_0}^{t} \big(X(s, F_1(s,\mathbf{x})) - X(s, F_2(s,\mathbf{x}))\big)\,\mathrm{d}\,s$$

だから、

$$\begin{aligned}
&\sup_{(t,\mathbf{x})\in I_{\varepsilon_0}\times K} \|\Gamma(F_1)(t,\mathbf{x}) - \Gamma(F_2)(t,\mathbf{x})\| \\
&\leqq \sup_{t\in I_{\varepsilon_0}} \Big| \int_{t_0}^{t} L \sup_{\mathbf{x}\in K} \|F_1(s,\mathbf{x}) - F_2(s,\mathbf{x})\|\,\mathrm{d}\,s \Big| \\
&\leqq \varepsilon_0 L \sup_{(t,\mathbf{x})\in I_{\varepsilon_0}\times K} \|F_1(t,\mathbf{x}) - F_2(t,\mathbf{x})\|
\end{aligned}$$

$F_0 : I_{\varepsilon_0} \times K \longrightarrow \mathbf{R}^n$ を $F_0(t,\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ とし、$F_1 = \Gamma(F_0)$ とすると、

$$F_1(t,\mathbf{x}) - F_0(t,\mathbf{x}) = \int_{t_0}^{t} X(s,\mathbf{x})\,\mathrm{d}\,s$$

だから、

$$\sup_{(t,\mathbf{x})\in I_{\varepsilon_0}\times K} \|F_1(t,\mathbf{x}) - F_0(t,\mathbf{x})\| \leqq \sup_{t\in I_{\varepsilon_0}} \Big| \int_{0}^{t} \sup_{\mathbf{x}\in K} \|X(s,\mathbf{x})\|\,\mathrm{d}\,s \Big| \leqq \varepsilon_0 M$$

ここで、$\varepsilon_0 = \min\{\dfrac{1}{2L}, \dfrac{\varepsilon}{4M}\}$ ととる。

$\varepsilon_0 \leqq \dfrac{1}{2L}$ だから、$\Gamma : C \longrightarrow C^0(I_{\varepsilon_0} \times K, \mathbf{R}^n)$ は $C^0(I_{\varepsilon_0} \times K, \mathbf{R}^n)$ 上の

$$\|F_1 - F_2\| = \sup_{(t,\mathbf{x})\in I_{\varepsilon_0}\times K} \|F_1(t,\mathbf{x}) - F_2(t,\mathbf{x})\|$$

で定義される距離に対して、リプシッツ写像でリプシッツ定数が $\dfrac{1}{2}$ より小なるものである。このことから、F_i $(i = 1,\ 2)$ がともに $F_i = \Gamma(F_i)$ をみたすと、$\|F_1 - F_2\| \leqq \dfrac{1}{2}\|F_1 - F_2\|$ を満たし、$F_1 = F_2$ となる。すなわち、解の一意性が示される。

$\varepsilon_0 \leqq \dfrac{\varepsilon}{4M}$ だから $\|F_1 - F_0\| \leqq \dfrac{\varepsilon}{4}$ で、$F_1 \in C$ である。$F_k \in C$ が

$F_k=\Gamma(F_{k-1})$ と定義されているときに、$F_{k+1}=\Gamma(F_k)$ とする。

$$\|F_{k+1}-F_k\|=\|\Gamma(F_k)-\Gamma(F_{k-1})\|\leqq\frac{1}{2}\|F_k-F_{k-1}\|\leqq\frac{1}{2^k}\|F_1-F_0\|\leqq\frac{\varepsilon}{2^{k+2}}$$

従って、

$$\|F_{k+1}-F_0\|\leqq\sum_{j=0}^{k}\|F_{j+1}-F_j\|\leqq\sum_{j=0}^{k}\frac{\varepsilon}{2^{j+2}}<\frac{\varepsilon}{2}$$

となり、$F_k\in C$ であり、F_k は、$F_\infty\in C^0(I_{\varepsilon_0}\times K,\mathbf{R}^n)$ に一様収束する。$F_\infty\in C$ であり、F_∞ は、$\Gamma(F_\infty)=F_\infty$、すなわち、$F_\infty(t,\mathbf{x})=\mathbf{x}+\displaystyle\int_{t_0}^{t}X(s,F_\infty(s,\mathbf{x}))\,\mathrm{d}\,s$ をみたす。

この証明は、逆写像定理の証明とほとんど同じであることに注意しよう。

注意 6.3.2. この定理の証明は、$X:(a,b)\times U\longrightarrow\mathbf{R}^n$ を有界連続写像 $X:(a,b)\times U\times\Lambda\longrightarrow\mathbf{R}^n$ でに取り替えても成立する。ここで Λ は位相空間で、リプシッツ条件は正実数 L が存在して、$t\in(a,b)$, $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2\in U$, $\lambda\in\Lambda$ に対し、$\|X(t,\mathbf{x}_1,\lambda)-X(t,\mathbf{x}_2,\lambda)\|\leqq L\|\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2\|$. というものである。これを λ をパラメータとする常微分方程式と呼ぶ。解は、パラメータ λ に対しても連続関数として得られている。

問 6.3.3. K は凸とするとき、上で求まった解 $F(t,\mathbf{x})$ は $\mathbf{x}$ についてリプシッツ連続であることを示せ。

解答。$\mathbf{x}^1$ を初期値とする解を $\Phi_1(t)=F(t,\mathbf{x}^1)$ と書く。Φ_1 は、

$$\Phi_1(t)=\mathbf{x}^1+\int_{t_0}^{t}X(s,\Phi_1(s))\,\mathrm{d}\,s$$

を満たす。$\Gamma_0(\Phi)=\mathbf{x}^0+\displaystyle\int_{t_0}^{t}X(s,\Phi(s))\,\mathrm{d}\,s$ を初期値 $\mathbf{x}^0$ の解を求めるための写像としよう。${\Gamma_0}^k(\Phi_1)=\Phi_{k+1}$ とおくと、

$$\Phi_2-\Phi_1=\Gamma_0(\Phi_1)-\Phi_1=\mathbf{x}^0-\mathbf{x}^1$$

である。また、

$$\|\Phi_{k+1}-\Phi_k\| \leqq \frac{1}{2}\|\Phi_k-\Phi_{k-1}\| \leqq \frac{1}{2^{k-1}}\|\Phi_2-\Phi_1\| = \frac{1}{2^{k-1}}\|\mathbf{x}^0-\mathbf{x}^1\|$$

従って、$\|\Phi_{k+1}-\Phi_1\| \leqq \displaystyle\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{2^{k-1}}\|\mathbf{x}^0-\mathbf{x}^1\| < 2\|\mathbf{x}^0-\mathbf{x}^1\|$ である。このことから、$\|\mathbf{x}^0-\mathbf{x}^1\| \leqq \dfrac{\varepsilon}{8}$ ならば、Φ_{k+1} の値は U 内にあり、$\Phi_\infty = \displaystyle\lim_{k\to\infty}\Phi_{k+1}$ は $\mathbf{x}^0$ を初期値とする解となる。$\|\mathbf{x}^0-\mathbf{x}^1\| \leqq \dfrac{\varepsilon}{8}$ ならば、$\|\Phi_\infty-\Phi_1\| \leqq 2\|\mathbf{x}^0-\mathbf{x}^1\|$ がわかったが、$\mathbf{x}^0$, $\mathbf{x}^1$ を結ぶ線分上の内分点を初期値とする解を考えれば、解 $F(t,\mathbf{x})$ は $\mathbf{x}$ について K 上リプシッツ定数を 2 とするリプシッツ連続関数である。

問 6. 3.4. $X(t,\mathbf{x})$ は $\mathbf{x}$ について、C^1 級であるとする。このとき、$t=t_0$ において初期値 $\mathbf{x}$ を持つ解 $F(t,\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f_1(t,\mathbf{x}) \\ \vdots \\ f_n(t,\mathbf{x}) \end{pmatrix}$ は、初期値 $\mathbf{x}$ について C^1 級で、$A_{ij}(t,\mathbf{x}) = \dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(t,\mathbf{x})$ は $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}A_{ij}(t,\mathbf{x}) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial \xi_i}{\partial x_k}{}_{(t,F(t,\mathbf{x}))}A_{kj}(t,\mathbf{x})$ を満たすことを示せ。

ヒント：$X(t,\mathbf{x}+\mathbf{v})-X(t,\mathbf{x}) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} v_iY_i(t,\mathbf{x},\mathbf{v})$ とする連続関数 $Y_i(t,\mathbf{x},\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} Y_{i1}(t,\mathbf{x},\mathbf{v}) \\ \vdots \\ Y_{in}(t,\mathbf{x},\mathbf{v}) \end{pmatrix}$ が存在する。さらに、$Y_i(t,\mathbf{x},0) = \dfrac{\partial X}{\partial x_i}(t,\mathbf{x},0)$ である。$(s, \dfrac{1}{s}\big(F(t,\mathbf{x}+s\mathbf{v})-F(t,\mathbf{x})\big))$ の満たす常微分方程式についての解の存在と一意性、解のパラメータ s に対する連続性を用いる。

解答。

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\big(F(t,\mathbf{x}+s\mathbf{v})-F(t,\mathbf{x})\big)\\
&=X(t,F(t,\mathbf{x}+s\mathbf{v}))-X(t,F(t,\mathbf{x}))\\
&=\sum_{i=1}^{n}(f_i(t,\mathbf{x}+s\mathbf{v})-f_i(t,\mathbf{x}))Y_i(t,\mathbf{x},F(t,\mathbf{x}+s\mathbf{v})-F(t,\mathbf{x}))
\end{aligned}$$

だから、Y_i を並べた行列を

$$\begin{aligned}
&Y(s)=Y(t,\mathbf{x},F(t,\mathbf{x}+s\mathbf{v})-F(t,\mathbf{x}))\\
&=\big(Y_1(t,\mathbf{x},F(t,\mathbf{x}+s\mathbf{v})-F(t,\mathbf{x})),\ldots,Y_n(t,\mathbf{x},F(t,\mathbf{x}+s\mathbf{v})-F(t,\mathbf{x}))\big)
\end{aligned}$$

とすると、$\dfrac{1}{s}\big(F(t,\mathbf{x}+s\mathbf{v})-F(t,\mathbf{x})\big)$ は $t=t_0$ のとき初期値が $\mathbf{v}$ であるような s をパラメータとする次の微分方程式の解である。

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\mathbf{u}=Y(s)\mathbf{u}$$

この線形常微分方程式の係数行列 $Y(s)=Y(t,\mathbf{x},F(t,\mathbf{x}+s\mathbf{v})-F(t,\mathbf{x}))$ は、s に対して連続である。

この線形常微分方程式は、s が 0 になるときも連続に定義されている。$s=0$ においては、$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\mathbf{u}=Y(0)\mathbf{u}$ で、$Y(0)=\Big(\dfrac{\partial\xi_i}{\partial x_j}{}_{(t,F(t,\mathbf{x}))}\Big)$ となる。解のパラメータに対する連続性から $\dfrac{1}{s}\big(F(t,\mathbf{x}+s\mathbf{v})-F(t,\mathbf{x})\big)$ は、$\mathbf{v}$ を初期値とする線形常微分方程式 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\mathbf{u}=Y(0)\mathbf{u}$ の解に収束する。従って、$F(t,\mathbf{x})$ の初期値に対する $\mathbf{v}$ 方向の微分が存在する。従って、偏微分も存在する。

$F(t,\mathbf{x})$ の成分の偏微分を $A_{ij}(t,\mathbf{x})=\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(t,\mathbf{x})$ とすると、$A_{ij}(t,\mathbf{x})$ は $A_{ij}(t_0,\mathbf{x})=\delta_{ij}$ であり、線形常微分方程式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}A_{ij}(t,\mathbf{x})=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\xi_i}{\partial x_k}{}_{(t,F(t,\mathbf{x}))}A_{kj}(t,\mathbf{x})$$

を満たす。$\dfrac{\partial\xi_i}{\partial x_k}{}_{(t,F(t,\mathbf{x}))}$ の $\mathbf{x}$ をパラメータと見ると、パラメータに対する解の連続性から、$A_{ij}(t,\mathbf{x})$ は、$\mathbf{x}$ に対し連続である。従って、$F(t,\mathbf{x})$ は C^1 級の写像である。

問 6.3.5. $X:(a,b)\times U\longrightarrow\mathbf{R}^n$ が C^∞ 級とする。このとき、$t=t_0$ におい

て初期値 $\mathbf{x}$ を持つ解 $F(t,\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f_1(t,\mathbf{x}) \\ \vdots \\ f_n(t,\mathbf{x}) \end{pmatrix}$ は、C^∞ 級の写像である。

解答。X が C^r 級のとき、$F(t,\mathbf{x})$ が C^r 級となることがわかっているとする。X を C^{r+1} 級として、$F(t,\mathbf{x})$ が C^{r+1} 級となることを示す。

$A_{ij}(t,\mathbf{x}) = \dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(t,\mathbf{x})$ は、

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}A_{ij}(t,\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \xi_i}{\partial x_k}{}_{(t,F(t,\mathbf{x}))} A_{kj}(t,\mathbf{x})$$

を満たす。ここで、$\dfrac{\partial \xi_i}{\partial x_k}{}_{(t,F(t,\mathbf{x}))}$ は、$\dfrac{\partial \xi_i}{\partial x_k}$ が C^r 級、$F(t,\mathbf{x})$ が C^r 級だから、C^r 級である。また、$\dfrac{\mathrm{d}\,F}{\mathrm{d}\,t}(t,\mathbf{x}) = X(t,F(t,\mathbf{x}))$ は、X が C^{r+1} 級, $F(t,\mathbf{x})$ が C^r 級だから、C^r 級である。従って、$F(t,\mathbf{x})$ は C^{r+1} 級となる。

6.4　コンパクト多様体上のベクトル場

ここではコンパクト多様体上の C^∞ 級ベクトル場 X は、フロー F_t を生成することを示す。

定理 6.4.1. M をコンパクト多様体、X を M 上の C^∞ 級ベクトル場とする。M 上のフロー F_t が存在し、$X = \dfrac{\mathrm{d}\,F_t}{\mathrm{d}\,t} \circ F_{-t}$ となる。

まず、M の座標近傍系から有限部分被覆 $\{(U_i,\varphi_i)\}_{i=1,\dots,k}$ をとる。$U_i \supset \overline{V}_i \supset V_i \supset \overline{W}_i \supset W_i$ で、$\bigcup W_i = M$ となるものをとる。$\varphi_i(\overline{V}_i) \subset \varphi_i(U_i)$ だから、ベクトル場 $X = \displaystyle\sum_j \xi_j^{(i)} \frac{\partial}{\partial x_j^{(i)}}$ については $\varphi(V_i)$ 上で有界連続でリプシッツ条件を満たす。$\varphi_i(\overline{W}_i) \subset \varphi_i(V_i)$ について、正実数 $\varepsilon^{(i)}$ に対し、$F^{(i)} : (-\varepsilon^{(i)},\varepsilon^{(i)}) \times \varphi_i(\overline{W}_i) \longrightarrow \varphi(V_i)$ が存在し、$\dfrac{\mathrm{d}\,F^{(i)}}{\mathrm{d}\,t}(t,\mathbf{x}) = X^{(i)}(F^{(i)}(t,\mathbf{x}))$ を満たす。

$\varepsilon = \min\{\varepsilon^{(i)}\}$ とすると、任意の $x \in M$ に対し、$x \in W_i$ となる W_i をとれば、$F^i(t,x) = {\varphi_i}^{-1}(F^{(i)}(t,\varphi_i(x))$ は曲線 $F^i_x : (-\varepsilon,\varepsilon) \longrightarrow M$ で、$\dfrac{\mathrm{d}\,F^i_x}{\mathrm{d}\,t}(t) = X(F^i_x(t))$ を満たす。$x \in W_j$ とすると、F^j_x も定義されるが、$F^j_x = F^i_x$ となる。その事情は、次のことによる。

常微分方程式の解

$$F^{(i)} : (-\varepsilon,\varepsilon) \times \varphi_i(W_i \cap W_j) \longrightarrow \varphi_i(U_i \cap U_j),$$
$$F^{(j)} : (-\varepsilon,\varepsilon) \times \varphi_j(W_i \cap W_j) \longrightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j)$$

を比較する。$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}F^{(i)}_t \circ F^{(i)}_{-t}$ はベクトル場 X の $\varphi_i(W_i \cap W_j)$ における表示 $\displaystyle\sum_j \xi^{(i)}_j \frac{\partial}{\partial x^{(i)}_j}$ を与える。$(\varphi_j \circ {\varphi_i}^{-1})_* \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}F^{(i)}_t \circ F^{(i)}_{-t}$ はベクトル場 X の $\varphi_j(W_i \cap W_j)$ における表示すなわち $\displaystyle\sum_\ell \xi^{(j)}_\ell \frac{\partial}{\partial x^{(j)}_\ell}$ と一致している。

$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}(\varphi_j \circ {\varphi_i}^{-1})(F^{(i)}(t,\mathbf{x})) = (\varphi_j \circ {\varphi_i}^{-1})_* \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}F^{(i)}(t,\mathbf{x})$ だから、常微分方程式の解の一意性から、$(\varphi_j \circ {\varphi_i}^{-1})(F^{(i)}(t,\mathbf{x}))$ は、$F^{(j)}(t,(\varphi_j \circ {\varphi_i}^{-1})(\mathbf{x}))$ と一致する。

従って、C^∞ 級写像 $F : (-\varepsilon,\varepsilon) \times M \longrightarrow M$ で、$\dfrac{\mathrm{d}\,F}{\mathrm{d}\,t}(t,x) = X(F(t,x))$ となるものがあることがわかった。

ここで、$n \geqq 2$ に対し $F(t,x)$ が $t \in (-\varepsilon, \dfrac{n}{2}\varepsilon)$ 上定義されているときに、$t \in (\dfrac{n-1}{2}\varepsilon, \dfrac{n+1}{2}\varepsilon)$ に対し、$F(t,x) = F(t - \dfrac{n-1}{2}\varepsilon, F(\dfrac{n-1}{2}\varepsilon, x))$ とすると、$\dfrac{\mathrm{d}\,F}{\mathrm{d}\,t}(t,x) = X(F(t - \dfrac{n-1}{2}\varepsilon, F(\dfrac{n-1}{2}\varepsilon, x))) = X(F(t,x))$ を満たす。同様に、$t \in (-\dfrac{n}{2}\varepsilon, \varepsilon)$ 上定義されているときに、$t \in (-\dfrac{n+1}{2}\varepsilon, -\dfrac{n-1}{2}\varepsilon)$ に対し、$F(t,x) = F(t + \dfrac{n-1}{2}\varepsilon, F(-\dfrac{n-1}{2}\varepsilon, x))$ とすると、$\dfrac{\mathrm{d}\,F}{\mathrm{d}\,t}(t,x) = X(F(t + \dfrac{n-1}{2}\varepsilon, F(-\dfrac{n-1}{2}\varepsilon, x))) = X(F(t,x))$ を満たす。こうして、C^∞ 級写像 $F : \mathbf{R} \times M \longrightarrow M$ で、$\dfrac{\mathrm{d}\,F}{\mathrm{d}\,t}(t,x) = X(F(t,x))$ となるものがある。

さて $F(t+s,x)$ を考える。これは、$t = 0$ のとき、$F(0+s,x) = F(s,x)$ となる常微分方程式 $\dfrac{\mathrm{d}\,F}{\mathrm{d}\,t}(t,x) = X(F(t,x))$ の解である。そのような解は $F(t,F(s,x))$ と書かれていたから、$F(t+s,x) = F(t,F(s,x))$ となっている。

問 6.4.2. $\mu : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}$ を $\|\mathbf{x}\| < 1$ ならば $\mu(\mathbf{x}) > 0$ を満たし、$\operatorname{supp}\mu = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2 \mid \|\mathbf{x}\| \leq 1\}$ となる C^∞ 級関数とする。平面上のベクトル場 $\mu\dfrac{\partial}{\partial x_1}$ が生成するフロー Φ_t について、$\lim\limits_{t\to\infty} \Phi_t(\mathbf{x})$, $\lim\limits_{t\to-\infty} \Phi_t(\mathbf{x})$ を求めよ。

6.5 多様体上の集合の比較

問 6.5.1. 連結な多様体上の 2 点 x_1, x_2 に対し、微分同相写像 $F : M \longrightarrow M$ で $F(x_1) = x_2$ となるものがあることを示せ。

問 6.5.2. 次元が 2 以上の連結な多様体上の 2 点 x_0, x_1 に対し、M 上のフロー F_t で $F_1(x_0) = x_1$ となるものがあることを示せ。このとき曲線 $\{F(t, x_0) \mid t \in (-\varepsilon, 1+\varepsilon)\} \subset M$ は x_0, x_1 を含む 1 次元部分多様体である。

問 6.5.3. M, N をコンパクト多様体とする。C^∞ 級写像 $f : M \longrightarrow N$ について, M 上のベクトル場 ξ, N 上のベクトル場 η が、すべての $x \in M$ に対し、$f_*(\xi(x)) = \eta(f(x))$ を満たすとする。($f_*\xi = \eta$ とも書かれ、M 上のベクトル場 ξ が、N 上のベクトル場 η に射影されるという。) ξ が生成するフローを $\varphi_t : M \longrightarrow M$, η が生成するフローを $\psi_t : N \longrightarrow N$ とするとき次を示せ。

$$f(\varphi_t(x)) = \psi_t(f(x))$$

$f : M \longrightarrow \mathbf{R}$ に対し、$[a, b] \subset \mathbf{R}$ 上の点は、すべて正則値であるとする。