1.2　逆写像定理、陰関数定理

逆写像定理、陰関数定理は多様体の定義のために必要不可欠な定理である。

定理 1.2.1 (逆写像定理). n 次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^n$ の開集合 U と U から $\mathbf{R}^n$ への写像 $F : U \longrightarrow \mathbf{R}^n$ が与えられているとする。F は U 上 C^r 級 $(r \geqq 1)$ であるとする。すなわち、$F = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, \ldots, x_n) \end{pmatrix}$ と書くとき、$f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_n(x_1, \ldots, x_n)$ が、C^r 級 $(r \geqq 1)$ であるとする。U 上の点 $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ において次の行列（ヤコビ行列）が可逆であるとする。

$$DF(\mathbf{x}^0) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

このとき、$\mathbf{y}^0 = f(\mathbf{x}^0)$ の近傍 V, V 上で定義された C^r 級写像 $G : V \longrightarrow U$ で、$G \circ F = \mathrm{id}_{G(V)}$, $F \circ G = \mathrm{id}_V$ を満たすものが存在する。

この G は F の局所的な逆写像と呼ばれる。

定義 1.2.2. 正整数 r に対し、関数 $f_i(x_1, \ldots, x_n)$ が C^r 級とは、正整数 $s \leqq r$ に対し、$f_i(x_1, \ldots, x_n)$ のすべての s 階の偏微分が存在し、連続であることである。

1 階偏微分は $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$, 2 階偏微分は $\dfrac{\partial^2 f_i}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_2}}$, s 階偏微分は $\dfrac{\partial^s f_i}{\partial x_{j_1} \ldots \partial x_{j_s}}$ のように書かれる。偏微分が連続であれば、偏微分の順序によらないので、r 階偏微分は $\dfrac{\partial^r f_i}{\partial x_1^{r_1} \ldots \partial x_n^{r_n}}$ $(r_1 + \cdots + r_n = r)$ のように書かれる。C^r 級のことを r 回連続微分可能とも呼ぶ。任意の正整数 r に対して、C^r 級のとき、C^∞ 級

あるいは無限回連続微分可能であるという。

定理 1.2.3 (陰関数定理). 正整数 $m,\ n$ について、$m < n$ とする。n 次元ユークリッド空間の開集合 U と U から $\mathbf{R}^m$ への写像 $F : U \longrightarrow \mathbf{R}^m$ が与えられているとする。$F = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}$ は U 上 C^r 級 $(r \geqq 1)$ であるとする。$\mathbf{x}^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ においてヤコビ行列 $DF(\mathbf{x}^0) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$ の階数（ランク）が m であるとする。すなわち、適当に m 個の列を取ると、それらの列は線形独立であるとする。そこで、座標 $x_1,\ \dots,\ x_n$ の順序を入れ替えて、$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_{n-m+1}} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_{n-m+1}} & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$ は可逆であるとする。このとき、$(x_1^0, \dots, x_{n-m}^0) \in \mathbf{R}^{n-m}$ の近傍 $W \subset \mathbf{R}^{n-m}$ と C^r 級写像 $g : W \longrightarrow \mathbf{R}^m$ で、

$$
\begin{aligned}
&g(x_1^0, \dots, x_{n-m}^0) = (x_{n-m+1}^0, \dots, x_n^0), \\
&F(x_1, \dots, x_{n-m}, g(x_1, \dots, x_{n-m})) = F(\mathbf{x^0})
\end{aligned}
$$

を満たすものが存在する。

問 1.2.4. (1)　$f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ を $f(x, y) = x^3 - x + y^2$ で定義するとき、f のヤコビ行列を求めよ。

(2)　(1) の f について、$z \in \mathbf{R}$ の逆像 $f^{-1}(z)$ の各成分が「滑らかな曲線」となるための z の条件を求めよ。

(3)　$F : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ を $F(x, y, z) = (x^3 - zx + y^2, z)$ で定義するとき、F のヤコビ行列を求めよ。

(4)　(3) の F について、$(s, t) \in \mathbf{R}^2$ の逆像 $F^{-1}(s, t)$ の各成分が、「滑らかな曲線」となるための (s, t) の条件を求めよ。

但し、$\mathbf{R}^n$ の「滑らかな曲線」C とは、C の各点 x に対し、x の近傍 U と C^∞ 級写像 $f : U \longrightarrow \mathbf{R}^{n-1}$ で、U 上で $\operatorname{rank} Df = n-1$, $U \cap C = f^{-1}(f(x))$ とするものがあることである。（１次元部分多様体であること）

解答。(1) $Df = (\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}) = (3x^2-1, 2y)$. （チェインルールを書くために、行ベクトルで書くほうが良い。）

(2) 滑らかでなくなる可能性のある点を求め、その点の像を考えると z がその補集合にあることが（十分）条件である。（その十分条件を示すだけでもよい。この問の場合、必要条件にもなっている。その理由を考えることも大切である.）

Df のランクが 0 であることは、$Df = (0,0)$ であることゆえ、$3x^2-1=0$, $2y=0$ から、$(\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}, 0)$ が滑らかでなくなる可能性のある点（臨界点）である。その像は $f(\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}, 0) = \mp\dfrac{2}{3\sqrt{3}}$. 条件は $z \neq \pm\dfrac{2}{3\sqrt{3}}$.

（$f^{-1}(\dfrac{2}{3\sqrt{3}})$ は、$(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}, 0)$ の近傍で、１点から４つの線分がでているものと同相で、局所ユークリッド的でない。$f^{-1}(-\dfrac{2}{3\sqrt{3}})$ は、$(\dfrac{1}{\sqrt{3}}, 0)$ が孤立点で、局所的に $\mathbf{R}$ と同相でない。）

(3) $F = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$ として、$DF = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y} & \dfrac{\partial f_1}{\partial z} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y} & \dfrac{\partial f_2}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x^2-z & 2y & -x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

（チェインルールを書くために、２行３列の行列で書くほうが良い。）

(4) 滑らかでなくなる可能性のある点を求め、その点の像を考えると (s,t) がその補集合にあることが条件である。（この問の場合は、必要条件にもなっている。）

DF の $(2,3)$ 成分は 1 だから、$\operatorname{rank} DF < 2$ と $3x^2 - z = 0$ かつ $2y = 0$ は同値。これは、$z = 3x^2$ かつ $y = 0$ であり、その像は、$\left\{ \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x^3 \\ 3x^2 \end{pmatrix} \;\middle|\; x \in \mathbf{R} \right\}$. これは $\left\{(s,t) \in \mathbf{R} \;\middle|\; \left(\dfrac{s}{2}\right)^2 = \left(\dfrac{t}{3}\right)^3\right\}$ と同じ集合である。条件は $\left(\dfrac{s}{2}\right)^2 \neq \left(\dfrac{t}{3}\right)^3$

$\left(\left(\dfrac{s}{2}\right)^2 = \left(\dfrac{t}{3}\right)^3\right.$ のとき、$s > 0$ ならば $F^{-1}(s,t)$ の点 $(-2^{-\frac{1}{3}}s^{\frac{1}{3}}, 0, t)$ において、1点から4つの線分がでているものと同相で、局所ユークリッド的でない。$s < 0$ ならば $F^{-1}(s,t)$ の点 $(2^{-\frac{1}{3}}|s|^{\frac{1}{3}}, 0, t)$ は孤立点で、局所的に $\mathbf{R}$ と同相でない。また $F^{-1}(0,0)$ は xy 平面の x 軸の負の方向に接して2つの枝が分かれている。これは局所的に $\mathbf{R}$ 上の $\mathbf{R}^2$ に値を持つ C^∞ 級関数のグラフとならないから、滑らかな曲線ではない。

問 1.2.5. $\mathbf{R}^3$ の次の部分集合が「滑らかな曲面」であるかどうか論ぜよ。

(1) $C = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \;\middle|\; x^2 + y^2 = z^2\right\}$

(2) $X = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{r} z^2 = -\{x^2+y^2-1\}\{(x+3)^2+y^2-1\}\cdot \\ \{(x-3)^2+y^2-1\}\{x^2+y^2-25\} \end{array}\right\}$

(3) $Y = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \;\middle|\; z^2 = -\{(x+1)^2+y^2-1\}\{(x-1)^2+y^2-1\}\right\}$

但し、$\mathbf{R}^3$ の「滑らかな曲面」S とは、S の各点 x に対し、x の近傍 U と C^∞ 級関数 $f : U \longrightarrow \mathbf{R}$ で、U 上で $\operatorname{rank} Df = 1$, $U \cap S = f^{-1}(f(x))$ とするものがあることである。（2次元部分多様体であること）

解答。滑らかでなくなる可能性のある点を求める。（この問の場合、そこで2次元多様体でなくなっている。その理由を考えることも大切である.）

(1). C について、$f(x,y,z) = x^2+y^2-z^2$ とおくと、$Df = (2x, 2y, -2z)$ である。$(0,0,0)$ を除いて、$f(x,y,z) = 0$ は滑らかな曲面である。図形の $(0,0,0)$ の近傍から $(0,0,0)$ を除くと連結でなくなる。従って、$(0,0,0)$ においては局所的に2次元ユークリッド空間と同相でない。C は滑らかな曲面ではない。

(2). X について、定義式の左辺から右辺を引いたものを $f(x,y,z) = g_1g_2g_3g_4 + z^2$, $g_1 = x^2+y^2-1$, $g_2 = (x+3)^2+y^2-1$, $g_3 = (x-3)^2+y^2-1$, $g_4 = x^2+y^2-25$ とおく。$f = 0$ を満たす (x,y,z) の (x,y) の存在範囲は、$g_1g_2g_3g_4 \leqq 0$ の範囲であるから、半径5の円の周または内部で $(\pm 3, 0)$, $(0,0)$ を中心とする単位円の周または外側である。$Df = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}, \dfrac{\partial f}{\partial z}\right)$ について、

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= 2xg_2g_3g_4 + 2(x+3)g_1g_3g_4 + 2(x-3)g_1g_2g_4 + 2xg_1g_2g_3 \\
&= 2x(g_2g_3g_4 + g_1g_3g_4 + g_1g_2g_4 + g_1g_2g_3) - 6 \cdot 2 \cdot 6xg_1g_4 \\
&= 2x(g_2g_3g_4 + g_1g_3g_4 + g_1g_2g_4 + g_1g_2g_3 - 36g_1g_4), \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= 2y(g_2g_3g_4 + g_1g_3g_4 + g_1g_2g_4 + g_1g_2g_3) \\
\frac{\partial f}{\partial z} &= 2z
\end{aligned}$$

である。$z \neq 0$ のところでは滑らかな曲面になっているから、$z = 0$ かつ、$g_1g_2g_3g_4 = 0$ において、$\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}$ がともに 0 になることがあるかどうかを考える。

$g_1 = 0$ の点では、$g_2g_3g_4 \neq 0$ であり、この点で $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}\right) = 0$ とすると $(x, y) = 0$ となるが、これは $g_1 = 0$ の点ではない。従って、$g_1 = 0, z = 0$ の点においては滑らかな曲面である。

$g_4 = 0$ の点では、$g_1g_2g_3 \neq 0$ であり、この点で $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}\right) = 0$ とすると $(x, y) = 0$ となるが、これは $g_4 = 0$ の点ではない。$g_4 = 0, z = 0$ の点においては滑らかな曲面である。

$g_2 = 0$ の点では、$g_1g_3g_4 \neq 0$ であるから、$\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$ とすると $y = 0$ となる。この点は $(-4, 0, 0)$ または $(-2, 0, 0)$ である。この点では、$\dfrac{\partial f}{\partial x} = -8g_1g_4\{(-7)^2 - 1 - 36\} = -8 \cdot 12g_1g_4$ または $\dfrac{\partial f}{\partial x} = -8g_1g_4\{(-5)^2 - 1 - 36\} = 8 \cdot 12g_1g_4$ となり、0 ではない。従って、$g_2 = 0, z = 0$ の点においては滑らかな曲面である。

$g_3 = 0$ の点では、$g_1g_2g_4 \neq 0$ であるから、$\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$ とすると $y = 0$ となる。この点は $(2, 0, 0)$ または $(4, 0, 0)$ である。この点では、$\dfrac{\partial f}{\partial x} = -8g_1g_4\{5^2 - 1 - 36\} = 8 \cdot 12g_1g_4$ または $\dfrac{\partial f}{\partial x} = -8g_1g_4\{7^2 - 1 - 36\} = -8 \cdot 12g_1g_4$ となり、0 ではない。従って、$g_3 = 0, z = 0$ の点においては滑らかな曲面である。

従って、X は滑らかな曲面である。（種数 3 の向きづけ可能な閉曲面と呼ばれる。）

(3). Y について。定義式の左辺から右辺を引いたものを $f(x, y, z) = g_1g_2 + z^2$, $g_1 = (x+1)^2 + y^2 - 1$, $g_2 = (x-1)^2 + y^2 - 1$ とすると、$f = 0$ を満たす (x, y, z) の (x, y) の存在範囲は $(\pm 1, 0)$ を中心とする単位円の周または内部で

ある。

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2(x+1)g_2 + 2(x-1)g_1 = 2x(2x^2+2y^2) + 2(4x) = 2x(2x^2+2y^2+4)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y(g_2+g_1) = 2y(2x^2+2y^2)$$
$$\frac{\partial f}{\partial z} = 2z$$

$Df = 0$ とすると $(x,y,z) = (0,0,0)$ である。$(x,y,z) \neq (0,0,0)$ となる点で Y は滑らかな曲面であるが、$(0,0,0)$ の近傍で Y は $\mathbf{R}^2$ と同相ではない。なぜなら、Y の $(0,0,0)$ の近傍から $(0,0,0)$ を除くと連結でない。

逆写像定理から陰関数定理を導くことができる。

陰関数定理の $F : U \longrightarrow \mathbf{R}^m$ に対して、$\widehat{F} : U \longrightarrow \mathbf{R}^{n-m} \times \mathbf{R}^m$ を $\widehat{F}(x_1,\dots,x_n) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-m} \\ F(x_1,\dots,x_n) \end{pmatrix}$ で定義する。$\widehat{F}$ のヤコビ行列は、

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_{n-m}} & \frac{\partial f_1}{\partial x_{n-m+1}} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_{n-m}} & \frac{\partial f_m}{\partial x_{n-m+1}} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

である。この行列は、$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{i=1,\dots,m;j=n-m+1,\dots,n}$ が可逆であることから、可逆である。従って、逆写像定理から、$(x_1^0,\dots,x_{n-m}^0, F(\mathbf{x^0}))$ の近傍 V と C^r 級写像 $G : V \longrightarrow U$ で、$G \circ \widehat{F} = \mathrm{id}_{G(V)}$, $\widehat{F} \circ G = \mathrm{id}_V$ を満たすものがある。

$\mathbf{R}^n$ を前の $n-m$ 個の座標と後ろの m 個の座標に分割して、$\mathbf{R}^n \ni \mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \in \mathbf{R}^{n-m} \times \mathbf{R}^m$ と書き、

$$\widehat{F}(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2)=(\mathbf{x}_1,F(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2)),\ G(\mathbf{y}_1,\mathbf{y}_2)=(G_1(\mathbf{y}_1,\mathbf{y}_2),G_2(\mathbf{y}_1,\mathbf{y}_2))$$

とする。

$\widehat{F}\circ G=\mathrm{id}_V$ は、

$$(G_1(\mathbf{y}_1,\mathbf{y}_2),F\bigl(G_1(\mathbf{y}_1,\mathbf{y}_2),G_2(\mathbf{y}_1,\mathbf{y}_2)\bigr))=(\mathbf{y}_1,\mathbf{y}_2)$$

であるから、$\mathbf{R}^{n-m}$ 成分をみて $G_1(\mathbf{y}_1,\mathbf{y}_2)=\mathbf{y}_1$ である。これを $\mathbf{R}^m$ 成分に代入すると、$F(\mathbf{y}_1,G_2(\mathbf{y}_1,\mathbf{y}_2))=\mathbf{y}_2$ を得る。$\mathbf{y}_1=\mathbf{x}_1$, $\mathbf{y}_2=F(\mathbf{x}_1^0,\mathbf{x}_2^0)$ として、$g(\mathbf{x}_1)=G_2(\mathbf{x}_1,F(\mathbf{x}_1^0,\mathbf{x}_2^0))$ とおくと、$F(\mathbf{x}_1,g(\mathbf{x}_1))=F(\mathbf{x}^0)$ をみたす。

この証明から、陰関数定理の仮定のもとで、U の点の座標として、$(\mathbf{x}_1,F(\mathbf{x}))$ がとれることがわかる。

問 1.2.6 (リプシッツ連続性). $\mathbf{R}^n$ の開集合 U 上で定義された C^1 級写像 $G:U\longrightarrow\mathbf{R}^m$, $G(\mathbf{x})=(g_1(x_1,\dots,x_n),\dots,g_m(x_1,\dots,x_n))$ が U に含まれる凸な閉集合 A 上で $\left|\dfrac{\partial g_i}{\partial x_j}\right|\leqq K$ を満たすとする。ここで、$\mathbf{x}$, $\mathbf{x}+\mathbf{v}\in A$ に対し、$\|G(\mathbf{x}+\mathbf{v})-G(\mathbf{x})\|\leqq\sqrt{mn}K\|\mathbf{v}\|$

解答。g_i は連続微分可能ゆえに U 上で全微分可能である。従って、

$$g_i(\mathbf{x}+\mathbf{v})-g_i(\mathbf{x})=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial g_i}{\partial x_j}\,v_j+\varepsilon_i(\mathbf{x},\mathbf{v})\|\mathbf{v}\|$$

で、$\displaystyle\lim_{\mathbf{v}\to 0}\varepsilon_i(\mathbf{x},\mathbf{v})=0.$ これを、$\mathbf{x}+(t+s)\mathbf{v}$, $\mathbf{x}+t\mathbf{v}$ に対して当てはめると、

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}g_i(\mathbf{x}+t\mathbf{v})=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}+t\mathbf{v})\,v_j$$

である。従って、

$$\begin{aligned}g_i(\mathbf{x}+\mathbf{v})-g_i(\mathbf{x})&=\Bigl[g_i(\mathbf{x}+t\mathbf{v})\Bigr]_{t=0}^{t=1}\\&=\int_0^1\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}g_i(\mathbf{x}+t\mathbf{v})\}\,\mathrm{d}\,t\\&=\int_0^1\{\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}+t\mathbf{v})\,v_j\}\,\mathrm{d}\,t\end{aligned}$$

さて、$\mathbf{x}+\mathbf{v}$, $\mathbf{x}$ が A に含まれれば、$t\in[0,1]$ に対して、$\mathbf{x}+t\mathbf{v}\in A$ だから、最後の積分の絶対値は $K\displaystyle\sum_{j=1}^{n}|v_j|$ で評価される。$\displaystyle\sum_{j=1}^{n}|v_j| \leqq \sqrt{n}\|\mathbf{v}\|$ だから、$|g_i(\mathbf{x}+\mathbf{v})-g_i(\mathbf{x})| \leqq \sqrt{n}K\|\mathbf{v}\|$. 従って、$\|G(\mathbf{x}+\mathbf{v})-G(\mathbf{x})\| \leqq \sqrt{mn}K\|\mathbf{v}\|$.

問 1. 2.7 (チェイン ルール). $f:\mathbf{R}^m\longrightarrow\mathbf{R}^n$, $g:\mathbf{R}^\ell\longrightarrow\mathbf{R}^m$ はともに連続微分可能な写像とする。すなわち、$f(\mathbf{y})=(f_1(y_1,\dots,y_m),\dots,f_n(y_1,\dots,y_m))$, $g(\mathbf{x})=(g_1(x_1,\dots,x_\ell),\dots,g_m(x_1,\dots,x_\ell))$ の各成分が連続微分可能とする。f,g のヤコビ行列は, n 行 m 列の行列 $Df=\big(\dfrac{\partial f_i}{\partial y_j}\big)_{i=1,\dots,n;j=1,\dots,m}$, m 行 ℓ 列の行列 $Dg=\big(\dfrac{\partial g_j}{\partial x_k}\big)_{j=1,\dots,m;k=1,\dots,\ell}$ である。この時、合成写像 $f\circ g:\mathbf{R}^\ell\longrightarrow\mathbf{R}^n$ も連続微分可能な写像であることを示し、$f\circ g$ のヤコビ行列 $D(f\circ g)$ について $D(f\circ g)(\mathbf{x})=Df(g(\mathbf{x}))Dg(\mathbf{x})$ を示せ。

解答。f_i $(i=1,\dots,n)$ が連続微分可能であることは、$\dfrac{\partial f_i}{\partial y_j}(\mathbf{y})$ が存在し、$\mathbf{y}$ について連続であることである。このとき、f_i は全微分可能となる。すなわち、

$$f_i(\mathbf{y}+\mathbf{v})-f_i(\mathbf{y})=\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial f_i}{\partial y_j}\,v_j+\varepsilon_{f_i}(\mathbf{y},\mathbf{v})\|\mathbf{v}\|$$

として、$\displaystyle\lim_{\mathbf{v}\to 0}\varepsilon_{f_i}(\mathbf{y},\mathbf{v})=0$ である。また、$g=(g_1,\dots,g_m)$ が連続微分可能であることは、$\dfrac{\partial g_j}{\partial x_k}(\mathbf{x})$ が存在し、$\mathbf{x}$ について連続であることであるが、同様に、

$$g_j(\mathbf{x}+\mathbf{u})-g_j(\mathbf{x})=\sum_{k=1}^{\ell}\frac{\partial g_j}{\partial x_k}\,u_k+\varepsilon_{g_j}(\mathbf{x},\mathbf{u})\|\mathbf{u}\|$$

とするとき、$\displaystyle\lim_{\mathbf{u}\to 0}\varepsilon_{g_j}(\mathbf{x},\mathbf{u})=0$ を満たす。また、$\mathbf{x}$ の近傍での $\big|\dfrac{\partial g_j}{\partial x_k}\big|$ が K 以下ならば、g は、その近傍でリプシッツ連続である。

$$\|g(\mathbf{x}+\mathbf{u})-g(\mathbf{x})\|\le K\sqrt{\ell m}\ \|\mathbf{u}\|.$$

従って、$\|\mathbf{u}\|\leqq\varepsilon$ ならば、

$$
\begin{aligned}
&f_i(g(\mathbf{x}+\mathbf{u}))-f_i(g(\mathbf{x}))\\
=&\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial f_i}{\partial y_j}(g_j(\mathbf{x}+\mathbf{u})-g_j(\mathbf{x}))\\
&+\varepsilon_{f_i}(g(\mathbf{x}),g(\mathbf{x}+\mathbf{u})-g(\mathbf{x}))\|g(\mathbf{x}+\mathbf{u})-g(\mathbf{x})\|\\
=&\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial f_i}{\partial y_j}(\sum_{k=1}^{\ell}\frac{\partial g_j}{\partial x_k}u_k+\varepsilon_{g_j}(\mathbf{x},\mathbf{u})\|\mathbf{u}\|)\\
&+\varepsilon_{f_i}(g(\mathbf{x}),g(\mathbf{x}+\mathbf{u})-g(\mathbf{x}))K\sqrt{\ell m}\|\mathbf{u}\|\\
=&\sum_{k=1}^{\ell}\{\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial f_i}{\partial y_j}\frac{\partial g_j}{\partial x_k}\}u_k\\
&+\{\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial f_i}{\partial y_j}\varepsilon_{g_j}(\mathbf{x},\mathbf{u})+\varepsilon_{f_i}(g(\mathbf{x}),g(\mathbf{x}+\mathbf{u})-g(\mathbf{x}))K\sqrt{\ell m}\}\|\mathbf{u}\|
\end{aligned}
$$

ここで、$\mathbf{u}\to 0$ のとき、$\varepsilon_{g_j}(\mathbf{x},\mathbf{u})\to 0$, $g(\mathbf{x}+\mathbf{u})\to g(\mathbf{x})$ だから $\varepsilon_{f_i}(g(\mathbf{x}),g(\mathbf{x}+\mathbf{u})-g(\mathbf{x}))\to 0$ である。従って，最後の中括弧は $\{\bullet\}\to 0$ であるから、$f_i\circ g$ は $\mathbf{x}$ で全微分可能であり、偏微分係数は $\displaystyle\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial f_i}{\partial y_j}\circ g\ \frac{\partial g_j}{\partial x_k}$ である。$\dfrac{\partial f_i}{\partial y_j}\circ g$, $\dfrac{\partial g_j}{\partial x_k}$ は連続であり、行列の積は連続であるから、$\displaystyle\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial f_i}{\partial y_j}\circ g\ \frac{\partial g_j}{\partial x_k}$ は $\mathbf{x}$ について連続である。従って、$f\circ g$ は連続微分可能である。ヤコビ行列 $D(f\circ g)$ がヤコビ行列 $Df\circ g$ と Dg の行列の積になることは上の偏微分係数の式そのものである。

問 1.2.8 (C^r 写像の合成). $f:\mathbf{R}^m\longrightarrow\mathbf{R}^n$, $g:\mathbf{R}^\ell\longrightarrow\mathbf{R}^m$ がともに C^r 級写像とする。この時、合成写像 $f\circ g:\mathbf{R}^\ell\longrightarrow\mathbf{R}^n$ も C^r 級写像であることを示せ。

$r=1$ の場合は前の問である。$r\geqq 2$ とする。数学的帰納法によることにして、この問の命題が $r-1$ に対しては正しいとする。f, g が C^r 級とすると、Df, Dg は C^{r-1} 級である。帰納法の仮定から $(Df)\circ g$ は C^{r-1} 級である。行列の積は C^∞ 級だから、$(Df)\circ g\,Dg$ は C^{r-1} 級である。$D(f\circ g)=(Df)\circ g\,Dg$ だから、$D(f\circ g)$ が C^{r-1} 級であり、$f\circ g$ は C^r 級となる。

1.3 逆写像定理の証明

逆写像定理の証明は、まず、$\mathbf{x}^0$、$F(\mathbf{x}^0)$ が、$\mathbf{R}^n$ の原点で、$\mathbf{x}^0$ におけるヤコビ行列が単位行列の場合の逆写像定理を示す。ヤコビ行列が一般の可逆行列の場合は、可逆行列の作用や平行移動により、単位行列の場合に帰着される。

1.3.1 特別な場合の逆写像定理

定理 1.3.1 (ヤコビ行列が単位行列のときの逆写像定理). n 次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^n$ の原点 0 を含む開集合 U と U から $\mathbf{R}^n$ への C^r 級 $(r \geqq 1)$ 写像 $F: U \longrightarrow \mathbf{R}^n$ が与えられ、$F(0) = 0,\ F(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}$ と書くとき、$DF_{(0)} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$ を満たすとする。このとき、0 の近傍 V, V 上で定義された C^r 級写像 $G: V \longrightarrow U$ で、$G \circ F = \mathrm{id}_{G(V)}$, $F \circ G = \mathrm{id}_V$ を満たすものが存在する。

DF は 0 において、単位行列であるから、F は恒等写像と近い。次のような思考実験を行なう。0 に近い $\mathbf{y}$ に対し、$F(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$ となる $\mathbf{x}$ を求めたいが、まず第 1 近似として $\mathbf{x}_1 = \mathbf{y}$ としてみる。そうすると、F は恒等写像と近いのだから $F(\mathbf{x}_1) - \mathbf{y}$ は、0 に近い。そのずれを、$\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_1 - (F(\mathbf{x}_1) - \mathbf{y})$ と補正してみる。$F(\mathbf{x}_2) - \mathbf{y}$ は 0 でないだろうから、$\mathbf{x}_3 = \mathbf{x}_2 - (F(\mathbf{x}_2) - \mathbf{y})$ とさらに補正してみる。このように $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots$ をとると、$\|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\|, \|\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_2\|, \dots$ は急速に減少し、$\mathbf{x}_k$ は収束することが示される。

$F(0) = 0$, $\mathbf{x}_1 = 0 - (F(0) - \mathbf{y})$ だから、$\mathbf{x}_0 = 0$ とおく。

$H(\mathbf{x}) = \mathbf{y} - F(\mathbf{x})$ とおくと、H のヤコビ行列 DH は 0 において、零行列

であり、偏微分 $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$ は U 上連続 $(\geqq 1)$ であるから、H の成分 h_i について、$\dfrac{\partial h_i}{\partial x_j}$ は 0 に近い。正実数 ε を $\varepsilon \leqq \dfrac{1}{2n}$ ととる。すると正実数 δ で $\mathbf{x} \leqq \delta$ ならば $\left|\dfrac{\partial h_i}{\partial x_j}\right| \leqq \varepsilon$ となるものをとることができる。

h_i の偏微分の評価から H のリプシッツ定数の評価が、問 1.2.6 により得られる。

$$\|H(\mathbf{x}+\mathbf{v}) - H(\mathbf{x})\| \leqq \varepsilon n \|v\|$$

さて、$\mathbf{y}$ が、$\|\mathbf{y}\| \leqq \dfrac{\delta}{2}$ を満たすとする。

$$\mathbf{x}_0 = 0, \quad \mathbf{x}_1 = \mathbf{y}, \quad \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - (F(\mathbf{x}_k) - \mathbf{y}) \quad (k \geqq 2)$$

をとる。$\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k+1}$ について、$\|\mathbf{x}_{k-1}\| \leqq \delta$, $\|\mathbf{x}_k\| \leqq \delta$ ならば、

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k\| &= \|\mathbf{x}_k - (F(\mathbf{x}_k) - \mathbf{y}) - \mathbf{x}_{k-1} + (F(\mathbf{x}_{k-1}) - \mathbf{y})\| \\
&= \|\mathbf{x}_k - F(\mathbf{x}_k) - \mathbf{x}_{k-1} + F(\mathbf{x}_{k-1})\| = \|H(\mathbf{x}_k) - H(\mathbf{x}_{k-1})\| \\
&\leqq \varepsilon n \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k-1}\| \leqq \frac{1}{2}\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k-1}\|
\end{aligned}$$

最後の不等式は $\varepsilon \leqq \dfrac{1}{2n}$ としたからである。これにより、

$$\|\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k\| \leqq \frac{1}{2^k}\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0\| = \frac{1}{2^k}\|\mathbf{y}\|$$

従って、

$$\|\mathbf{x}_{k+1}\| \leqq \sum_{\ell=0}^{k} \|\mathbf{x}_{\ell+1} - \mathbf{x}_\ell\| \leqq \frac{1}{2^\ell}\|\mathbf{y}\| < 2\|\mathbf{y}\| \leqq \delta$$

従って、こうして得られる $\mathbf{x}_{k+1}$ は $\|\mathbf{x}_{k+1}\| \leqq \delta$ を満たす。こうして H のリプシッツ評価式は順に成立していることもわかる。こうして、$\mathbf{x}_k$ はコーシー列であり、$\mathbf{x}$ に収束する。収束先の $\mathbf{x}$ に対して、$\mathbf{x} = \mathbf{x} - (F(\mathbf{x}) - \mathbf{y})$ であるから、$F(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$ を満たす。

このような $\mathbf{x}$ で $\|\mathbf{x}\| \leqq \delta$ を満たすものは、一意に定まる。実際、$F(\mathbf{x}_1) = \mathbf{y}_1$, $F(\mathbf{x}_2) = \mathbf{y}_2$ とすると、

$$
\begin{aligned}
F(\mathbf{x}_1) - F(\mathbf{x}_2) &= \mathbf{x}_1 + (F(\mathbf{x}_1) - \mathbf{x}_1) - (\mathbf{x}_2 + (F(\mathbf{x}_2) - \mathbf{x}_2)) \\
&= \mathbf{x}_1 - H(\mathbf{x}_1) - (\mathbf{x}_2 - H(\mathbf{x}_2))
\end{aligned}
$$

だから、

$$
\begin{aligned}
\|F(\mathbf{x}_1) - F(\mathbf{x}_2)\| &\geqq \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\| - \|H(\mathbf{x}_1) - H(\mathbf{x}_2)\| \\
&\geqq \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\| - \frac{1}{2}\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\| \geqq \frac{1}{2}\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|
\end{aligned}
$$

である。従って、$\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\| \leqq 2\|\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2\|$ で、$\mathbf{x}$ は $\mathbf{y}$ により一意に定まる。$G(\mathbf{y}) = \mathbf{x}$ とすると、G は $\|\mathbf{y}\| \leqq \dfrac{\delta}{2}$ で定義されており、リプシッツ連続である。

定義された G が、C^1 であることは次のように示す。

$$
F(\mathbf{x}_2) - F(\mathbf{x}_1) = DF_{(\mathbf{x}_1)}(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) + r(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)\|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\|
$$

$\lim_{\mathbf{x}_2 \to \mathbf{x}_1} r(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = 0$ であるが、書き直すと、

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_1 \\
&= DF_{(G(\mathbf{y}_1))}(G(\mathbf{y}_2) - G(\mathbf{y}_1)) + r(G(\mathbf{y}_1), G(\mathbf{y}_2))\|G(\mathbf{y}_2) - G(\mathbf{y}_1)\|
\end{aligned}
$$

従って、

$$
\begin{aligned}
&G(\mathbf{y}_2) - G(\mathbf{y}_1) \\
&= {DF_{(G(\mathbf{y}_1))}}^{-1}(\mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_1) - r(G(\mathbf{y}_1), G(\mathbf{y}_2))\frac{\|G(\mathbf{y}_2) - G(\mathbf{y}_1)\|}{\|\mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_1\|}\|\mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_1\|
\end{aligned}
$$

である。もしも、$DF = 1 - DH$ で DH の各成分の絶対値が $\dfrac{1}{2n}$ 以下であるとすると、DH^k の各成分の絶対値は $\dfrac{1}{2^k n}$ 以下である。従って、$\sum_{k=0}^{\infty} DH^k$ は絶対収束し、DF^{-1} を与える。従って、$G(V)$ において DF は可逆である。また、$\dfrac{\|G(\mathbf{y}_2) - G(\mathbf{y}_1)\|}{\|\mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_1\|} \leqq 2$ である。従って、$\lim_{\mathbf{y}_2 \to \mathbf{y}_1} r(G(\mathbf{y}_1), G(\mathbf{y}_2))\dfrac{\|G(\mathbf{y}_2) - G(\mathbf{y}_1)\|}{\|\mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_1\|} = 0$ ゆえ、$G(\mathbf{y})$ は全微分可能である。全微分は、${DF_{(G(\mathbf{y}_1))}}^{-1}$ で、$\mathbf{y}_1$ に対して連続である。従って、G は C^1 級である。さて、${DF_{(G(\mathbf{y}))}}^{-1}$ は、

$$\begin{array}{ccccccc} V & \xrightarrow{G} & U & \xrightarrow{DF} & GL(n;\mathbf{R}) & \xrightarrow{\bullet^{-1}} & GL(n;\mathbf{R}) \\ \mathbf{y} & \longmapsto & G(\mathbf{y}) & \longmapsto & DF_{(G(\mathbf{y}))} & \longmapsto & {DF_{(G(\mathbf{y}))}}^{-1} \end{array}$$

という合成写像である。ここで、仮定から DF は C^{r-1} 級写像、$\bullet^{-1}$ は C^∞ 級写像である。$r \geqq 2$ とすると、$r-1 \geqq 1$ であり、上に示した G が C^1 級であることから、$DG = {DF_{(G(\mathbf{y}))}}^{-1}$ は C^1 級となり，G は C^2 級となる。同様に、G が C^s 級が示されると、$s \leqq r-1$ のとき、$DG = {DF_{(G(\mathbf{y}))}}^{-1}$ は C^s 級となり、G は C^{s+1} 級であることがわかる。従って G は C^r 級である。

これで、ヤコビ行列が単位行列のときの逆写像定理が示された。

1.3.2 一般の場合の逆写像定理

一般の場合の逆写像定理の証明は、容易である。$A = DF_{(\mathbf{x}^0)}$ とし、$L(\mathbf{x}) = A(\mathbf{x}-\mathbf{x}^0) + F(\mathbf{x}^0)$ とおく。A は可逆行列（正則行列）であるから、L は逆写像 $L^{-1}(\mathbf{y}) = A^{-1}(\mathbf{y} - F(\mathbf{x}^0)) + \mathbf{x}^0$ をもつ。

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{F} & \mathbf{R}^n \\ +\mathbf{x}_0 \uparrow & & \uparrow L \\ U_0 & \xrightarrow[F_0]{} & \mathbf{R}^n \end{array}$$

$F_0 = \mathbf{x} \longmapsto L^{-1}F(\mathbf{x}+\mathbf{x}_0)$ とおくと、$F(\mathbf{x}) = L(F_0(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0))$ であるが、$DF_0(0) = {DL^{-1}}_{(F(\mathbf{x}_0))}DF_{(\mathbf{x}_0)} = A^{-1}A = 1$ であるから、F_0 は 0 の近傍 V_0 上定義された局所的な逆写像 $G_0 : V \longrightarrow \mathbf{R}^n$ をもつ。

そこで、　$G(\mathbf{y}) = G_0(L^{-1}(\mathbf{y})) + \mathbf{x}_0$ とおくと、G は $F(\mathbf{x}_0)$ の近傍 V で定義され、

$$\begin{aligned} F(G(\mathbf{y})) &= L(F_0(G_0(L^{-1}(\mathbf{y})) + \mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_0)) \\ &= L(F_0(G_0(L^{-1}(\mathbf{y})))) = L(L^{-1}(\mathbf{y})) = \mathbf{y}, \end{aligned}$$

$G(V)$ 上で、

$$\begin{aligned} G(F(\mathbf{x})) &= G_0(L^{-1}(L(F_0(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)))) + \mathbf{x}_0 \\ &= G_0(L^{-1}(L(F_0(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)))) + \mathbf{x}_0 \\ &= G_0(F_0(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)) + \mathbf{x}_0 = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 + \mathbf{x}_0 = \mathbf{x} \end{aligned}$$

である。G は C^r 級写像の合成であるから、C^r 級である。