

1月21日722教室 14:40 - 16:10
最終回
先週までの復習:

1. 数と量
2. 小数
3. 無限和
4. 無限個とはどういうことか
5. 選択公理
6. 長さについて

7. ハウスドルフのパラドックスとバナッハ・タルスキーのパラドックス

今度は球面上の面積を考える．今度は、有限加法性を考えることも難しいという例である。

球面上の面積として回転で不変、 $A = B \sqcup C$ のとき、 $\mu(A) = \mu(B) + \mu(C)$ となるものがあるかという問題である．

7.1. ハウスドルフのパラドックス

選択公理の下、球面の次のような分割が存在する。

$$S^2 = Q \sqcup A \sqcup B \sqcup C,$$

Q は、可算集合 $A, B, C, A \cup B$ は合同である。

7.2. 証明には、回転群の部分群を使う．3次元空間の回転には、必ず軸がある．

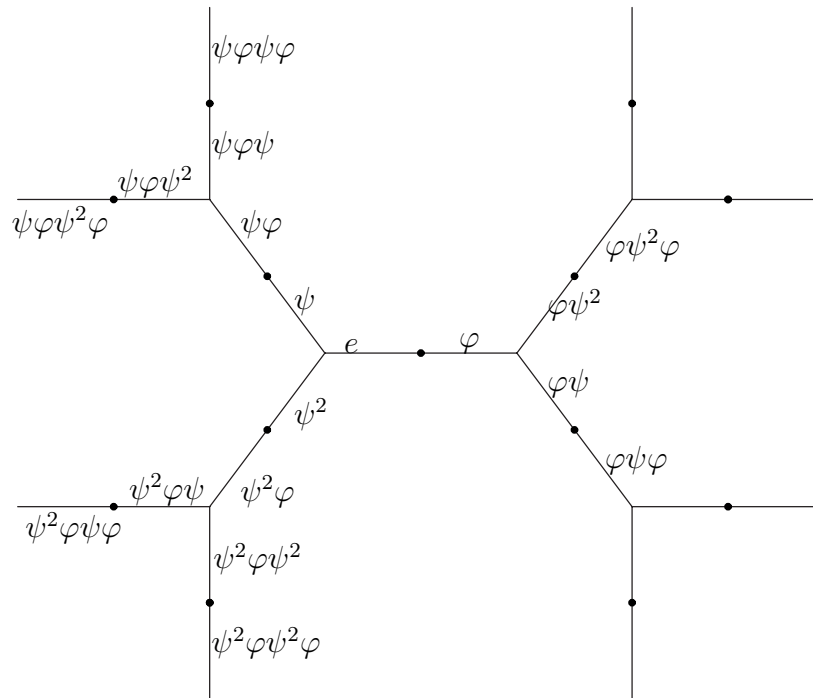
ある軸についての $\frac{1}{2}$ 回転 φ , 別の軸についての $\frac{1}{3}$ 回転 ψ で、どのような有限個の回転の組み合わせ $\varphi\psi^{b_1} \dots \varphi\psi^{b_k}$ ($b_i = 1, 2$), $\varphi\psi^{b_1} \dots \psi^{b_k}\varphi$ ($b_i = 1, 2$), $\psi^{b_1}\varphi \dots \varphi\psi^{b_k}$ ($b_i = 1, 2$), $\psi^{b_1}\varphi \dots \psi^{b_k}\varphi$ ($b_i = 1, 2$) も互いに異なるものが存在する。

これは認めることにする。

7.3. このような φ, ψ の組み合わせであらわされる回転全体 G を考える．これは可算個の回転である。この恒等写像と異なる回転のどれかによって固定される軸と球面の交わりを Q とする。 Q は可算集合である。

- ##### 7.4.
- $\varphi,$
 - $\psi, \psi^2,$
 - $\varphi\psi, \varphi\psi^2,$
 - $\psi\varphi, \psi^2\varphi,$
 - $\varphi\psi\varphi, \varphi\psi^2\varphi,$
 - $\psi\varphi\psi, \psi\varphi\psi^2, \psi^2\varphi\psi, \psi^2\varphi\psi^2,$

これらの G の元を要領よく並べるには次のようにする .



7.5. G の元を

$G = A \sqcup B \sqcup C$ と分割して、

$$\psi(A) = B,$$

$$\psi(C) = A,$$

$$\varphi(A \cup B) = C$$

となるようにできる .

7.6. $C = \{\varphi \dots\}$ 単位元と φ から始まるもの

$A = \{\psi \dots\}$ ψ から始まるもの

$B = \{\psi^2 \dots\}$ ψ^2 から始まるもの

とすると単位行列 e が入らないが、

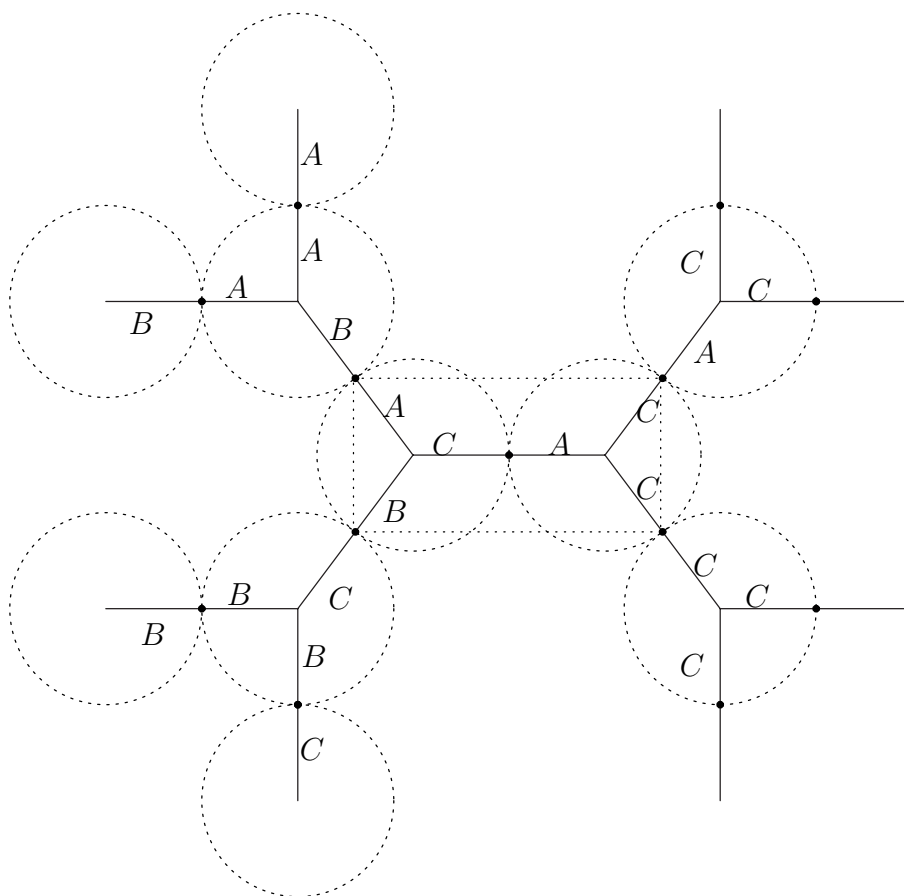
$$\psi(A) = B,$$

$$\psi(C \cup \{e\}) = A,$$

$$\varphi(A \cup B \cup \{e\}) = C$$

これとほとんど同じで、うまくいく分割がある。

7.7. 次のように、 A, B, C を定める。



図の長方形の内側の線分に図のように A, B, C を定める。

長方形の左側の円について $\frac{1}{3}$ 回転して、 A, B, C を1つずつずらし
て符号をつける。これで4つの円の内部が符号づけられる。今度は、長
方形の中心について $\frac{1}{2}$ 回転して、 A, B は C に写し、 C は A に写すよ
うに符号をつける。

長方形の左側の円について $\frac{1}{3}$ 回転、長方形の中心について $\frac{1}{2}$ 回転を
順に行い、全ての線分に符号をつける。これが、 $G = A \sqcup B \sqcup C$ の分
解で、

$$\psi(A) = B,$$

$$\psi(C) = A,$$

$$\varphi(A \cup B) = C$$

となるものを与えている。

7.8. $x \in S^2 \setminus Q$ について、

$$x_1 \sim x_2 \iff \exists g \in G, g(x_1) = x_2$$

とする。これは S^2 上でも同値関係であるが、とくに $S^2 \setminus Q$ においては $g_1(x_1) = x_2, g_2(x_1) = x_2$ ならば、 $g_2^{-1}g_1(x_1) = x_1$ で、 $g_1 = g_2$ となる。

同値類の集合を E とし、 $f: S^2 \setminus Q \rightarrow E$ に対して、 $h: E \rightarrow S^2 \setminus Q$ を定義する。

$$A = \{g(h(y)) \mid y \in E, g \in \mathbf{A}\}$$

$$B = \{g(h(y)) \mid y \in E, g \in \mathbf{B}\}$$

$$C = \{g(h(y)) \mid y \in E, g \in \mathbf{C}\}$$

とすると、

$$\psi(A) = B,$$

$$\psi(C) = A,$$

$$\varphi(A \cup B) = C$$

となる。

これは、 $S^2 \setminus Q$ が合同な、 A, B, C で、さらに $A \cup B$ と C が合同なものに分割できることを示している。

(ハウスドルフのパラドックス)

7.9. バナッハ・タルスキーのパラドックスは、これに似ている次の主張である。

U, V を内点をもつ \mathbb{R}^3 の有界集合とする。 $U = U_1 \sqcup \cdots \sqcup U_k, V = V_1 \sqcup \cdots \sqcup V_k$ と分割して、 U_i と V_i は合同であるようにできる。

<http://suuri.sci.ibaraki.ac.jp/~yamagami/btp/btp.html>

参照

8. 参考 / ウルトラフィルター

8.1. 選択公理を仮定すると次のような \mathcal{F} が存在することが示される。

自然数の部分集合の集合 \mathcal{F} で、つぎを満たすものが存在する。

$$F \in \mathcal{F} \implies F \neq \emptyset$$

$$F_1 \in \mathcal{F} \text{ かつ } F_1 \subset F_2 \implies F_2 \in \mathcal{F}$$

$$F_1 \in \mathcal{F} \text{ かつ } F_2 \in \mathcal{F} \implies F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$$

$$F_1 \cup F_2 = \mathbb{N} \text{ かつ } F_1 \cap F_2 = \emptyset \implies F_1 \in \mathcal{F} \text{ または } F_2 \in \mathcal{F}$$

$$\mathbb{N} \setminus F \text{ が有限集合} \implies F \in \mathcal{F}$$

このような \mathcal{F} をウルトラフィルターとよぶ。

8.2. このような \mathcal{F} を構成することは出来ていない。 \mathcal{F} はかなり異常なものである。

8.3. このような \mathcal{F} の存在の証明は次のようにして行なう (大体の考え方) (ツォルンの補題の証明と同様)

$$F \in \mathcal{F} \implies F \neq \emptyset$$

$$F_1 \in \mathcal{F} \text{ かつ } F_1 \subset F_2 \implies F_2 \in \mathcal{F}$$

$$F_1 \in \mathcal{F} \text{ かつ } F_2 \in \mathcal{F} \implies F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$$

$N \setminus F$ が有限集合 $\implies F \in \mathcal{F}$

を満たす \mathcal{F} は、 $\mathcal{F} = \{\text{有限集合の補集合}\}$ とすれば存在する (**)

\mathcal{F} について、 $F_1 \cup F_2 = N$ かつ $F_1 \cap F_2 = \emptyset$ とするとき、 F_1 も F_2 も \mathcal{F} の元でないとする。

$\mathcal{F}_1 = \mathcal{F} \cup \{F_1 \cap F \mid F \in \mathcal{F}\}$, $\mathcal{F}_2 = \mathcal{F} \cup \{F_2 \cap F \mid F \in \mathcal{F}\}$ は、ともに上の性質を満たす。たとえば、 $F_1 \cap F = \emptyset$ とすると、 $F \subset F_2$ で、 $F_2 \in \mathcal{F}$ となる。

従って、 \mathcal{F} よりも多くの元を含む集合が存在する。

もしも \mathcal{F} よりも多くの元を含む集合に対し、(*)「 $F_1 \cup F_2 = N$ かつ $F_1 \cap F_2 = \emptyset$ かつ F_1 も F_2 も \mathcal{F} の元でない」ような F_1, F_2 が存在しないとすると、「 $F_1 \cup F_2 = N$ かつ $F_1 \cap F_2 = \emptyset \implies F_1 \in \mathcal{F}$ または $F_2 \in \mathcal{F}$ 」が満たされることになる。

このような (*) を満たす集合が存在しないとする。

(**) の \mathcal{F} から始めて、 \mathcal{F}_1 を作り、それに対して、 \mathcal{F}_{11} を作るという操作は際限なくできる。

それは、 N の部分集合の個数を超えてできることになり、 \mathcal{F} が、 N の部分集合になり得なくなるまで続けられる。これは矛盾である。

8.4. 集合 A の部分集合の集合は 2^A のように書かれる。これは A 上の 2 値関数全体を表す。 A の部分集合 B に対し、 B の元で 1, $A \setminus B$ の元で 0 となる 2 値関数を対応させるものである。

このとき、常に $\#A < \#2^A$ である。

$\#A = \#2^A$ とすると、全単射 $f : A \rightarrow 2^A$ が存在する。 $2^A = \{f(a) \mid a \in A\}$ であるが、

$A = \{a \in A \mid a \in f(a)\} \sqcup \{a \in A \mid a \notin f(a)\}$ である。

このとき、 $C = \{a \in A \mid a \notin f(a)\}$ が A の部分集合であるから、 $C = f(x)$ と書かれる。

$x \in A$ は $x \in C$ または $x \notin C$ を満たす。

$x \in C \implies x \notin f(x) = C$

$x \notin C \implies x \in f(x) = C$

となり、ともに不合理である。

従って、 $A \rightarrow 2^A$ となる全単射は存在しない。

(これも、対角線論法と呼ばれる。 $A = N$, 2 進法を考えたものが、 $\#NN < \#[0, 1)$ の証明であった。)

8.5. ラッセルの逆理。集合の全体は集合ではない。

U を集合の全体とする。 U が集合とすると、

$U = \{a \in U \mid a \in a\} \sqcup \{a \in U \mid a \notin a\}$

$C = \{a \in U \mid a \notin a\}$ は部分集合として集合である。

$C \in U$ は $C \in C$ または $C \notin C$ を満たす。

$C \in C \implies C \notin C$

$C \notin C \implies C \in C$

となり、ともに不合理である。
従って、集合の全体は集合ではない。

8.6. ウルトラフィルター \mathcal{F} を使って、実数を含む数の体系を作ることができる。

実数列 $\{a_n\}_{n \in \mathbf{N}}$, $\{b_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ に対し、

$$\{a_n\} \sim \{b_n\} \iff \{n \in \mathbf{N} \mid a_n = b_n\} \in \mathcal{F}$$

とする。これは同値関係となる。この同値類の集合を ${}^*\mathbf{R}$ と書く。

${}^*\mathbf{R}$ に項別に加減乗除を考えることで、 ${}^*\mathbf{R}$ でも実数 \mathbf{R} と同様に加減乗除ができることがわかる。

また順序も $\{a_n\} < \{b_n\} \iff \{n \in \mathbf{N} \mid a_n < b_n\} \in \mathcal{F}$ で定まる。

\mathbf{R} は、一定値の数列の同値類として、 ${}^*\mathbf{R}$ に含まれる。

$$8.7. \quad a_n = \sum_{i=1}^n \frac{9}{10^i} \text{ とし、}$$

$$b_n = 1$$

とすると、

$\{a_n\}_{n \in \mathbf{N}} < \{b_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ で等しくない。

すなわち、 $0.999999\dots$ を列のまま考えると、

$0.999999\dots \neq 1$ となるような世界を形作っている。

8.8. そうは言うものの、なにも代償を払っていないわけではない。

$\{n\}_{n \in \mathbf{N}}$, $\{n^2\}_{n \in \mathbf{N}}$, \dots は異なる無限大を表し、

$\{\frac{1}{n}\}_{n \in \mathbf{N}}$, $\{\frac{1}{n^2}\}_{n \in \mathbf{N}}$, \dots は異なる無限小を表す。

とくにアルキメデスの公理は成立しない。

$\{\frac{1}{n}\}_{n \in \mathbf{N}} < \{1\}_{n \in \mathbf{N}}$ であるが、任意の自然数 m に対し、

$$m\{\frac{1}{n}\}_{n \in \mathbf{N}} = \{\frac{m}{n}\}_{n \in \mathbf{N}} < \{1\}_{n \in \mathbf{N}}$$

このような量を全て認めることと引き換えに、やはり $0.999999\dots \neq 1$ となる世界を作ったということである。

8.9. この ${}^*\mathbf{R}$ でも、その中に埋め込まれた \mathbf{R} との比較で、たとえば、 $(\{a_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ が無限小とは、すべての $N \in \mathbf{N}$ に対し $|a_n| \leq \frac{1}{N}$) のような定義ができる。

これを進めて、さらに微分商 $\frac{dy}{dx}$ を無限小の比としてとらえることも可能である。

このような体系は、Nonstandard analysis と呼ばれている。それが創造性を持つものであるかどうかは、不明である。