１月１４日７２２教室　１４：４０−１６：１０
次回は、１月２１日
先週までの復習：

1. 数と量

2. 小数

3. 無限和

4. 無限個とはどういうことか

4.1.　全単射 $f : A \longrightarrow B$ が存在するとき、$\#A = \#B$ と定義する．

4.2.　単射 $f : A \rightarrowtail B$ が存在するとき、$\#A \leqq \#B$ と定義する．

4.3.　ベルンシュタインの定理は、$\#A \leqq \#B$ かつ $\#B \leqq \#A$ ならば、$\#A = \#B$ となることを意味する．つまり、記号に整合性がある．

4.4.　無限集合においては、全射でない単射 $f : A \rightarrowtail B$ があるからといって、$\#A \neq \#B$ とはいえない．

4.5.　このような単射 $A \longrightarrow A$ があるというのが、デデキンドの無限集合の定義。

4.6.　さて、集合を比べる手段として全射 $f : A \twoheadrightarrow B$ がある場合を考える。
　A の元の個数は、B の元の個数とよりも多いといってよいか？
　すなわち、全射 $A \twoheadrightarrow B$ があれば、単射 $B \rightarrowtail A$ があるか？
　これは、$b \in B$ に対して、$\{a \in A \mid f(a) = b\} \neq \emptyset$ の元を１個とることにより、定義出来そうである．

4.7.　選択公理
　全射 $f : A \twoheadrightarrow B$ に対し、$g : B \longrightarrow A$ で $f(g(b)) = b$ となるものが存在する。

4.8.　この g は単射である．$g(b) = g(b') \implies f(g(b)) = f(g(b'))$、すなわち $b = b'$.
　従って、「選択公理」の下で、全射 $f : A \twoheadrightarrow B$ が存在すれば、$\#B \leqq \#A$ である。

4.9.　選択公理は、現代の数学ではほぼ認められ使われているが，選択公理と異なる公理を採用することも出来る．

5. 選択公理

　参考書：田中尚夫著　「選択公理と数学」　遊星社

5.1.　「選択公理」を仮定すると２つの集合 A, B に対し、$\#A \leqq \#B$ または $\#B \leqq \#A$ が成立する．

仮定しないと、こんなことも証明できないが、それが困ることかどうかは何とも言えない．

5.2.　選択公理は、カントルの集合論の提案の後、整列可能定理を示すためにツェルメロにより導入された。

5.3.　整列可能定理は次のような順序をどのような集合に対しても導入できることを述べるものである。

１．どの２元も大小の比較可能。

２．どのような部分集合にも最小元がある。

このとき、どの元にも次の元が定まる．

$a+1 = \min\{x \mid x > a\}$

5.4.　例。

自然数の集合

自然数の組の集合 $\{(a,b)\}$ について

$$(a_1,b_1) \leqq (a_2,b_2) \iff a_1 \leqq a_2 \text{または} (a_1 = a_2 \text{かつ} b_1 \leqq b_2)$$

このとき $(1,1), (1,2), (1,3), \ldots, (2,1), (2,2), (2,3), \ldots$ というように並べられる．次の元は定まるが、直前の元は定義されるとは限らない。

5.5.　集合 A, B がともにこのような順序を持つときに、最初の元から順に対応させると、単射 $A \rightarrowtail B$ または単射 $B \rightarrowtail A$ が定まるという論法により、集合 A, B は比較可能である．

つまり、

$$\begin{aligned}
A_0 = \{ \quad & a \in A \mid \exists b \in B, \text{順序を保つ全単射} \\
& \{x \in A \mid x \leqq a\} \longrightarrow \{x \in B \mid x \leqq b\}\} \\
B_0 = \{ \quad & b \in B \mid \exists a \in B, \text{順序を保つ全単射} \\
& \{x \in B \mid x \leqq b\} \longrightarrow \{x \in A \mid x \leqq a\}\}
\end{aligned}$$

とすると、$A_0 \longrightarrow B_0$ という全単射がある。($A = A_0$ または $B = B_0$) が成立しないとすると、$\min(A \setminus A_0)$ が A_0 の元となる．

5.6.　整列可能定理。

大体の考え方。

集合 A の A と異なる部分集合の全体 $2^A \setminus A$ 上で、部分集合の補集合の元を１つ対応させる写像 $f : 2^A \setminus A \longrightarrow A$ を考える．(選択公理を使う。) $f(\emptyset) < f(f(\emptyset)) < \ldots$ のように順序をつけていくことを考える．順序が入った部分集合 B に対し、$B \neq A$ ならば $B \cup \{f(B)\}$ に順序を入れることができる．このような順序が入る最大の集合は A となり、A に求める順序が入る．

6. 長さについて

ところが、長さの問題を考えていると、選択公理から、長さを持たない $[0,1)$ の部分集合の存在が示される．

6.1.　長さのもつべき性質は何かということを考えると、次の２つの性質が必要であろう。

$A = B \cup C$, $B \cap C = \emptyset$ のとき、$\mu(A) = \mu(B) + \mu(C)$.

平行移動 t に対し、$\mu(A) = \mu(t(A))$.

最初の性質を、さらに強めて $A = A_1 \cup A_2 \cup \dots$ という可算個に分けても、$A_i \cap A_j = \emptyset$ のとき、$\mu(A) = \displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$ が成立するというものを考える．これを「可算加法性」という。この性質は、正の数の可算和が定義されていたことに対応するものである。

6.2.　選択公理を仮定すると、$[0,1)$ を加算個の集合 A_i に分け、A_i, A_j はそれぞれを２つの部分に分けると分割したものは合同（平行移動で写る）となる。

$A_i = B_{ij1} \sqcup B_{ij2}$, $A_j = B_{ji1} \sqcup B_{ji2}$, $t_{ij1}(B_{ji2}) = B_{ij1}$, $t_{ij2}(B_{ji1}) = B_{ij2}$.

6.3.　もしも、可算加法性と平行移動に対する不変性を持つ長さが A_q に対して定義されたとすると、それらは各 A_q に対して一致しなければならないが、加算個同じものを加えて 1 となることは、ありえない。

6.4.　$[0,1)$ 上に同値関係を入れる。

$x_1 \sim x_2 \Longleftrightarrow x_1 - x_2$が有理数

同値関係とは、$a \sim a$（反射律），$a \sim b \Longrightarrow b \sim a$（対称律），$a \sim b$ かつ $b \sim c \Longrightarrow a \sim c$（推移律）を満たすものである．

6.5.　A_x を x を含む同値類（x と同値な元全体の集合）とする。A_x, A_y は交わらない、または、一致する．$[0,1)$ は可算集合ではないから、非加算個の同値類に分かれる。C を同値類を元とする集合とする．C は非加算集合である．

$f(x) = A_x$ で定まる $f : [0,1) \twoheadrightarrow C$ という写像がある。

6.6.　まず、選択公理から、$g : C \longrightarrow [0,1)$ で、$f(g(c)) = A_{g(c)} = c$ となるものがある．

$A_0 = \{g(c) \mid c \in C\}$ とする。有理数 $q \in [0,1)$ に対し、

$A_q = \{a + q \mid a \in A_0 \cap [0, 1-q)\} \cup \{a + q - 1 \mid a \in A_0 \cap [1-q, 1)\}$ とする。

そうすると、A_{q_1} と A_{q_2} は $q_1 = q_2$ のとき一致し、$q_1 \neq q_2$ のときは交わらない。

従って、$[0,1)=\displaystyle\bigcup_{q\in[0,1)\cup\mathbf{Q}} A_q$ となる。これは加算個の集合への分割である．

6.7.　A_{q_1}, A_{q_2} $(0 \leqq q_1 < q_2 < 1)$ に対し、

$$
\begin{aligned}
A_{q_1} = \; & \{a+q_1 \mid a \in A_0 \cap [0,1-q_1)\} \cup \{a+q_1-1 \mid a \in A_0 \cap [1-q_1,1)\} \\
= \; & \{a+q_1-1 \mid a \in A_0 \cap [1-q_1,1)\} \cup \{a+q_1 \mid a \in A_0 \cap [0,1-q_2)\} \\
& \cup \{a+q_1 \mid a \in A_0 \cap [1-q_2,1-q_1)\} \\
A_{q_2} = \; & \{a+q_2 \mid a \in A_0 \cap [0,1-q_2)\} \cup \{a+q_2-1 \mid a \in A_0 \cap [1-q_2,1)\} \\
= \; & \{a+q_2-1 \mid a \in A_0 \cap [1-q_2,1-q_1)\} \\
& \cup \{a+q_2-1 \mid a \in A_0 \cap [1-q_1,1)\} \cup \{a+q_2 \mid a \in A_0 \cap [0,1-q_2)\}
\end{aligned}
$$

それぞれの、２行に分けた式を $B_{q_1q_21}$, $B_{q_1q_22}$, $B_{q_2q_11}$, $B_{q_2q_12}$ とすると、$t_{q_2-q_1}(B_{q_1q_21})=B_{q_2q_12}$, $t_{q_2-q_1-1}(B_{q_1q_22})=B_{q_2q_11}$ となる。

6.8.　以上で、選択公理を認めると、長さが定義できない集合が存在することが示せた．これを非可測集合とよぶ。（ルベーグの積分の理論の中で、集合の可測性が必ずしも成り立たないことは、解析学を少し難しいものにした.）選択公理を仮定しない場合、線分の部分集合に、可算加法性と平行移動に対する不変性を持つ長さが定義できるようにする公理を考えることもできる．