１１月１２日７２２教室　１４：４０－１６：１０
１１月１９日、１２月３日は休講
次回は１１月２６日、その次は１２月１０日、１２月１７日、
１月に３回か４回
これから参考になるページ
http://www4.ocn.ne.jp/~arai/
先週までの復習：

1. 数と量

2. 小数

2.1.　問題. 比があれば、連分数、小数が得られるのは良いが、連分数、小数は比を表すか？

言い換えると、比に対して、連分数、小数は一通りに定まるか？

$[0,\infty) \ni x \longmapsto (n_0, n_1, n_2, \ldots, n_k) \quad (n_k \neq 1)$

または

$[0,\infty) \ni x \longmapsto (n_0, n_1, n_2, \ldots, n_k. \ldots)$

小数

$[0,\infty) \ni x \longmapsto n_0.a_1a_2\ldots a_k$

$[0,\infty) \ni x \longmapsto n_0.a_1a_2\ldots a_k\ldots$

a_k は 0, ..., 9.

これらは、全射であるか？単射であるか？

2.2.　$0.a_1a_2a_3\cdots = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{10^k}$ というのは、単位の長さの $\dfrac{1}{10^k}$ を a_k 個とったという見方をそのまま式に書いたものである。

この右辺が意味を持つかどうかは、重要な問題を含んでいる。

ここからは、もう一度議論を繰り返す。

2.3.　連続の公理。

実数の集合 $\mathbf{R}$ は次の性質を持つ。

$A \subset \mathbf{R}$ とする。全ての元 $a \in A$ は、ある実数 M がよりも小である（$a < M$）とする。このとき次のような実数 r が存在する。全ての元 $a \in A$ に対し、$a \leqq r$. $\ell < r$ を満たす ℓ に対し、$\ell < a$ となる元 $a \in A$ が存在する。

これを連続の公理という。

このような r はただ１つに限る。

$r = \sup A$ と書かれ、A の上限 (supremum) と呼ばれる。

連続の公理とは、「上に有界な集合は上限を持つ」というように言われる。

これは、A の元の -1 倍したものの集合 B を考えると、「下に有界な集合は下限を持つ」というようにいっても同じである。下限 (infimum) は $l = \inf B$ と書かれる。

2.4. $0.a_1a_2a_3a_4a_5\ldots$ に対し、
$A = \{0.a_1,\ 0.a_1a_2,\ 0.a_1a_2a_3,\ 0.a_1a_2a_3a_4,\ 0.a_1a_2a_3a_4a_5,\ \ldots\}$ を考えると、$a \in A$ ならば $a < 1$ だから、$\sup A$ がある。これが、小数 $0.a_1a_2a_3a_4a_5\ldots$ が表す実数である。

2.5. $A = \{0.9,\ 0.99,\ 0.999,\ 9999,\ 0.99999,\ \ldots\}$ に対して、$\sup A = 1$ である。
$\ell < 1$ とすると、$1 - \ell > 0$,（アルキメデスの公理により）ある自然数 n に対して、$n(1-\ell) > 1$.
$10^k > n$ とすると（たとえば $k \geqq n$)、$10^k(1-\ell) > 1$, $1 - \ell > 10^{-k}$, (9 が k 個続く)$0.9\ldots9 < \ell$.
これが、連続の公理を認めたときの $0.99999\cdots = 1$ の証明である。

3. 無限和

無限の和は、項別に足したり引いたり、掛けたり割ったりしても良いのであろうか？

3.1. 我々が持っている答。
正の数の無限の和は、確定する。

3.2. $a_k > 0$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ に対し、$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ が定まる。
これは、和の順序によらない。

3.3. 無限の和は多くの問題を内包している。
たとえば、
$1 - 1 + 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ は、初項 1 公比 -1 の等比級数である。

3.4. しかし、$1 - 1 + 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots = \dfrac{1}{1-(-1)} = \dfrac{1}{2}$ は不合理である。

3.5. もっと難しい和として、
$-1 + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{5} + \cdots = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ がある。
この和は、順に加えた和の極限としては $-\log 2$ であることがわかる。
難しい議論であるが、初項 1 公比 x の等比級数は

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

これを項別積分できるとすると

$-\log(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$

$(\frac{\mathrm{d}\log(1-x)}{\mathrm{d}\,x} = -\frac{1}{1-x})$ 不定積分の積分定数の不定性があるが、$x=0$ のとき両辺ともに x になるから等式は正しい。

ここで $x=-1$ とすると $-\log 2 = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$

(このように代入できるのはアーベルの定理と呼ばれるものによっている。)

しかし、$x=1$ は代入できない。

実は、$-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \ldots$ の和の順序を換えると、どんな実数にも収束させることができるのである。

3.6.　何故、正の実数の和は確定するのであろうか？

3.7.　正の実数 a_k に対し、そのうちの有限個の和の全体のなす集合 A を考える。

A が上に有界であるときに、$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sup A$,

A が上に有界でないとき、$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = +\infty$ とする。

（確定するという意味の中に、$+\infty$ の場合も含めている。）

3.8.　$\sum \frac{1}{n}$ はいくつだろうか？

$\sum \frac{1}{n^2}$ はいくつだろうか？

$(= \frac{\pi^2}{6}$ の証明には

$\frac{1}{2z}(\frac{1}{\tan z} - \frac{1}{z}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^2 - n^2\pi^2}$

$\frac{z}{\tan z} = 1 - \frac{z^2}{3} - \frac{z^4}{45} - \ldots$ を使う。)

3.9.　$\sum \frac{1}{n} = \infty$

何故か？

3.10. $a_k \geqq b_k > 0$ ならば、$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k \geqq \sum_{k=1}^{\infty} b_k$ である。

なぜなら、$r = \sup\{\sum_{\text{finite}} a_k\}$, $\sup\{\sum_{\text{finite}} b_k\}$ について、

$r \geqq \sum_{\text{finite}} b_k$ ならば $r \geqq \sum_{\text{finite}} a_k$ だから、

$r \geqq \sup\{\sum_{\text{finite}} a_k\}$.

3.11. $a_2 = \frac{1}{2}$, $a_3 = \frac{1}{3} > \frac{1}{4}$, $a_4 = \frac{1}{4}$,

$a_5 = \frac{1}{5} > \frac{1}{8}, \ldots, a_8 = \frac{1}{8}$,

$a_9 = \frac{1}{5} > \frac{1}{2^4}, \ldots, a_{16} = \frac{1}{2^4}$,

一方、$\frac{1}{2} + 2\frac{1}{4} + 4\frac{1}{8} + \cdots = 1 + 1 + 1 + \cdots = \infty$

3.12. $y = \frac{1}{x}$ のグラフを考える。

$[1,2] \times [0,1]$, $[2,3] \times [0, \frac{1}{2}]$, $[3,4] \times [0, \frac{1}{3}]$, $[4,5] \times [0, \frac{1}{4}], \ldots$

という長方形の面積の和が、$\sum \frac{1}{n}$. これは、$y = \frac{1}{x}$ のグラフと x 軸の間の、$x \geqq 1$ の部分の面積よりも大きい。ところが、グラフと x 軸の間の、$1 \leqq x \leqq 2$ の部分の面積は、y 方向に $\frac{1}{2}$ 倍し、x 方向に 2 倍して、グラフと x 軸の間の、$2 \leqq x \leqq 4$ の部分の面積と等しく、これは、同様にして、グラフと x 軸の間の、$4 \leqq x \leqq 8$ の部分の面積と等しい。こうして、同じ面積が無限に取れるので、$y = \frac{1}{x}$ のグラフと x 軸の間の、$x \geqq 1$ の部分の面積は ∞ となる。