１１月５日７２２教室　１４：４０－１６：１０
１１月１９日、１２月３日は休講
先週の復習：

1. 数と量

１０月２９日には、ユークリッドの原論について、公理（公準）、定理（命題）を紹介した。

また、実際に、循環小数の計算、連分数の計算をパソコンで行なった。

2. 小数

2.1.　小数は、位取りと零の発見の後に得られた概念である。
１つの区間を２等分、３等分、５等分、…としていくのは、
平行線を使った作図で求めることができる。
２等分は、垂直２等分線の作図でもできる。

2.2.　小数の有用性は、「大きさが感覚的にわかること（これは小数に慣れた我々だからかもしれない）、近似したときの誤差が容易に表現できることである。

加法、減法、乗法、除法については、繰り上がり、繰り下がり等に注意すれば容易である。

なぜ、この算法が、無限の小数に対して用いても良いかは、少し注意して考える必要がある。

2.3.　問題点。
有理数を表すために無限小数が現れる。（比を表すことには向いていない。）

2.4.　例えば

$\frac{1}{7}$　周期　6

$\frac{1}{13}$　周期　6

$\frac{1}{17}$　周期　16

$\frac{1}{19}$　周期　18

$\frac{1}{23}$　周期　22

$\frac{1}{29}$　周期　28

$\frac{1}{31}$　周期　15

$\frac{1}{37}$　周期　3

$\frac{1}{43}$ 周期 21
$\frac{1}{47}$ 周期 46
$\frac{1}{53}$ 周期 13
$\frac{1}{59}$ 周期 58
$\frac{1}{61}$ 周期 60
$\frac{1}{67}$ 周期 33
$\frac{1}{71}$ 周期 35
$\frac{1}{73}$ 周期 8
$\frac{1}{79}$ 周期 13
$\frac{1}{83}$ 周期 41
$\frac{1}{89}$ 周期 44
$\frac{1}{97}$ 周期 96

これらは素数の逆数については、素数を法とする乗法群は、位数（素数－１）の巡回群。

従って、[１０倍] が、（素数－１）の巡回群でどのような位数かがわかればよい。

2.5.　有理数を小数にしたときに何故循環するか？割り算の余りを考えると、有限通りしかない、この中で [１０倍] して割り算のあまりを取るという写像を考えると、必ず、周期的になる。

2.6.　連分数と小数についてまとめると

有理数は有限連分数として書かれる。

無理数は、無限連分数になってしまうもの（と定義した)。

無理数はあるかといわれると $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ などがそうである。

また、

有理数は、割り算のアルゴリズムで計算すると循環小数となる。（逆に、循環小数に対して、（そのまま１０倍する、引き算をすることができれば）有理数を見つけることができる。）

無理数は循環しない小数となる。

2.7.　循環する連分数は、２次の無理数となる。

2.8.　問題. 比があれば、連分数、小数が得られるのは良いが、連分数、小数は比を表すか？

言い換えると、比に対して、連分数、小数は一通りに定まるか？

$[0,\infty) \ni x \longmapsto (n_0, n_1, n_2, \ldots, n_k) \quad (n_k \neq 1)$

または

$[0,\infty) \ni x \longmapsto (n_0, n_1, n_2, \ldots, n_k. \ldots)$

小数

$[0,\infty) \ni x \longmapsto n_0.a_1a_2\ldots a_k$

$[0,\infty) \ni x \longmapsto n_0.a_1a_2\ldots a_k\ldots$

a_k は $0, \ldots, 9.$

これらは、全射であるか？単射であるか？

2.9.　問。

$1 = 0.999999\ldots$ であるか？

$0.999999\ldots$ は現れるか？

$0.999999\ldots$ は長さを表すか？

一般に、数字の列は長さを表すか？

$0.999999\ldots$ は 0.9, 0.99, 0.999, 0.9999, $\ldots$ よりも大きく１よりも小さい数か？

2.10.　前に述べたように、無限小数を [10 倍] することと、無限小数の引き算を、同じものをキャンセルする形のものをみとめると、

$x = 0.999999\ldots$

$10x = 9.999999\ldots$

から $9x = 9$, $x = 1$ となる。

しかしこれは、無限小数に対し、掛け算引き算ができることを仮定している。

2.11.　開区間と閉区間、１点の長さ＝０.

１の長さの半開区間 $[0,1)$ に対し、長さ $\dfrac{1}{10}$ の閉区間、長さ $\dfrac{1}{100}$ の閉区間、長さ $\dfrac{1}{1000}$ の閉区間を順にとって行くと、$0.999999\ldots$ という表示が現れてしまう。

これから、閉区間 $[0,1]$ の長さは、1, 半開区間 $[0,1)$ の長さは $0.999999\ldots$ という結論が得られるとすると、これらは異なるようにみえる。しかし、閉区間 $[0,1]$ と半開区間 $[0,1)$ は１点 1 が含まれるかどうかしか異ならないのだから、１点の長さは 0 とすると、$1 = 0.999999\ldots$ ということになってしまう。

2.12.　無限の小数が現れた背景を考えると、単位の長さを定めて、それから $\dfrac{1}{10}$ の長さ、$\dfrac{1}{100}$ の長さ、$\dfrac{1}{1000}$ の長さを、ユークリッドの方法に従えば、平行線を使った比例によって定め、与えられた線分の上に、

単位の長さ、$\dfrac{1}{10}$ の長さ、$\dfrac{1}{100}$ の長さ、$\dfrac{1}{1000}$ の長さ…を繰り返しとって得られるものである。

取る長さを、閉区間にとるか、開区間にとるかを、きちんと決めると、$1, 0.999999\ldots$ の両方が結果として現れることはないのではないかと考えられる。

つまり、

$[0,\infty) \ni x \longmapsto n_0.a_1a_2\ldots a_k\ldots$

は全射ではないという解釈は可能である。

取る長さを、閉区間にとるか、開区間にとるかを、あいまいにしても良いことにすると、１点の長さを 0 とするために、「$0.\ldots a999999\ldots$ は $0.\ldots(a+1)000000\ldots$ と同じ数を表す。」となってしまったと考えることもできる。

2.13.　$0.a_1a_2a_3\cdots = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{10^k}$ というのは、単位の長さの $\dfrac{1}{10^k}$ を a_k 個とったという見方をそのまま式に書いたものである。

この右辺が意味を持つかどうかは、重要な問題を含んでいる。

2.14.　連続の公理。

実数の集合 $\mathbf{R}$ は次の性質を持つ。

$A \subset \mathbf{R}$ とする。全ての元 $a \in A$ は、ある実数 M がよりも小である（$a < M$）とする。このとき次のような実数 r が存在する。全ての元 $a \in A$ に対し、$a \leqq r$. $\ell < r$ を満たす ℓ に対し、$\ell < a$ となる元 $a \in A$ が存在する。

これを連続の公理という。

このような r はただ１つに限る。

$r = \sup A$ と書かれ、A の上限 (supremum) と呼ばれる。

連続の公理とは、「上に有界な集合は上限を持つ」というように言われる。

2.15.　$0.a_1a_2a_3a_4a_5\ldots$ に対し、

$A = \{0.a_1,\ 0.a_1a_2,\ 0.a_1a_2a_3,\ 0.a_1a_2a_3a_4,\ 0.a_1a_2a_3a_4a_5,\ \ldots\}$ を考えると、$a \in A$ ならば $a < 1$ だから、$\sup A$ がある。これが、小数 $0.a_1a_2a_3a_4a_5\ldots$ が表す実数である。

2.16.　$A = \{0.9,\ 0.99,\ 0.999,\ 9999,\ 0.99999,\ \ldots\}$ に対して、$\sup A = 1$ である。

$\ell < 1$ とすると、$1-\ell > 0$,（アルキメデスの公理により）ある自然数 n に対して、$n(1-\ell) > 1$.

$10^k > n$ とすると（たとえば $k \geqq n$）、$10^k(1-\ell) > 1$, $1-\ell > 10^{-k}$, (9 が k 個続く)$0.9\ldots9 < \ell$.

これが、連続の公理を認めたときの $0.99999\cdots = 1$ の証明である。

3. 無限和

無限の和は、項別に足したり引いたり、掛けたり割ったりしても良いのであろうか？

3.1.　我々が持っている答。
正の数の無限の和は、確定する。

3.2.　$a_k > 0\ (k = 1, 2, 3, \ldots)$ に対し、$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ が定まる。
これは、和の順序によらない。

3.3.　無限の和は多くの問題を内包している。
たとえば、
$1 - 1 + 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ は、初項 1 公比 -1 の等比級数である。

3.4.　初項 a, 公比 r の等比級数に対し、$|r| < 1$ ならば、$a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots = \dfrac{a}{1-r}$ となる。
$x = a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \ldots$ とすると、
$xr = \ \ ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \ldots$
$(1-r)x = a$
$x = \dfrac{a}{1-r}$

3.5.　しかし、$1 - 1 + 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots = \dfrac{1}{1-(-1)} = \dfrac{1}{2}$ は不合理である。

3.6.　もっと難しい和として、
$$-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$ がある。
この和は、順に加えた和の極限としては $-\log 2$ であることがわかる。
難しい議論であるが、初項 1 公比 x の等比級数は
$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$$
これを項別積分できるとすると
$$-\log(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$$
$\left(\dfrac{\mathrm{d}\log(1-x)}{\mathrm{d}\,x} = -\dfrac{1}{1-x}\right)$ 不定積分の積分定数の不定性があるが、$x = 0$ のとき両辺ともに x になるから等式は正しい。

ここで $x=-1$ とすると $-\log 2=-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\cdots=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$

しかし、$x=1$ は代入できない。

実は、$-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\ldots$ の和の順序を換えると、どんな実数にも収束させることができるのである。