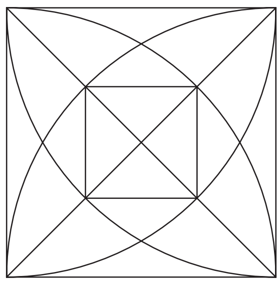
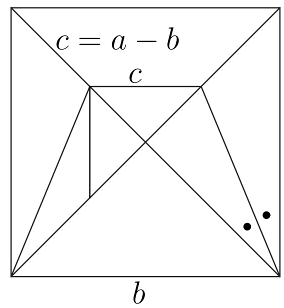
１０月１５日７２２教室　１４：４０－１６：１０
先週の復習：

1. 数と量

２つの線分の比
ユークリッドの互除法
アルキメデスの公理

１６． ２の平方根　正方形の一辺と対角線

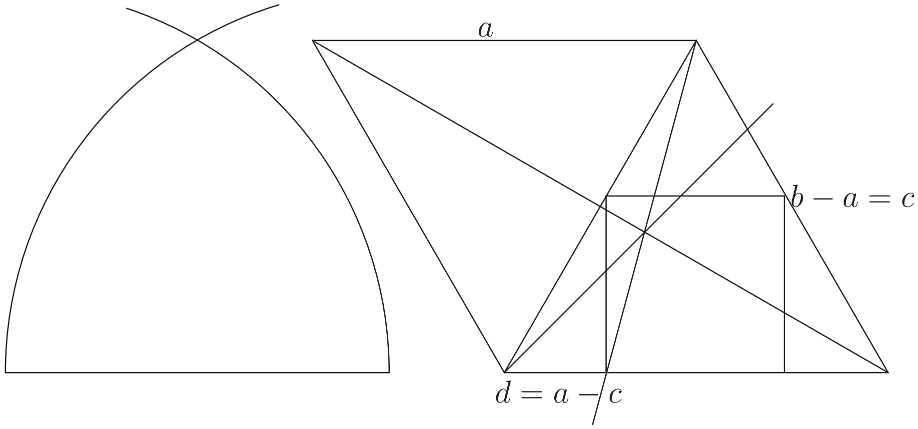




b を正方形の一辺、a を対角線。
$a > b$, $b > c = a - b$,
$b > b - c > c$ であるが、$b - c$ は c を一辺とする正方形の対角線。

$$
\begin{aligned}
\sqrt{2} = &\ 1 + (\sqrt{2} - 1) \\
= &\ 1 + \frac{1}{1 + \sqrt{2}} \\
= &\ 1 + \cfrac{1}{1 + 1 + \cfrac{1}{1 + \sqrt{2}}} \\
= &\ 1 + \cfrac{1}{1 + 1 + \cfrac{1}{1 + 1 + \cfrac{1}{1 + \sqrt{2}}}} \\
= &\ 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\cdots}}}}
\end{aligned}
$$

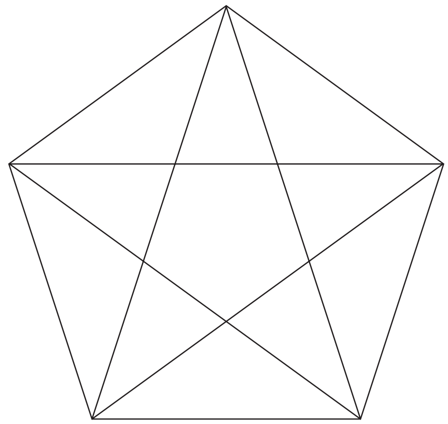
１７． ３の平方根　正三角形の１辺と高さ



１辺の長さを $2a$, 高さを b として、
$b>a,\ b-a=c,\ a>c,\ d=a-c$
一辺の長さ $2(a-c)$ の正三角形の高さが $c-d$

$$
\begin{aligned}
\sqrt{3} = &\ 1+(\sqrt{3}-1)\\
= &\ 1+\frac{2}{1+\sqrt{3}} = 1+\frac{2}{2+(\sqrt{3}-1)}\\
= &\ 1+\frac{1}{1+\frac{\sqrt{3}-1}{2}} = 1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\sqrt{3}}}\\
= &\ 1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\sqrt{3}}}}}\\
= &\ 1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\sqrt{3}}}}}}}\\
= &\ 1+\frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{\cdots}}}}}}}
\end{aligned}
$$

18. 正５角形



正５角形の対角線を a, １辺を b とすると、
$a:b$ は $b:(a-b)$ と等しい。

$$
\begin{aligned}
\frac{a}{b} = \quad & 1+\frac{a-b}{b} = 1+\cfrac{1}{\cfrac{b}{a-b}} \\
= \quad & 1+\cfrac{1}{\cfrac{a}{b}} \\
= \quad & 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cfrac{a}{b}}} \\
= \quad & 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cfrac{a}{b}}}} \\
= \quad & 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cdots}}}} \\
= \quad & \frac{1+\sqrt{5}}{2}
\end{aligned}
$$

19. つまり、このような比が存在することは、現実の問題であった。

20. 無理比として存在するということになった。

２１． ピタゴラスの定理
　から平方数への関心が高まった。
　直角三角形が作図されると、
　整数の平方根という長さが出てくることになる。
　多くは無理数。
　多くの平方根が無理数であることの証明には、有理数が（ユークリッドの互除法により、）既約分数に書かれる。整数の素因数分解の一意性が使われる。
　ピタゴラスの定理の証明にはどのようなものがあるか？（正方形、長方形の存在等には、平行線の公理が使われる。）
　（平行四辺形の存在、面積の公式には、平行線の公理が使われる。）

２２． 比にかかわるいくつかの問題
　三角形の存在について
　直角三角形の斜辺＞他の一辺
　＜＝　三角形において　$a > b \Rightarrow A > B$　転換法で同値
　＜＝　三角形の内角の和は１８０度
　＜＝　平行線の公理
　２３
　三角不等式
　＜＝　三角形の内角の和は１８０度
　三角不等式を満たす長さの三角形の存在？
　例えば正三角形の存在？
　これは、公理とするしかないようである。

２４． 比にかかわるいくつかの問題
　比が等しいとは何か？
　中点連結定理
　＝＞　有理比の三角形に対して、メネラウスの定理
　＝＞
　線分の上に有理分点が稠密にある（どのような区間にもある）
　比が等しくない＝＞有理比で分離できる
　等しくない有理比について三角形を作ると平行でない。（有理比の三角形に対して、メネラウスの定理）
　＝＞等しくない比について三角形を作ると平行でない。
　従って、平行ならば比が等しい。
　転換法により、比が等しいことと平行であることは同値となる。

2. 次は小数の話