４月３０日

4. 常微分方程式とその解

4.1. 常微分方程式の定義.

常微分方程式は、x を変数、y を x の関数とするとき、x, y, $y' = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, $y'' = \dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$, $\dots$, $y^{(n)} = \dfrac{\mathrm{d}^ny}{\mathrm{d}x^n}$ の間の関係式

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0,$$

あるいは

$$F(x, y, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \dots, \frac{\mathrm{d}^ny}{\mathrm{d}x^n}) = 0$$

で与えられる。（将来、y がベクトルに値を持つことも考える。）

n を常微分方程式の**階数**と呼ぶ。

4.2. 常微分方程式の解.

$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ を満たす x 関数 $y = f(x)$ を解と呼ぶ。

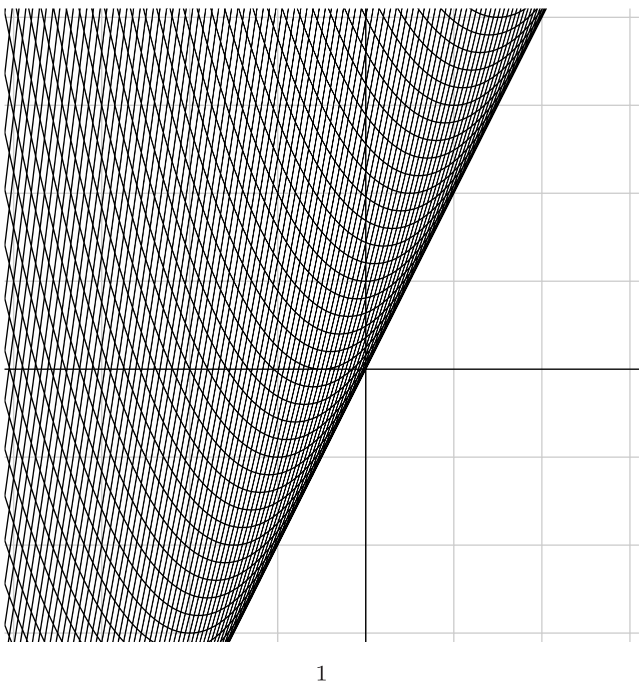
他に条件がない場合は通常、任意定数あるいは積分定数を n 個含む。その場合、**一般解**と呼ぶ。

x_0 における値 $f(x_0)$ が定まっている等の条件から、任意定数の値が定まると、１つの関数が定まるが、これを**特殊解**と呼ぶ。

一般解から、定数の値を定めるだけでは得られない解を持つこともあり、これを**特異解**と呼ぶ。

4.3. 特異解の例.

$y = 2x$ に接する放物線族。



$y=(x-(a-1))^2+2a-1$ は、$y'=2(x-(a-1))$ だから、$y=\dfrac{(y')^2}{4}+2x-y'+1$ を満たす。

$y-2x=\dfrac{(y'-2)^2}{4}$ から $y-2x=z$ とおくと $4z=(z')^2$. $z'=2\sqrt{z}$, $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}z}{2\sqrt{z}}=\int\mathrm{d}x$. $\sqrt{z}=x+C$, 従って、$y-2x=(x+C)^2$. 積分定数を取り替えてもとの式を得る。一方、$y=2x$ も解である。

4.4. クレローの微分方程式.

$y=Cx+g(C)$ の形の直線の族を考える。$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=C$ だから、このような直線族は微分方程式 $y=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}x+g(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})$ を満たしている。

この方程式 $y=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}x+g(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})$ は、クレローの微分方程式と呼ばれている。

クレローの微分方程式の性質を見るために、$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=p$ と置いて、一応、p と y を独立に考える。$y=px+g(p)$ とし、$p=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}x+p+g'(p)\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$ を得る。これから、$\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\{x+g'(p)\}=0$ を得る。

$\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=0$ の解は、$p=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=C$ (C は定数) だから、クレローの微分方程式の $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ に C を代入して $y=Cx+g(C)$ の形の直線の族が一般解となる。

一方、$x+g'(p)=0$ ならば、t をパラメータとする曲線 $\begin{cases}x= & -g'(t)\\ y= & -tg'(t)+g(t)\end{cases}$ は、$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\dfrac{-tg''(t)}{-g''(t)}=t$ を満たし、$y=-tg'(t)+g(t)=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}x+g(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})$ だから、クレローの微分方程式の解になる。この曲線は、$x=-g'(t)$ が、$t=h(x)$ と解かれたとすると、$y=xh(x)+g(h(x))$ と書かれ、方程式 $y=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}x+g(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})$ の特異解となる。

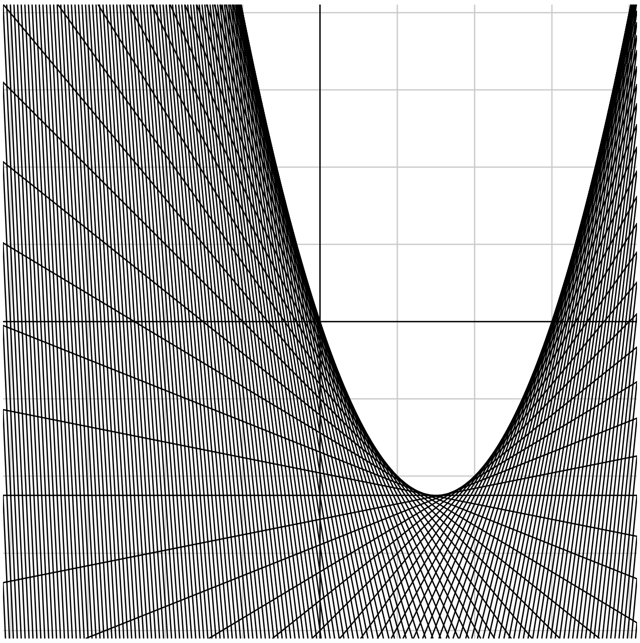
特異解 $y=xh(x)+g(h(x))$ の上の点 (x_0,y_0) における接線の方程式は $y-y_0=\{h(x_0)+x_0h'(x_0)+g'(h(x_0))h'(x_0)\}(x-x_0)=h(x_0)(x-x_0)$, ここで、$y_0=x_0h(x_0)+g(h(x_0))$ だから、$y=h(x_0)x+g(h(x_0))$ となり、$C=h(x_0)$ に対する一般解である。クレローの微分方程式は、曲線 $y=xh(x)+g(h(x))$ の接線全体および曲線自身を解にもつ。

例。 $y=x^2-3x$ の接線全体は、$y-{x_0}^2+3x_0=(2x_0-3)(x-x_0)$. すなわち、$y+{x_0}^2=(2x_0-3)x$.

$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2x_0-3$. だから、$y=x^2-3x$ の接線全体のみたす微分方程式は $y-x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-{x_0}^2=-\dfrac{1}{4}(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+3)^2$.

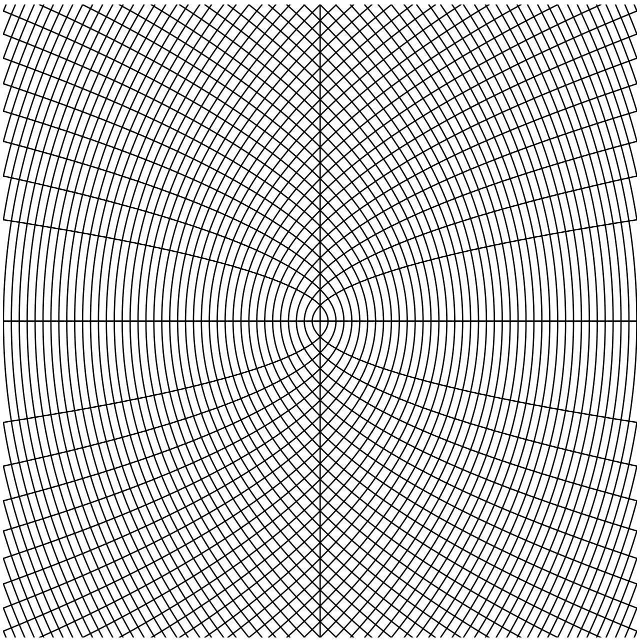
$y=x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\dfrac{1}{4}(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+3)^2$ をもう一度微分して $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+x\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}-\dfrac{1}{2}\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+3)$ だから、$(x-\dfrac{1}{2}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\dfrac{3}{2})\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=0$ を得る。$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=0$ から、$y=Cx-\dfrac{1}{4}(C+3)^2$ という解を得る。

$x - \dfrac{1}{2}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - \dfrac{3}{2} = 0$ から、$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2x - 3$ となり、微分方程式から $y = x(2x-3) - x^2 = x^2 - 3x$ を得る。



4.5. **曲線族と微分方程式の例.**

１つのパラメータに依存するような平面上の曲線の族が与えられると、その曲線の族が満たす微分方程式を書くことができることが多い。



$\boxed{(0,0)\ \textbf{を焦点とする軸が}\ x\ \textbf{軸と平行な放物線の族}}$

$(0,0)$ を焦点とする軸が x 軸と平行な放物線の族は、$x = C$ からの距離と原点からの距離が等しい点として、$x^2 + y^2 = (x - C)^2$ で与えられる。

$x+y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x-C$ から、$x^2+y^2=(x+y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})^2$ が微分方程式となる。これは、$y(y-2x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-y(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})^2)=0$ である。$-y+2x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})^2=0$ は $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{1}{y}(-x\pm\sqrt{x^2+y^2})$ と書かれる。$\pm$ の 2 つのとり方に対して、$\dfrac{1}{y}(-x+\sqrt{x^2+y^2})\dfrac{1}{y}(-x-\sqrt{x^2+y^2})=-1$ これらの放物線が直交することを示している。

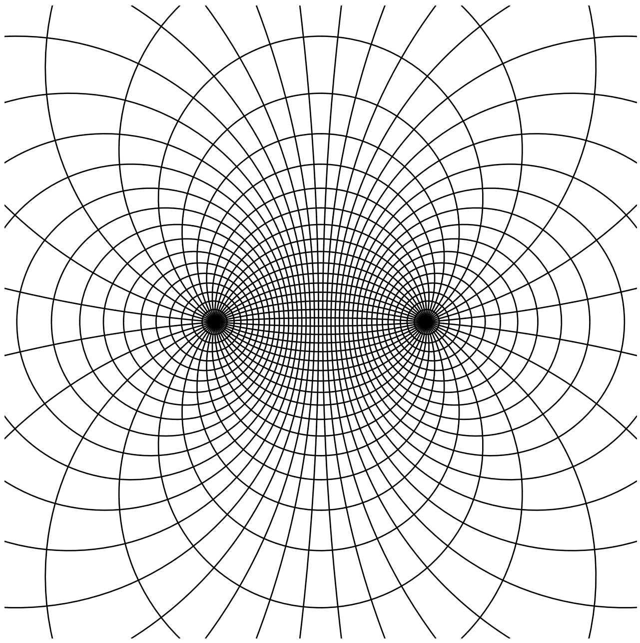
$(1,0)$, $(-1,0)$ への距離の比が一定の曲線。（アポロニウスの円）

その方程式は C を比を表す定数として $(x-1)^2+y^2=C((x+1)^2+y^2)$. 両辺を微分すると $x-1+yy'=C(x+1+yy')$ だから、これらの 2 つの式から C を消去して微分方程式
$(x+1+yy')((x-1)^2+y^2)=(x-1+yy')((x+1)^2+y^2)$, $(x^2-1)(-2)+2y^2=yy'(4x)$, すなわち $y'=\dfrac{-x^2+y^2+1}{2xy}$ を得る。

$(1,0)$, $(-1,0)$ を通る円。（円周角一定の円）

$x^2+(y-c)^2=c^2+1$. すなわち、$x^2+y^2-2cy=1$. $2x+2yy'-2cy'=0$ だから、微分方程式 $(x^2+y^2-1)y'=2xy+2y^2y'$, すなわち $y'=\dfrac{2xy}{x^2-y^2-1}$ を得る。

これらの曲線族は直交している。（微分方程式からわかる。）



共焦点楕円族、双曲線族

$(\pm 1, 0)$ を焦点とする楕円、双曲線は、$\sqrt{(x-1)^2+y^2} \pm \sqrt{(x+1)^2+y^2} = C$ で表される。両辺を微分して、曲線族の微分方程式 $\dfrac{x-1+yy'}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}} \pm \dfrac{x+1+yy'}{\sqrt{(x+1)^2+y^2}} = 0$ が得られる。

これらの曲線族は直交している。実際、微分方程式は

$$\sqrt{(x+1)^2+y^2}(x-1+yy') \pm \sqrt{(x-1)^2+y^2}(x+1+yy') = 0,$$

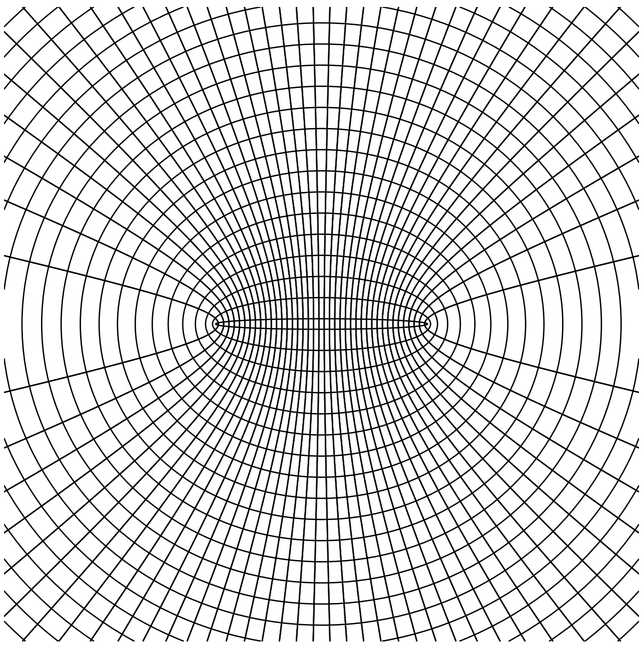
すなわち

$$\begin{aligned}&(\sqrt{(x+1)^2+y^2} \pm \sqrt{(x-1)^2+y^2})yy' \\ &\qquad +(x-1)\sqrt{(x+1)^2+y^2} \pm (x+1)\sqrt{(x-1)^2+y^2} = 0\end{aligned}$$

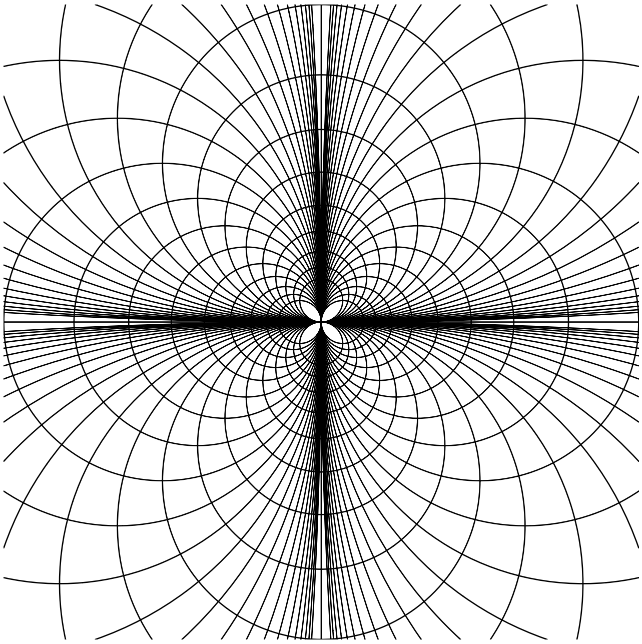
と書き直される。このとき、

$$\frac{(x-1)\sqrt{(x+1)^2+y^2}+(x+1)\sqrt{(x-1)^2+y^2}}{y(\sqrt{(x+1)^2+y^2}+\sqrt{(x-1)^2+y^2})} \frac{(x-1)\sqrt{(x+1)^2+y^2}-(x+1)\sqrt{(x-1)^2+y^2}}{y(\sqrt{(x+1)^2+y^2}-\sqrt{(x-1)^2+y^2})} = -1$$

となる。(分子 $(x-1)^2((x+1)^2+y^2)-(x+1)^2((x-1)^2+y^2) = -4xy^2$
分母 $y^2(((x+1)^2+y^2)-((x-1)^2+y^2) = 4xy^2$ である。)



直交する曲線族. 平面上の微分方程式 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x,y)$ で与えられる曲線族に直交する曲線族は
$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\dfrac{1}{f(x,y)}$ あるいは、$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = -f(x,y)$ であたえられる。



問。 上の２つの曲線族を与える微分方程式を与えよ。これらの曲線族が直交することを示せ。

4.6. **連立微分方程式.**

連立微分方程式は、例えば、２つの t の関数 x, y についての t, x, $x' = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$, $x'' = \dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}, \dots, x^{(n)} = \dfrac{\mathrm{d}^n x}{\mathrm{d}t^n}, y, y' = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}, y'' = \dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}, \dots, y^{(n)} = \dfrac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}t^n}$ の間の関係式を与えるものであるが、通常、このような場合には、２つの関係式が必要である。これは、ベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とその微分 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} x^{(n)} \\ y^{(n)} \end{pmatrix} = \dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ についてのベクトルに値を持つ関係式とみることができる。

例。 原点を中心とする同心円を $(r\cos t, r\sin t)$ のように表示すると、
$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -r\sin t = -y$, $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = r\cos t = x$ を満たすから、同心円は、連立微分方程式 $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -y \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = x \end{cases}$ を満たしている。

例。 Lotka-Volterra 方程式 $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = (a_1 + b_1 u + c_1 v)u \\ \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = (a_2 + b_2 u + c_2 v)v \end{cases}$

これは、平面上の点 (u, v) の変化を表していると考えるのが良い。

4.7. ベクトル場.

一般に、平面上の点 (x, y) の変化の割合が点 (x, y) によって定まっていることは $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(x, y) \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = g(x, y) \end{cases}$ と表記される。これは、平面上のベクトル場を与えている。

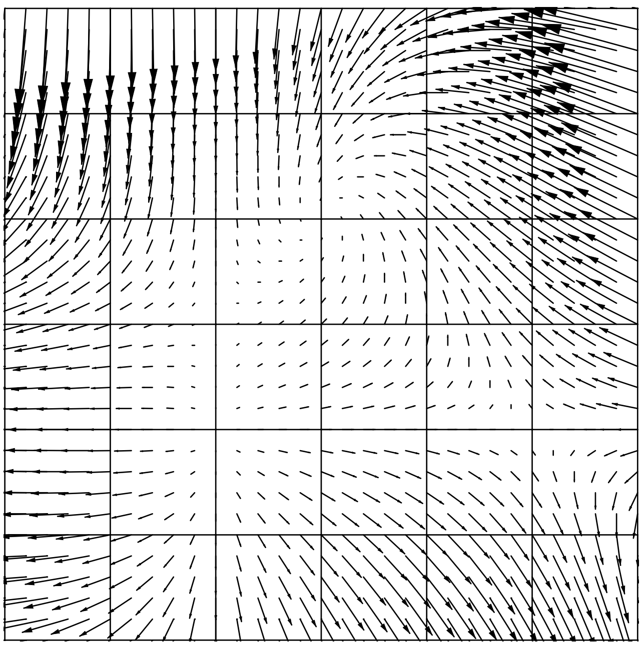
曲線 $(a(t), b(t))$ は, $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} = f(a(t), b(t)) \\ \dfrac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}t} = g(a(t), b(t)) \end{cases}$ を満たすときに、この微分方程式の解である。

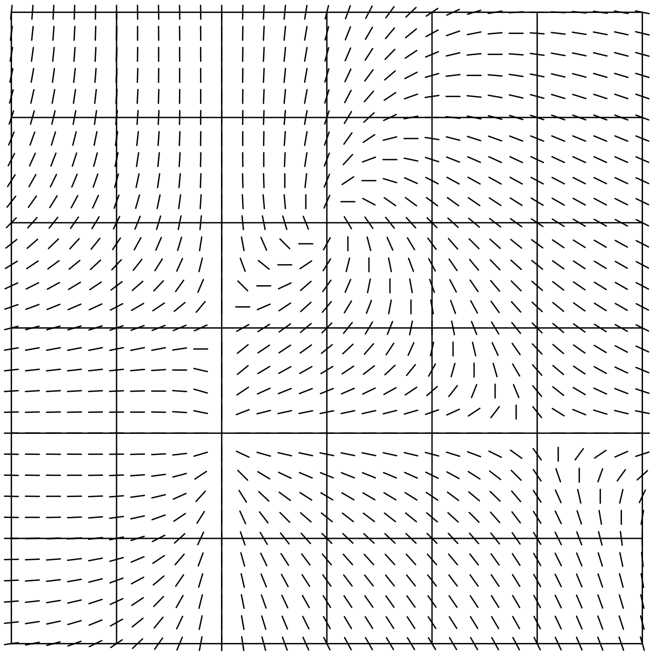
時間の進み方を k 倍にした曲線 $(a(kt), b(kt))$ は、$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}a(kt)}{\mathrm{d}t} = k\, f(a(kt), b(kt)) \\ \dfrac{\mathrm{d}b(kt)}{\mathrm{d}t} = k\, g(a(kt), b(kt)) \end{cases}$ を満たすから、$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = k\, f(x, y) \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = k\, g(x, y) \end{cases}$ の解である。

解曲線を軌道と呼ぶこともある。ベクトル場をスカラー倍しても、軌道の形は変わらない。

平面上のベクトル場を描くと、おおよその軌道の様子が見てとれることが多い。

ロトカ・ボルテラ方程式 $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = (3 - u - v)u \\ \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = (1 + u - v)v \end{cases}$ について描いてみよう。





上の図は、各点にベクトルを（縮小して）描いたもの。下の図は、各点のベクトルの向きを小線分で表したものである。ひとつの小正方形の１辺の長さは１で、

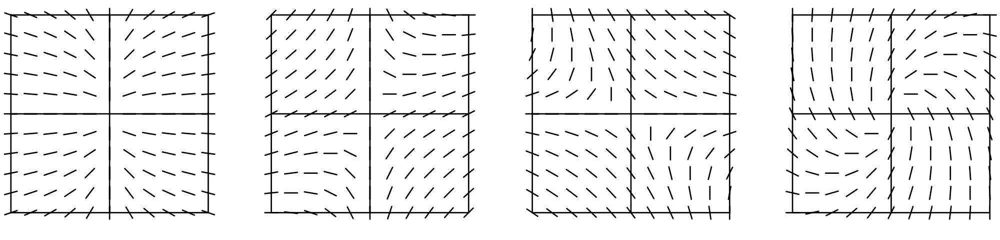
$$[-2,4]\times[-2,4]=\{(x,y)\bigm| -2\leqq x\leqq 4, -2\leqq x\leqq 4\}$$

の範囲を描いたものである。直線 $u=0$, $v=-u+3$, $v=0$, $v=u+1$ を書き込むと良い。

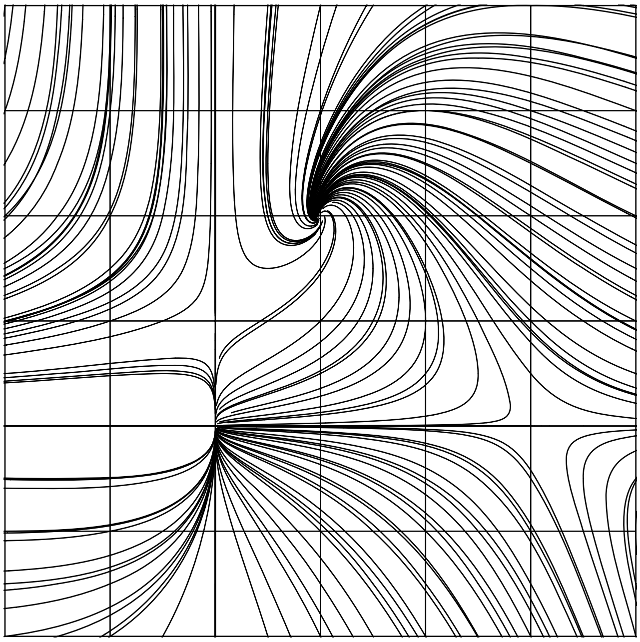
$\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=0$, $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=0$ となる点は、$(0,0)$, $(0,1)$, $(3,0)$, $(1,2)$.

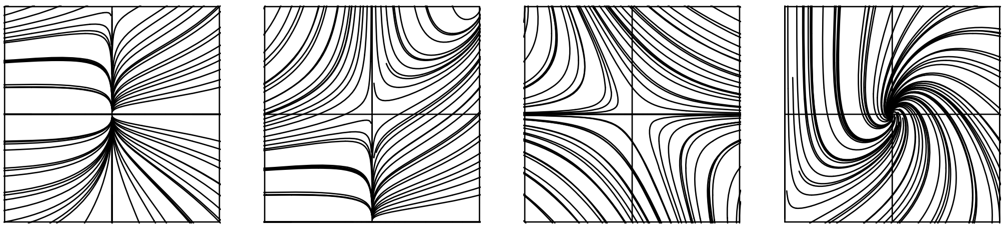
それぞれの点 (a,b) で、$u=a+\widehat{u}$, $v=b+\widehat{v}$ として、１次の項を取り出すとつぎの連立線形微分方程式が得られる。

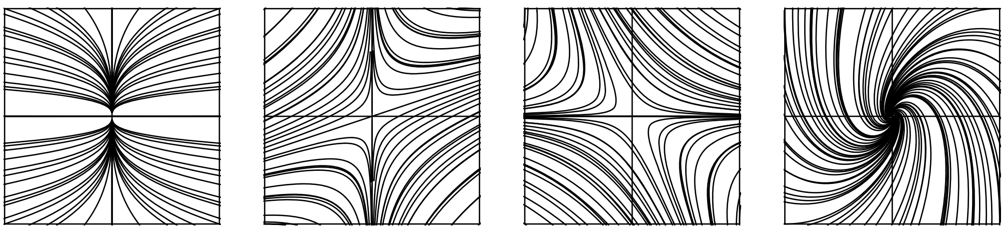
$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\widehat{u}}{\mathrm{d}t}=3\widehat{u}\\ \dfrac{\mathrm{d}\widehat{v}}{\mathrm{d}t}=\widehat{v}\end{cases}\qquad\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\widehat{u}}{\mathrm{d}t}=2\widehat{u}\\ \dfrac{\mathrm{d}\widehat{v}}{\mathrm{d}t}=\widehat{u}-\widehat{v}\end{cases}\qquad\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\widehat{u}}{\mathrm{d}t}=-3\widehat{u}-3\widehat{v}\\ \dfrac{\mathrm{d}\widehat{v}}{\mathrm{d}t}=4\widehat{v}\end{cases}\qquad\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\widehat{u}}{\mathrm{d}t}=-\widehat{u}-\widehat{v}\\ \dfrac{\mathrm{d}\widehat{v}}{\mathrm{d}t}=2\widehat{u}-2\widehat{v}\end{cases}$$



これらの線形のベクトル場の方向を表した４つの図ともとのベクトル場が 0 となる４点の近くの様子を比較すると良い。



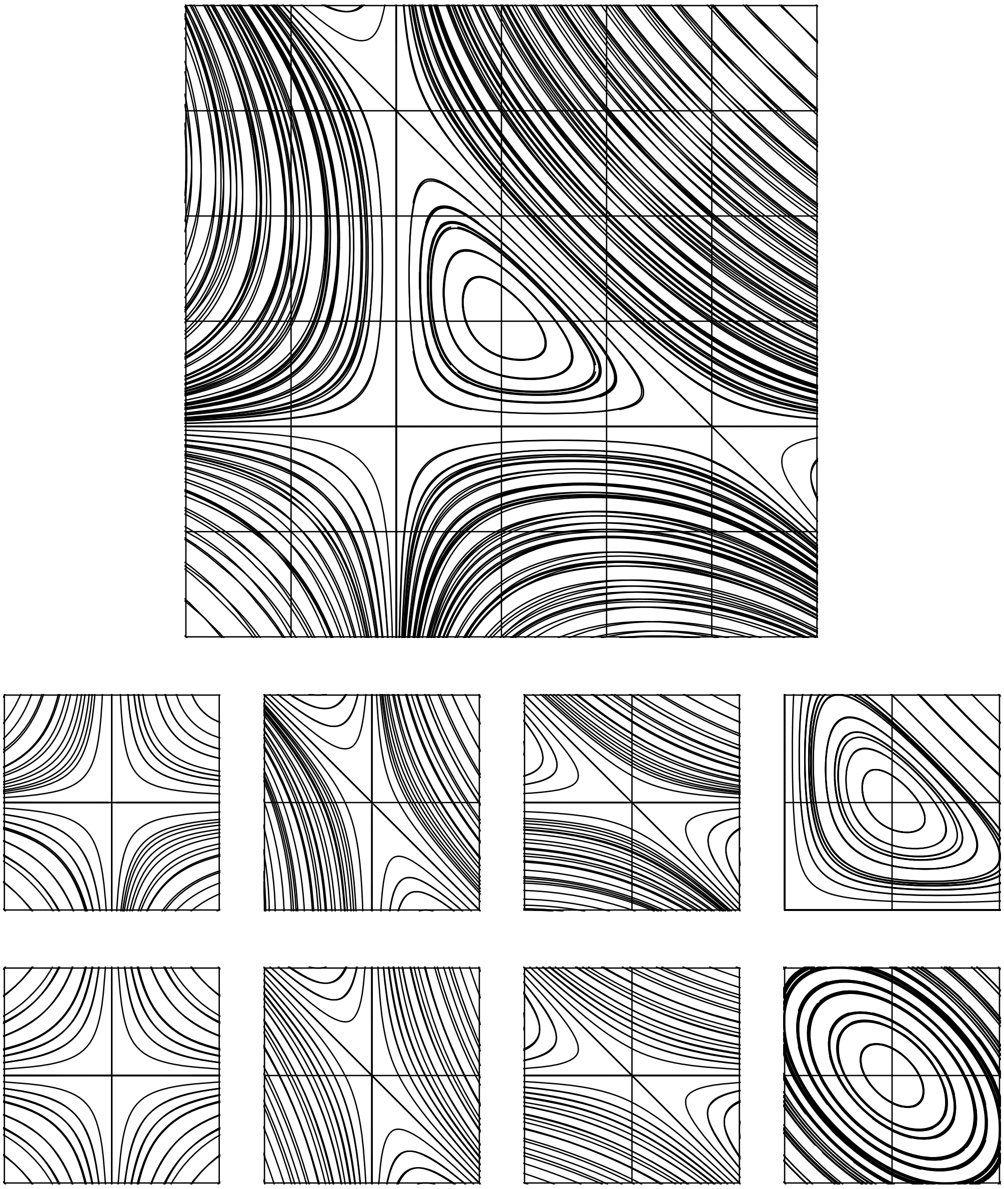




それぞれの解曲線の様子を図示したものである。中の４つの図は、Lotka-Vorterra ベクトル場の零点の周り、下の４つの図は、線形方程式の様子である。これらの解曲線は、ベクトル場の零点の近くでは、ほとんど同じ形である。

ここでの図の描き方は、十分の小さな時間間隔についての「折れ線近似」である。

練習。ロトカ・ボルテラ方程式 $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = (-3+u+2v)u \\ \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = (3-2u-v)v \end{cases}$ について同様の図を描いてみよ。



解を描いてみて、第１積分の存在が予想されるが、これは実際にハミルトニアン $H(u,v) = 3uv - u^2v - v^2u = uv(3-u-v)$ についての微分方程式 $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\partial H}{\partial v} \\ \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{\partial H}{\partial u} \end{cases}$ であり、$H(u,v)$ が第１積分である。

　実際の解を、知られている関数で書き表すことは、滅多に出来ない。しかし、この図を見ると、「解は存在する。また、１つの微分方程式を近似している微分方程式の解は、もとの微分方程式の解に近い。」ということが成立していると思われる。

　これを定式化するのが、常微分方程式の解の存在と一意性の定理である。