

7. 行列の指数関数

7.1. 2次の行列の指数関数. さて、 n 変数の場合に同様の問題を考えるために、次のように計算してみる。

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\lambda_1 t)^n & 0 \\ 0 & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\lambda_2 t)^n \end{pmatrix} = \sum_{n=0}^{\infty} \begin{pmatrix} \frac{1}{n!} (\lambda_1 t)^n & 0 \\ 0 & \frac{1}{n!} (\lambda_2 t)^n \end{pmatrix} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}^n \end{aligned}$$

この最後の式の行列 $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ の代わりに $\begin{pmatrix} \mu & -\nu \\ \nu & \mu \end{pmatrix}$ を代入すると、

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \begin{pmatrix} \mu & -\nu \\ \nu & \mu \end{pmatrix}^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \left(\begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\nu \\ \nu & 0 \end{pmatrix} \right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \sum_{p+q=n} \frac{n!}{p!q!} \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}^p \begin{pmatrix} 0 & -\nu \\ \nu & 0 \end{pmatrix}^q = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{t^p}{p!} \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}^p \frac{t^q}{q!} \begin{pmatrix} 0 & -\nu \\ \nu & 0 \end{pmatrix}^q \\ &= \left(\sum_{p=0}^{\infty} \frac{t^p}{p!} \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}^p \right) \left(\sum_{q=0}^{\infty} \frac{t^q}{q!} \begin{pmatrix} 0 & -\nu \\ \nu & 0 \end{pmatrix}^q \right) \end{aligned}$$

ここで、2項定理で行列の累乗を展開しているが、これはスカラー行列 $\begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ が $\begin{pmatrix} 0 & -\nu \\ \nu & 0 \end{pmatrix}$ と可換であるからできることである。上の式で、

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{t^p}{p!} \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}^p = \begin{pmatrix} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{t^p}{p!} \mu^p & 0 \\ 0 & \sum_{p=0}^{\infty} \frac{t^p}{p!} \mu^p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\mu t} & 0 \\ 0 & e^{\mu t} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & -\nu \\ \nu & 0 \end{pmatrix}^{2q} &= \begin{pmatrix} (-1)^q \nu^{2q} & 0 \\ 0 & (-1)^q \nu^{2q} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & -\nu \\ \nu & 0 \end{pmatrix}^{2q+1} &= \begin{pmatrix} 0 & -(-1)^q \nu^{2q+1} \\ (-1)^q \nu^{2q+1} & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

だから、

$$\begin{aligned} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{t^q}{q!} \begin{pmatrix} 0 & -\nu \\ \nu & 0 \end{pmatrix}^q &= \begin{pmatrix} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{(-1)^q}{(2q)!} (t\nu)^{2q} & -\sum_{q=0}^{\infty} \frac{(-1)^q}{(2q+1)!} (t\nu)^{2q+1} \\ \sum_{q=0}^{\infty} \frac{(-1)^q}{(2q+1)!} (t\nu)^{2q+1} & \sum_{q=0}^{\infty} \frac{(-1)^q}{(2q)!} (t\nu)^{2q} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \nu t & -\sin \nu t \\ \sin \nu t & \cos \nu t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

従って、

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \begin{pmatrix} \mu & -\nu \\ \nu & \mu \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} e^{\mu t} & 0 \\ 0 & e^{\mu t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \nu t & -\sin \nu t \\ \sin \nu t & \cos \nu t \end{pmatrix}$$

となる。また、

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \left(\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \sum_{p+q=n} \frac{n!}{p!q!} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^p \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^q = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{t^p}{p!} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^p \frac{t^q}{q!} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^q \\ &= \left(\sum_{p=0}^{\infty} \frac{t^p}{p!} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^p \right) \left(\sum_{q=0}^{\infty} \frac{t^q}{q!} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^q \right) = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。ここでも、2項定理で行列の累乗を展開しているが、これはスカラー行列 $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ が $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ と可換であるからできることである。

7.2. 行列の指数関数. そこで、一般の $n \times n$ 行列 A に対し、

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k$$

と定義する。これは、行列 A に対して、 $e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$ と定義したものに、 tA を代入したものである。

まず、級数の収束を示す。

$A = (a_{ij})$ とし、 $\max_{ij} \{|a_{ij}|\} \leq M$ とする。 A^k の成分 $a_{ij}^{(k)}$ について、 $\max_{ij} \{|a_{ij}^{(k)}|\} \leq n^{k-1} M^k$ であることが数学的帰納法で示される。実際、 A^k の成分についての不等式を仮定すると、

$$|a_{ij}^{(k+1)}| = \left| \sum_{\ell=1}^n a_{i\ell}^{(k)} a_{\ell j} \right| \leq n \cdot n^{k-1} M^k M = n^k M^{k+1}$$

を得る。

$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$ の ij 成分は $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} a_{ij}^{(k)}$ であるが、 $|\frac{1}{k!} a_{ij}^{(k)}| \leq \frac{1}{k!} n^{k-1} M^k$ だから、 $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} a_{ij}^{(k)}$ は $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} n^{k-1} M^k$ を優級数に持つ。 $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} n^{k-1} M^k = \frac{1}{n} e^{nM}$ で優級数が収束するから、 $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$ は収束する。

この収束は、 A の成分が有界である範囲 ($\max_{ij} \{|a_{ij}|\} \leq M$ となる行列全体) で一様である。従って、 e^A は A の成分について連続な関数となる。

行列の指数関数の性質

e^A は次の性質を持つ。

- $AB = BA$ ならば $e^{A+B} = e^A e^B$.
- $e^{PAP^{-1}} = P e^A P^{-1}$

- $\frac{d}{dt}e^{tA} = Ae^{tA} = e^{tA}A$

実際、次のように計算される。

$$\begin{aligned} e^{A+B} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (A+B)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{p+q=k} \frac{k!}{p!q!} A^p B^q \\ &= \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{1}{p!} A^p \frac{1}{q!} B^q = \left(\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} A^p \right) \left(\sum_{q=0}^{\infty} \frac{1}{q!} B^q \right) = e^A e^B \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e^{PAP^{-1}} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (PAP^{-1})^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (PA^k P^{-1}) \\ &= P \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k \right) P^{-1} = P e^A P^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}e^{tA} &= \frac{d}{dt} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} A^k \\ &= A \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k = A e^{tA} \\ &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k \right) A = e^{tA} A \end{aligned}$$

問 . (1) 行列 $A = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$ に対して、行列の指数関数 e^{tA} を計算せよ。

(2) $A = \begin{pmatrix} -8 & 18 \\ -3 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$ に対して行列の指数関数 e^{tA} を計算せよ。また、 $\det e^{tA}$ を計算せよ。

(3) 次の常微分方程式の初期値問題を解け。(2)の結果を使ってよい。

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -8x_1 + 18x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= -3x_1 + 7x_2 \\ x_1(0) &= 1, \quad x_2(0) = 1 \end{aligned}$$

解答例 . (1)

$$\begin{aligned} e^{tA} &= \exp(-4tI + \begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}) = \exp(-4tI) \exp\left(\begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \\ &= \begin{pmatrix} e^{-4t} & 0 \\ 0 & e^{-4t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-4t} & te^{-4t} \\ 0 & e^{-4t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$(2) e^{tA} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-2t} & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3e^{-2t} - 2e^t & -6e^{-2t} + 6e^t \\ e^{-2t} - e^t & -2e^{-2t} + 3e^t \end{pmatrix}$$

$\det e^{tA} = e^{-t}$

$$(3) \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = e^{tA} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3e^{-2t} + 4e^t \\ -e^{-2t} + 2e^t \end{pmatrix}$$

7.3. 同次方程式の形式的解法. 行列の指数関数を使うと、線形同次微分方程式は形式的にはすぐに解かれる。

$\frac{d}{dt}\vec{x} = A\vec{x}$ に対し、 $t = 0$ で初期値 \vec{x}^0 をとる解は、 $\vec{x}(t) = e^{tA}\vec{x}^0$ で与えられる。実際、

$$\frac{d}{dt}\vec{x}(t) = \frac{d}{dt}e^{tA}\vec{x}^0 = Ae^{tA}\vec{x}^0 = A\vec{x}(t)$$

2行2列の A に対して、この e^{tA} の具体的な形を、 $P^{-1}AP$ の形を標準形にして $e^{tA} = Pe^{tP^{-1}AP}P^{-1}$ により求めた。

7.4. ジョルダン標準形. $n \times n$ 行列の固有多項式は n 次多項式である。これは実数係数の n 多項式であるから、ガウスの代数学の基本定理により、1次式の積に因数分解される。複素数解は、共役なものと同じ次数で現れる。

ジョルダンブロックとは次の形の行列である。

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & a & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & a \end{pmatrix}$$

この $k \times k$ 行列の固有多項式は $(\lambda - a)^k$ である。ジョルダンの定理とは $n \times n$ 実行列 A に対して、 $n \times n$ 複素行列 P をとって、 $P^{-1}AP$ がジョルダンブロックの直和 (ジョルダン標準形) となるようにできる。共役複素数を固有値とするジョルダンブロックの数は、大きさを含め等しい。

この結果、 2×2 実行列の場合は、 $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \mu + \nu i & 0 \\ 0 & \mu - \nu i \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ の3通りのジョルダン標準形があることになる。なお、

$$\begin{pmatrix} \mu & -\nu \\ \nu & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu + \nu i & 0 \\ 0 & \mu - \nu i \end{pmatrix}$$

である。

3×3 実行列の場合は $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu + \nu i & 0 \\ 0 & 0 & \mu - \nu i \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$ の4通りである。

4×4 実行列の場合は $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu + \nu i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu - \nu i \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \mu_1 + \nu_1 i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_1 - \nu_1 i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_2 + \nu_2 i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu_2 - \nu_2 i \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$,

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu + \nu i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu - \nu i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \mu + \nu i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu + \nu i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu - \nu i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \mu - \nu i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \text{ の } 9 \text{ 通りである。}$$

ジョルダンブロックについての指数関数は

$$\exp(t \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & a & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & a \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} e^{at} & te^{at} & \frac{t^2}{2!}e^{at} & \dots & \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}e^{at} \\ 0 & e^{at} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{t^2}{2!}e^{at} \\ \vdots & \ddots & \ddots & e^{at} & te^{at} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & e^{at} \end{pmatrix}$$

となる。なお、

$$\begin{aligned} \exp(t \begin{pmatrix} \mu - \nu & \\ \nu & \mu \end{pmatrix}) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{(\mu + \nu i)t} & 0 \\ 0 & e^{(\mu - \nu i)t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{i}{2} \\ \frac{i}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{e^{(\mu + \nu i)t} + e^{(\mu - \nu i)t}}{2} & \frac{e^{(\mu + \nu i)t} - e^{(\mu - \nu i)t}}{2i} \\ \frac{e^{(\mu + \nu i)t} - e^{(\mu - \nu i)t}}{2i} & \frac{e^{(\mu + \nu i)t} + e^{(\mu - \nu i)t}}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{\mu t} \cos \nu t & -e^{\mu t} \sin \nu t \\ e^{\mu t} \sin \nu t & e^{\mu t} \cos \nu t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

この結果、 A の固有値が実数 λ 、複素数 $\mu + \nu i$ を持つとき、 e^{tA} は、 $e^{\lambda t}$, $te^{\lambda t}$, \dots , $t^{k-1}e^{\lambda t}$, $e^{\mu t} \cos \nu t$, $e^{\mu t} \sin \nu t$, $te^{\mu t} \cos \nu t$, $te^{\mu t} \sin \nu t$, \dots , $t^{k-1}e^{\mu t} \cos \nu t$, $t^{k-1}e^{\mu t} \sin \nu t$ の線形結合で書かれる。ただし k は、固有値 λ , $\mu + \nu i$ のジョルダンブロックの最大の大きさである。

7.5. 非同次線形微分方程式、定数変化法. 非同次線形微分方程式 $\frac{d}{dt} \vec{x} = A\vec{x} + \vec{b}(t)$ について、解の存在、一意性はわかっている。

2つの非同次方程式の解 $\vec{x}_1(t)$, $\vec{x}_2(t)$ に対して、 $\vec{x}_2(t) - \vec{x}_1(t)$ は同次方程式の解である。従って、 $t=0$ で \vec{x}^0 となる $\frac{d}{dt} \vec{x} = A\vec{x} + \vec{b}(t)$ の解は $t=0$ で $\vec{0}$ をとる解と $e^{tA} \vec{x}^0$ の和である。

$\frac{d}{dt} \vec{x} = A\vec{x} + \vec{b}(t)$ の解を探す。 $e^{tA} \vec{x}^0$ が同次方程式の解とする。そこで、 $\vec{x}(t) = e^{tA} \vec{X}(t)$ の形の解を探す。

$$Ae^{tA} \vec{X}(t) + e^{tA} \frac{d\vec{X}}{dt} = Ae^{tA} \vec{X}(t) + \vec{b}(t)$$

だから、

$$e^{tA} \frac{d\vec{X}}{dt} = \vec{b}(t)$$

従って、 $X(t) = \int_0^t e^{-tA} \vec{b}(t) dt$ とし、 $\vec{x}(t) = e^{tA} \vec{X}(t) + e^{tA} \vec{x}^0$ が解である。

$\vec{x} = P\vec{y}$ と座標変換して、 $P^{-1}AP$ が標準形とする。微分方程式は、 $P \frac{d}{dt} \vec{y} = AP\vec{y} + \vec{b}(t)$ すなわち、 $\frac{d}{dt} \vec{y} = P^{-1}AP\vec{y} + P^{-1}\vec{b}(t)$ となる。 $\vec{y}(t) = e^{tP^{-1}AP} \vec{Y}(t)$ の形で解を探す。

$$P^{-1}AP e^{tP^{-1}AP} \vec{Y}(t) + e^{tP^{-1}AP} \frac{d\vec{Y}}{dt} = P^{-1}AP e^{tP^{-1}AP} \vec{Y}(t) + P^{-1}\vec{b}(t)$$

だから、

$$e^{tP^{-1}AP} \frac{d\vec{Y}}{dt} = P^{-1}\vec{b}(t)$$

従って、

$$\begin{aligned} \vec{Y}(t) &= \int_0^t e^{-tP^{-1}AP} P^{-1}\vec{b}(t) dt \\ \vec{y}(t) &= e^{tP^{-1}AP} \int_0^t e^{-tP^{-1}AP} P^{-1}\vec{b}(t) dt \\ \vec{x}(t) &= P e^{tP^{-1}AP} \int_0^t e^{-tP^{-1}AP} P^{-1}\vec{b}(t) dt \end{aligned}$$

である。

例 . $\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -4 \\ 10 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}.$

$A = \begin{pmatrix} -5 & -4 \\ 10 & 7 \end{pmatrix}$ の固有多項式は

$$\det \begin{pmatrix} \lambda + 5 & 4 \\ -10 & \lambda - 7 \end{pmatrix} = (\lambda + 5)(\lambda - 7) + 4 \cdot 10 = \lambda^2 - 2\lambda + 5 = (\lambda - 1 - 2i)(\lambda - 1 + 2i)$$

ここでは複素数の範囲で対角化しよう。固有値 $1 + 2i$, $1 - 2i$ に対する固有ベクトルは $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 + i \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 - i \end{pmatrix}$ であり、

$$\begin{pmatrix} -5 & -4 \\ 10 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 3 + i & 3 - i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 3 + i & 3 - i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 + 2i & 0 \\ 0 & 1 - 2i \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 3 + i & 3 - i \end{pmatrix} \text{ とすると、 } P^{-1} = \frac{1}{4i} \begin{pmatrix} 3 - i & 2 \\ -3 - i & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 - 3i & -2i \\ -1 + 3i & 2i \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \text{ とすると、}$$

$$\frac{d}{dt} \vec{y} = \begin{pmatrix} 1 + 2i & 0 \\ 0 & 1 - 2i \end{pmatrix} \vec{y} + \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 - 3i & -2i \\ -1 + 3i & 2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

となる。次のように計算しておく方が都合が良い。

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 - 3i & -2i \\ -1 + 3i & 2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 - 3i & -2i \\ -1 + 3i & 2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \\ \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} (-1 - 3i) \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} - e^{it} + e^{-it} \\ (-1 + 3i) \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} + e^{it} - e^{-it} \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} (-3 - 3i)e^{it} + (1 - 3i)e^{-it} \\ (1 + 3i)e^{it} + (-3 + 3i)e^{-it} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$t = 0$ で $\vec{y} = \vec{0}$ となる解を、 $\vec{y}(t) = \exp(t \begin{pmatrix} 1+2i & 0 \\ 0 & 1-2i \end{pmatrix}) \begin{pmatrix} Y_1(t) \\ Y_2(t) \end{pmatrix}$ の形で求めると、

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} Y_1(t) \\ Y_2(t) \end{pmatrix} &= \int_0^t \exp(-t \begin{pmatrix} 1+2i & 0 \\ 0 & 1-2i \end{pmatrix}) \frac{1}{8} \begin{pmatrix} (-3-3i)e^{it} + (1-3i)e^{-it} \\ (1+3i)e^{it} + (-3+3i)e^{-it} \end{pmatrix} dt \\ &= \frac{1}{8} \int_0^t \begin{pmatrix} e^{(-1-2i)t} & 0 \\ 0 & e^{(-1+2i)t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-3-3i)e^{it} + (1-3i)e^{-it} \\ (1+3i)e^{it} + (-3+3i)e^{-it} \end{pmatrix} dt \\ &= \frac{1}{8} \int_0^t \begin{pmatrix} (-3-3i)e^{(-1-i)t} + (1-3i)e^{(-1-3i)t} \\ (1+3i)e^{(-1+3i)t} + (-3+3i)e^{(-1+i)t} \end{pmatrix} dt \\ &= \frac{1}{8} \begin{pmatrix} \left[3e^{(-1-i)t} + \frac{1-3i}{-1-3i} e^{(-1-3i)t} \right]_0^t \\ \left[\frac{1+3i}{-1+3i} e^{(-1+3i)t} + 3e^{(-1+i)t} \right]_0^t \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{40} \begin{pmatrix} 15e^{(-1-i)t} + (4+3i)e^{(-1-3i)t} - (19+3i) \\ (4-3i)e^{(-1+3i)t} + 15e^{(-1+i)t} - (19-3i) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} &= \frac{1}{40} \begin{pmatrix} e^{(1+2i)t} & 0 \\ 0 & e^{(1-2i)t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 15e^{(-1-i)t} + (4+3i)e^{(-1-3i)t} - (19+3i) \\ (4-3i)e^{(-1+3i)t} + 15e^{(-1+i)t} - (19-3i) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{40} \begin{pmatrix} 15e^{it} + (4+3i)e^{-it} - (19+3i)e^{(1+2i)t} \\ (4-3i)e^{it} + 15e^{-it} - (19-3i)e^{(1-2i)t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

従って、 $\vec{y}^0 = P^{-1}\vec{x}^0$ を初期値とする解は、 $\begin{pmatrix} e^{(1+2i)t} & 0 \\ 0 & e^{(1-2i)t} \end{pmatrix} P^{-1}\vec{x}^0 + \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$ となる。 \vec{x}^0 を初期値とする解は、

$$P \begin{pmatrix} e^{(1+2i)t} & 0 \\ 0 & e^{(1-2i)t} \end{pmatrix} P^{-1}\vec{x}^0 + P \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} &P \begin{pmatrix} e^{(1+2i)t} & 0 \\ 0 & e^{(1-2i)t} \end{pmatrix} P^{-1}\vec{x}^0 \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 3+i & 3-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{(1+2i)t} & 0 \\ 0 & e^{(1-2i)t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1-3i-2i \\ -1+3i & 2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -2e^{(1+2i)t} & -2e^{(1-2i)t} \\ (3+i)e^{(1+2i)t} & (3-i)e^{(1-2i)t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1-3i-2i \\ -1+3i & 2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} (2+6i)e^{(1+2i)t} + (2-6i)e^{(1-2i)t} & 4ie^{(1+2i)t} - 4ie^{(1-2i)t} \\ -10ie^{(1+2i)t} + 10ie^{(1-2i)t} & (2-6i)e^{(1+2i)t} + (2+6i)e^{(1-2i)t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{e^{(1+2i)t} + e^{(1-2i)t}}{2} - 3 \frac{e^{(1+2i)t} - e^{(1-2i)t}}{2i} & -2 \frac{e^{(1+2i)t} - e^{(1-2i)t}}{2i} \\ \frac{5e^{(1+2i)t} - e^{(1-2i)t}}{2i} & \frac{e^{(1+2i)t} + e^{(1-2i)t}}{2} + 3 \frac{e^{(1+2i)t} - e^{(1-2i)t}}{2i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^t \cos 2t - 3e^t \sin 2t & -2e^t \sin 2t \\ 5e^t \sin 2t & e^t \cos 2t + 3e^t \sin 2t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} &= \frac{1}{40} \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 3+i & 3-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 15e^{it} + (4+3i)e^{-it} - (19+3i)e^{(1+2i)t} \\ (4-3i)e^{it} + 15e^{-it} - (19-3i)e^{(1-2i)t} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{40} \begin{pmatrix} (-38-6i)e^{-it} + (-38+6i)e^{it} + ((38+6i)e^{(1+2i)t} + (38-6i)e^{(1-2i)t}) \\ (54+2i)e^{it} + (54-2i)e^{-it} - ((54+28i)e^{(1+2i)t} + (54-28i)e^{(1-2i)t}) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\frac{19}{27} \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} - \frac{3}{1} \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} + \frac{19}{27} \frac{e^{(1+2i)t} + e^{(1-2i)t}}{2} - \frac{3}{7} \frac{e^{(1+2i)t} - e^{(1-2i)t}}{2i} \\ \frac{10}{27} \frac{2}{e^{it} + e^{-it}} - \frac{10}{1} \frac{2i}{e^{it} - e^{-it}} - \frac{10}{27} \frac{2}{e^{(1+2i)t} + e^{(1-2i)t}} + \frac{10}{7} \frac{2i}{e^{(1+2i)t} - e^{(1-2i)t}} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\frac{19}{27} \cos t - \frac{3}{10} \sin t + \frac{19}{27} e^t \cos 2t - \frac{3}{7} e^t \sin 2t \\ \frac{10}{27} \cos t - \frac{1}{10} \sin t - \frac{10}{27} e^t \cos 2t + \frac{10}{7} e^t \sin 2t \end{pmatrix}
\end{aligned}$$