

3. 不変な多変数関数 (ポテンシャル) が見つかる場合 (全微分方程式あるいは完全微分方程式)

3.1. 2変数関数の偏微分. $f(x, y)$ について、 x についての偏微分を $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$, y についての偏微分を $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ で表す. y が x の関数 $y(x)$ であれば、

$$\frac{df(x, y(x))}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y(x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y(x)) \frac{dy}{dx}(x)$$

となる。

関係式 $f(x, y) = 0$ から微分方程式 $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \frac{dy}{dx}(x) = 0$ が得られる。この形になっていることがわかれば、微分方程式で与えられている関係式を、微分を含まない関係式に直すことができる。

x, y が t の関数 $x(t), y(t)$ であるとき、

$$\frac{df(x(t), y(t))}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) \frac{dx}{dt}(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)) \frac{dy}{dt}(t)$$

となる。

常微分方程式 $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = b(x, y) \end{cases}$ に対して、もしも $\frac{df(x(t), y(t))}{dt} = 0$ となる $f(x, y)$ が

みつければ、 $f(x, y)$ は、常微分方程式の (第1) 積分と呼ばれる。このとき、 $f(x(t), y(t))$ は定数となる。 $f(x, y) = C$ から、 $y = h(x)$ のように解けることが期待できる。

$\frac{dx}{dt} = a(x, h(x))$ だから、変数分離型となる。(第1) 積分を求める問題は、

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)a(x, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)b(x, y) = 0$$

となる $f(x, y)$ を求める問題である。

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \lambda(x, y)b(x, y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\lambda(x, y)a(x, y) \end{cases}$$

となる $\lambda(x, y)$ を探すこととも同じである。これは、後に述べる積分因子を求める問題である。

例. $H(x, y)$ に対し、 $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y}(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x}(x, y) \end{cases}$ は第1積分 $H(x, y)$ を持つ。 $H(x, y)$ は

力学でハミルトニアンと呼ばれるものである。 $H(x(t), y(t))$ が一定となることは、エネルギー保存則である。

例。 $\frac{d^2x}{dt^2} = V(x)$ に対し、 $V(x) = \frac{dU}{dx}$ とする。 $y = \frac{dx}{dt}$ とおくと、微分方程式は

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = \frac{dU}{dx} \end{cases} \text{ となる。これは、上の例で } H = \frac{1}{2}y^2 - U(x) \text{ としたものである。従って、}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}y^2 - U(x) \right) = y \frac{dy}{dt} - yV(x) = 0 \text{ となり、 } \frac{1}{2}y^2 - U(x) = C \text{ (一定) ここからは、}$$

$$\frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{2(C + U(x))} \text{ という変数分離形の方程式を得る。}$$

3.2. 微分形式。 $df(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)dy$ の形の式を $f(x, y)$ の全微分とよぶ。一般に、 $g(x, y)dx + h(x, y)dy$ の形のものを1次微分形式または微分1形式とよぶ。与えられた微分1形式 $g(x, y)dx + h(x, y)dy$ に対して、それが $df(x, y)$ の形のものかどうかを問う問題が考えられる。

これは、 $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = g(x, y)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = h(x, y)$ をともに満たす f を求める問題である。

f が2回連続微分可能であれば、 $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y)$ であるから、

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial h}{\partial x}(x, y)$$

であることが必要である。これを積分可能条件と呼ぶ。積分可能条件を満たす微分1形式は閉形式と呼ばれる。全微分 $df = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)dy$ となっている微分1形式は完全形式と呼ばれる。

問題は、与えられた微分1形式 $g(x, y)dx + h(x, y)dy$ が、積分可能条件を満たすとき（閉形式であるとき）、完全形式であるかということである。

平面全体で定義された連続微分可能関数 $g(x, y)$, $h(x, y)$ については積分可能条件 $\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial h}{\partial x}(x, y)$ が、完全形式であるための十分条件であることが知られている。

実際、そのような $f(x, y)$ があれば、

$$f(x, y) - f(0, 0) = \int_0^1 \frac{df(xt, yt)}{dt} dt = \int_0^1 \left\{ \frac{\partial f}{\partial x}(xt, yt)x + \frac{\partial f}{\partial y}(xt, yt)y \right\} dt$$

を満たすから、積分可能条件を満たす微分1形式 $g(x, y)dx + h(x, y)dy$ に対して、

$$f(x, y) = \int_0^1 \{g(tx, ty)x + h(tx, ty)y\} dt$$

とすればよい。

実際、

$$\begin{aligned}
 & \frac{d}{dx} \int_0^1 \{g(tx, ty)x + h(tx, ty)y\} dt \\
 &= \int_0^1 \left\{ g(tx, ty) + \frac{\partial g}{\partial x}(tx, ty)tx + \frac{\partial h}{\partial x}(tx, ty)ty \right\} dt \\
 &= \left[g(tx, ty)t \right]_{t=0}^{t=1} - \int_0^1 \left\{ \frac{\partial g}{\partial x}(tx, ty)x + \frac{\partial g}{\partial y}(tx, ty)y \right\} t dt \\
 &\quad + \int_0^1 \left\{ \frac{\partial g}{\partial x}(tx, ty)tx + \frac{\partial h}{\partial x}(tx, ty)ty \right\} dt \\
 &= g(x, y)
 \end{aligned}$$

2つ目の等号の変形では、 t についての関数 $g(tx, ty)$ を $g(tx, ty)t$ を用いて部分積分したものが、2つ目の等号に続く行である。3つ目の等号では、積分可能条件 $\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial h}{\partial x}(x, y)$ を用いている。

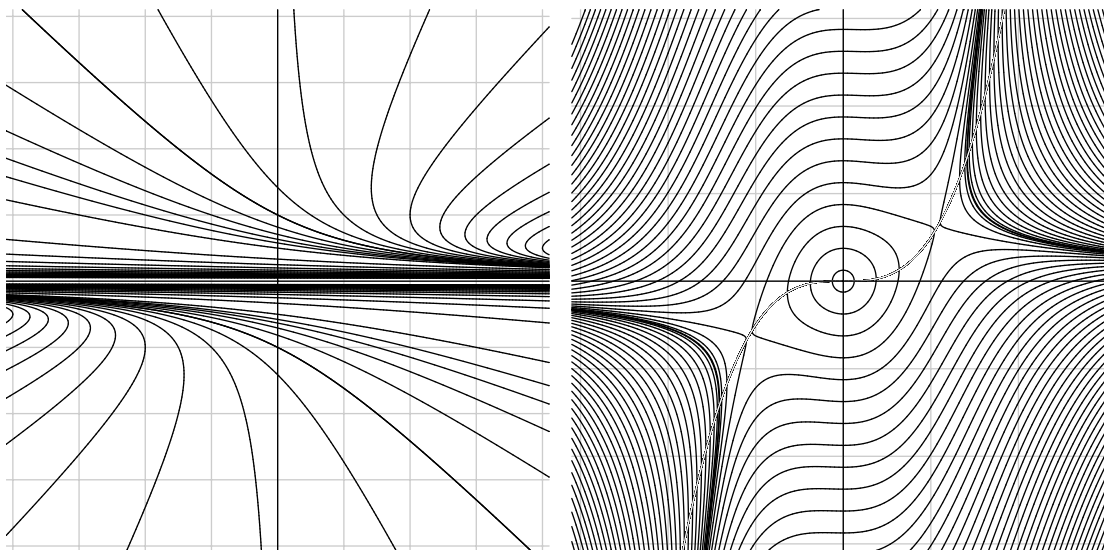
問。 $\frac{d}{dy} \int_0^1 \{g(tx, ty)x + h(tx, ty)y\} dt = h(x, y)$ を示せ。

問(1)。微分形式 $y^2 dx + (2 - xy) dy$ は2変数関数 $f(x, y)$ の全微分 df となるかどうか判定せよ。

解答例。 $\frac{\partial}{\partial y} y^2 = 2y$, $\frac{\partial}{\partial x} (2 - xy) = -y$ は異なるので、2変数関数 $f(x, y)$ の全微分 df とならない。

問(2)。上記(1)の微分形式に $\frac{1}{y^3}$ をかけて得られる微分形式 $\frac{1}{y} dx + \frac{2 - xy}{y^3} dy$ は2変数関数 $f(x, y)$ の全微分 df となるかどうか判定せよ。

解答例。 $\frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{y} = -\frac{1}{y^2}$, $\frac{\partial}{\partial x} \frac{2 - xy}{y^3} = -\frac{1}{y^2}$ は等しいので、2変数関数 $f(x, y)$ の全微分 df となる。実際、 $\frac{1}{y} dx + \frac{2 - xy}{y^3} dy = d\left(\frac{xy - 1}{y^2}\right)$ 。下の左の図参照。



積分可能条件を満たしていることがわかる微分 1 形式と見て、常微分方程式が解ける場合がある。

$$\text{例。} \frac{dy}{dx} = \frac{2x - 3x^2y}{x^3 - 2y}.$$

これを全微分方程式の形にすると $(-3x^2y + 2x)dx + (2y - x^3)dy = 0$ で、これは平面全体で定義されている。積分可能条件 $\frac{d(-3x^2y + 2x)}{dy} = \frac{d(2y - x^3)}{dx}$ を満たすので、全微分 $df = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)dy$ の形に書かれる。

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \int_0^1 \{(-3x^2yt^3 + 2xt)x + (2yt - x^3t^3)y\} dt \\ &= -3x^3y \frac{1}{4} + 2x^2 \frac{1}{2} + 2y^2 \frac{1}{2} - x^3y \frac{1}{4} \\ &= y^2 - x^3y + x^2 \end{aligned}$$

従って、 $y^2 - x^3y + x^2 = C$ すなわち、 $y = \frac{1}{2}\{x^3 \pm \sqrt{x^6 - 4(x^2 - C)}\}$ が解である。上の右の図参照。

積分可能条件を満たしていても、平面全体で定義されていない閉微分形式は、局所的には、完全形式であるが、定義域全体で完全形式となるとは限らない。

例えば、原点を除いた平面上で定義された微分 1 形式

$$gdx + hdy = -\frac{y}{x^2 + y^2}dx + \frac{x}{x^2 + y^2}dy$$

を考えると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{y}{x^2 + y^2} \right) &= -\frac{1}{x^2 + y^2} + \frac{2y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{-x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2} \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right) &= \frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{2x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{-x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2} \end{aligned}$$

となり、 $\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial h}{\partial x}$ を満たしている。

しかし、 $df = gdx + hdy$ となる $\mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$ 上で定義された関数 f は存在しない。理由は以下のとおりである。 $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$ を $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ で定義する。もしも、 f が存在していれば、

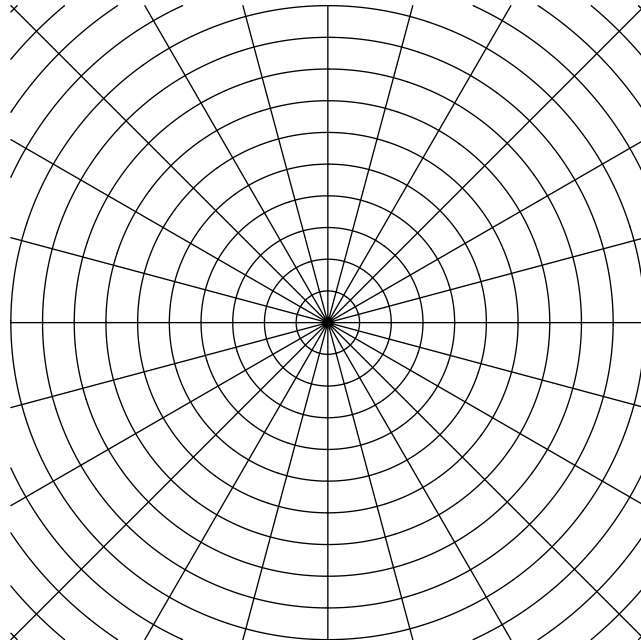
$$\int_{\gamma} gdx + hdy = f(\gamma(2\pi)) - f(\gamma(0)) = f(1, 0) - f(1, 0) = 0$$

となるはずである。しかし、

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} gdx + hdy &= \int_0^{2\pi} \left((-\sin t) \frac{d \cos t}{dt} dt + \cos t \frac{d \sin t}{dt} dt \right) \\ &= \int_0^{2\pi} dt = 2\pi \end{aligned}$$

となる。

この例では、 y 軸を除けば、 $F(x, y) = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$ の全微分となっているし、 x 軸を除けば、 $F(x, y) = \frac{1}{\tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right)}$ の全微分になっている。



積分可能条件を満たすとはかぎらない平面上の微分 1 形式 $g(x, y)dx + h(x, y)dy$ に対しても、もしもある平面上の関数 $\lambda(x, y)$ に対して、 $\lambda(x, y)g(x, y)dx + \lambda(x, y)h(x, y)dy$ が完全形式ならば、すなわち、積分可能条件 $\frac{\partial(\lambda(x, y)g(x, y))}{\partial y} = \frac{\partial(\lambda(x, y)h(x, y))}{\partial x}$ を満たせば、関数 $f(x, y)$ で $df(x, y) = \lambda(x, y)g(x, y)dx + \lambda(x, y)h(x, y)dy$ を満たすものが得られ、 $f(x, y) = C$ が解となる。

このような $\lambda(x, y)$ を積分因子と呼ぶ。積分因子を求める問題は難しい。