

ラメータが s だけ増加した点を考えると、それは $\vec{q}_0 = (x_0, y_0)$ に対して、パラメータが $s+t$ だけ増加した点となる。これを式で書くと次のように書かれる。

$$\begin{aligned} & (x(s; x(t; x_0, y_0), y(t; x_0, y_0)), y(s; x(t; x_0, y_0), y(t; x_0, y_0))) \\ & = (x(s+t; x_0, y_0), y(s+t; x_0, y_0)) \end{aligned}$$

あるいは

$$\vec{q}(s; \vec{q}(t; \vec{q}_0)) = \vec{q}(s+t; \vec{q}_0)$$

このように各曲線の上にパラメータを t だけ増加させる対応があるときに平面上にフロー（流れ）が定まっているという。曲線のパラメータの定まり方が、曲線によりばらばらであるより、パラメータの定まり方が曲線上で滑らかであり、さらに近くの曲線に対しても滑らかに変化している時を考えるほうが自然である。

このとき、曲線の各点で一斉に接ベクトルを取ることが考えられる。つまり、

$$\frac{d}{dt}(x(t; x_0, y_0), y(t; x_0, y_0)) = \left(\frac{d}{dt}x(t; x_0, y_0), \frac{d}{dt}y(t; x_0, y_0) \right)$$

あるいは

$$\frac{d}{dt}\vec{q}(t; \vec{q}_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\vec{q}(t+h; \vec{q}_0) - \vec{q}(t; \vec{q}_0)}{h}$$

を考えるのである。この微分は、 $t=0$ とすると $\vec{q}_0 = (x_0, y_0)$ を始点とするベクトルであり、一般の t では $\vec{q}(t; \vec{q}_0) = (x(t; x_0, y_0), y(t; x_0, y_0))$ を始点とするベクトルである。ところが、

$$\vec{q}(s; \vec{q}(t; \vec{q}_0)) = \vec{q}(s+t; \vec{q}_0)$$

を s で微分し、 $s=0$ とすると

$$\frac{d}{dt}\vec{q}(0; \vec{q}(t; \vec{q}_0)) = \frac{d}{dt}\vec{q}(t; \vec{q}_0)$$

が得られる。すなわち、 \vec{q}_0 からたどった曲線の一般の t でとった $\vec{q}(t; \vec{q}_0) = (x(t; x_0, y_0), y(t; x_0, y_0))$ を始点とする接ベクトル $\frac{d}{dt}\vec{q}(t; \vec{q}_0)$ は、 $\vec{q}(t; \vec{q}_0) = (x(t; x_0, y_0), y(t; x_0, y_0))$ からたどった曲線の $s=0$ でとった $\vec{q}(t; \vec{q}_0) = (x(t; x_0, y_0), y(t; x_0, y_0))$ を始点とする接ベクトル $\frac{d}{dt}\vec{q}(0; \vec{q}(t; \vec{q}_0))$ と等しい。従って各点 (x_0, y_0) に対し、パラメータの基点のとり方によらずに (x_0, y_0) を始点とするベクトル $\vec{p}(x_0, y_0) = (u(x_0, y_0), v(x_0, y_0))$ が定まる。

このように平面の各点にその点を始点とするベクトルが定まっているときにベクトル場 $\vec{p}(x, y)$ が定まっているという。

$\vec{q}(t; \vec{q}_0) = (x(t; x_0, y_0), y(t; x_0, y_0))$ は

$$\frac{d}{dt}\vec{q}(t; \vec{q}_0) = \vec{p}(\vec{q}(t; \vec{q}_0))$$

を満たしている。列ベクトルで書いて、

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x(t; x_0, y_0) \\ y(t; x_0, y_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(x(t; x_0, y_0), y(t; x_0, y_0)) \\ v(x(t; x_0, y_0), y(t; x_0, y_0)) \end{pmatrix}$$

である。このような $\begin{pmatrix} x(t; x_0, y_0) \\ y(t; x_0, y_0) \end{pmatrix}$ を（正規形の）常微分方程式

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix}$$

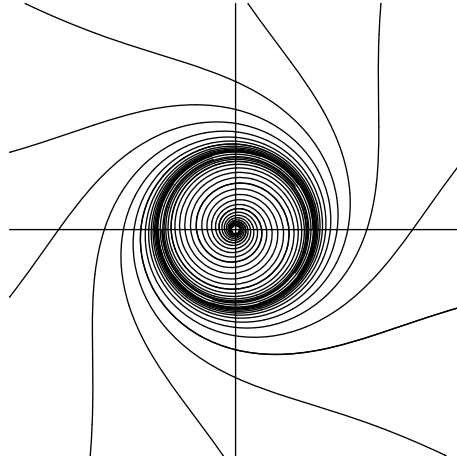


図 12.3 問 12.5 の解曲線.

すなわち

$$\frac{d}{dt} \vec{q} = \vec{p}(\vec{q})$$

の解という。

すなわち、平面上のベクトル場を与えることと、上の形の常微分方程式を考えることは同じことで、常微分方程式の解 $\begin{pmatrix} x(t; x_0, y_0) \\ y(t; x_0, y_0) \end{pmatrix}$ がフローを与えている。ベクトル場がフローを与えていると考えるとき、解曲線はベクトル場の積分曲線とも呼ばれる。

この正規形の常微分方程式はベクトル値関数 $\vec{p}(\vec{q}) = \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix}$ がリプシッツ連続であれば、初期値、すなわち $t = 0$ における位置 $\vec{q}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ を定めると、一意的に解が存在する。(定理??、??ページ参照。)ベクトル場の言葉では、フローが存在する。

一般に $u(x, y)$, $v(x, y)$ が連続微分可能であると、局所的にリプシッツ連続であることがいえる。このときは解 $\vec{q}(t; \vec{q}_0)$ は局所的に存在し、パラメータ t について、解 $\vec{q}(t; \vec{q}_0)$ が $u(x, y)$, $v(x, y)$ の定義されている領域に含まれている間は定義されている。

ここで、 $\vec{p}(\vec{q}_0) = \begin{pmatrix} u(x_0, y_0) \\ v(x_0, y_0) \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ となる点 \vec{q}_0 では、解 $\vec{q}(t; \vec{q}_0)$ は滑らかな曲線となり、その点の接ベクトルは $\vec{p}(\vec{q}_0)$ である。

$\vec{p}(\vec{q}_0) = \begin{pmatrix} u(x_0, y_0) \\ v(x_0, y_0) \end{pmatrix} = \vec{0}$ となる点 \vec{q}_0 では、 $\vec{q}(t; \vec{q}_0) = \vec{q}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ という定値写像が解である。この解は、曲線が退化した特別な場合と考える。 $\vec{p}(\vec{q}_0) = \vec{0}$ となる点 \vec{q}_0 は停留点と呼ばれる。

問 12.4. 解曲線 $\vec{q}(t; \vec{q}_0)$ が定値写像でない場合、ある実数 T ($T \geq 0$) が存在し、 $\vec{q}(t_1; \vec{q}_0) = \vec{q}(t_2; \vec{q}_0)$ ならば、 $t_2 - t_1 = nT$ となる整数 n が存在することを示せ。

\vec{q}_0 を通る解曲線は軌道とも呼ばれる。停留点でない \vec{q}_0 を通る解が、正実数 T に対して $\vec{q}(t+T; \vec{q}_0) = \vec{q}(t; \vec{q}_0)$ を満たしているとき、この軌道を周期軌道あるいは閉軌道と呼ぶ。解は周期解と呼ばれ、問 12.4 で存在する最小の T を(最小)周期と呼ぶ。

問 12.5. 常微分方程式

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y + x(x^2 + y^2 - 1) \\ x + y(x^2 + y^2 - 1) \end{pmatrix}$$

について、停留点、閉軌道を求めよ。

ヒント：停留点は、左辺が $\vec{0}$ となる点である。閉軌道を求めるのは、常微分方程式の解が式で書かれることは稀であることもあって、一般的な方法は少なく難しいので、方程式の形にヒントがないか考える。この場合は極座標に直すと良い。

13 平面上のベクトル場とフロー

13.1 定義 (6 / 2 4)

前節で考えた平面上のフローの定義をはっきり与えておこう。

定義 13.1. 平面上のフローは、点 \vec{q}_0 の時間 t だけ後の位置 $\vec{q}(t; \vec{q}_0)$ を与える写像 $(t; \vec{q}_0) \mapsto \vec{q}(t; \vec{q}_0)$ で、

$$\vec{q}(s; \vec{q}(t; \vec{q}_0)) = \vec{q}(s + t; \vec{q}_0)$$

を満たすものである。この写像は $(t; x_0, y_0) \mapsto (x(t; x_0, y_0), y(t; x_0, y_0))$ のように書かれるが、 $x(t; x_0, y_0), y(t; x_0, y_0)$ は t, x_0, y_0 に対して、無限回偏微分可能とする。

この定義から、フローに対し、各点 \vec{q}_0 に、 \vec{q}_0 を始点とするベクトル $\frac{d\vec{q}}{dt}(0; \vec{q}_0)$ を対応させることができる。

定義 13.2. 各点 \vec{q}_0 に、 \vec{q}_0 を始点とするベクトル $\vec{p}(\vec{q}_0)$ を対応させる写像 $\vec{q}_0 \mapsto \vec{p}(\vec{q}_0)$ をベクトル場と呼ぶ。この写像は $(x_0, y_0) \mapsto (u(x_0, y_0), v(x_0, y_0))$ のように書かれるが、 $u(x_0, y_0), v(x_0, y_0)$ は x_0, y_0 に対して、無限回偏微分可能とする。

ベクトル場 $\vec{p}(\vec{q})$ に対し、常微分方程式

$$\frac{d}{dt} \vec{q} = \vec{p}(\vec{q})$$

あるいは

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix}$$

を考える。常微分方程式の解の存在と一意性の定理 (定理??, ??ページ) から $\vec{q}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ を初期値とする解 $\vec{q}(t; \vec{q}_0) = \begin{pmatrix} x(t; x_0, y_0) \\ y(t; x_0, y_0) \end{pmatrix}$ が存在する。 $\vec{q}(t; \vec{q}_0)$ は平面上のフローを与える。

各点 \vec{q}_0 に対し、パラメータ表示された曲線 $\vec{q}(t; \vec{q}_0)$ を軌道という。軌道は $\{t \in \mathbf{R} \mid \vec{q}(t; \vec{q}_0) = \vec{q}_0\}$ が \mathbf{R} に一致する停留点 (固定点)、 $T > 0$ について $\{nT \mid n \in \mathbf{Z}\}$ となる周期軌道 (閉軌道)、 $\{0\}$ となるそれ以外の軌道に分けられる。(問 12.4、58 ページ参照。)

フローを考える際には、写像

$\vec{q}(t; \vec{q}_0) = \begin{pmatrix} x(t; x_0, y_0) \\ y(t; x_0, y_0) \end{pmatrix}$ を t の関数と考えるだけでなく、初期値 $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ に対する写像として考えることが非常に重要である。フロー $\vec{q}(t; \vec{q}_0)$ に対して、 $t = s$ を固定して、 $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ を $\begin{pmatrix} x(s; x_0, y_0) \\ y(s; x_0, y_0) \end{pmatrix}$ に写す写像 $\vec{Q}_s(\vec{q}_0)$ を考えると、この写像は、時間 s の後に、平面上の図形がどのように写されるかを表している。写像 $\vec{Q}_s(\vec{q}_0)$ は逆写像 $\vec{Q}_{-s}(\vec{q})$ をもっている。写像 $\vec{Q}_s(\vec{q}_0)$ の、ヤコビ行列 $J(\vec{Q}_s)_{(\vec{q}_0)}$ は $\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial x_0}(s; x_0, y_0) & \frac{\partial x}{\partial y_0}(s; x_0, y_0) \\ \frac{\partial y}{\partial x_0}(s; x_0, y_0) & \frac{\partial y}{\partial y_0}(s; x_0, y_0) \end{pmatrix}$ である。写像 $\vec{Q}_s(\vec{q}_0)$ と逆写像 $\vec{Q}_{-s}(\vec{q})$ について、 $\vec{q}_0 = \vec{Q}_{-s}(\vec{Q}_s(\vec{q}_0))$ であるから、チェインルール (32 ページ) により、 $J(\vec{Q}_{-s})_{(\vec{Q}_s(\vec{q}_0))} J(\vec{Q}_s)_{(\vec{q}_0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ である。従って、ヤコビ行列 $J(\vec{Q}_s)_{(\vec{q}_0)}$ は逆行列を持ち、ヤコビ行列の行列式は 0 でない。さらに、 $s = 0$ のときには $\vec{q}_0 = \vec{Q}_0(\vec{q}_0)$ であるから、 $s = 0$ のときのヤコビ行列 $J(\vec{Q}_0)_{(\vec{q}_0)}$ は単位行列 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ である。

13.2 フローボックス (6 / 2 4)

点 \vec{q}_0 がフローの停留点でないとすると、 \vec{q}_0 のある近傍では、曲線の族は近傍上で定義された関数の等高線の形をしている。

点 \vec{q}_0 を通り、曲線族を横断する曲線

$(-\varepsilon, \varepsilon) \mapsto \begin{pmatrix} \xi(s) \\ \eta(s) \end{pmatrix}$ をとる。 $\begin{pmatrix} \xi(0) \\ \eta(0) \end{pmatrix} = \vec{q}_0$ とする。横断するとは、この曲線の接ベクトルがフローの定めるベクトル場と 1 次独立である、すなわち、

$\det \begin{pmatrix} \xi'(s) & u(\xi(s), \eta(s)) \\ \eta'(s) & v(\xi(s), \eta(s)) \end{pmatrix} \neq 0$ を満たしていることとする。このとき、写像

$\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x(t; \xi(s), \eta(s)) \\ y(t; \xi(s), \eta(s)) \end{pmatrix}$ を考える。この写像の $(s, t) = (0, 0)$ におけるヤコビ行列は、次のように計算される。

$$\frac{\partial x(t; \xi(s), \eta(s))}{\partial s} = \frac{\partial x}{\partial x_0}(t; \xi(s), \eta(s))\xi'(s) + \frac{\partial x}{\partial y_0}(t; \xi(s), \eta(s))\eta'(s)$$

は $(s, t) = (0, 0)$ とすると、 $\xi'(0)$ に一致し、

$$\frac{\partial x(t; \xi(s), \eta(s))}{\partial t} = u(x(t; \xi(s), \eta(s)), y(t; \xi(s), \eta(s)))$$

は $(s, t) = (0, 0)$ とすると、 $u(x_0, y_0)$ に一致する。同様に、

$$\begin{aligned} \frac{\partial y(t; \xi(s), \eta(s))}{\partial s} &= \frac{\partial y}{\partial x_0}(t; \xi(s), \eta(s))\xi'(s) + \frac{\partial y}{\partial y_0}(t; \xi(s), \eta(s))\eta'(s), \\ \frac{\partial y(t; \xi(s), \eta(s))}{\partial t} &= v(x(t; \xi(s), \eta(s)), y(t; \xi(s), \eta(s))) \end{aligned}$$

は $(s, t) = (0, 0)$ とすると、 $\eta'(0)$, $v(x_0, y_0)$ に一致する。従って、 $(s, t) = (0, 0)$

におけるヤコビ行列は、 $\begin{pmatrix} \xi'(0) & u(x_0, y_0) \\ \eta'(0) & v(x_0, y_0) \end{pmatrix}$ となるが、この行列の行列式は曲線の横断性から 0 でない。

ゆえに、逆写像定理 8.1 (31 ページ) により、 $\vec{q}_0 = (x_0, y_0)$ の近傍で定義された逆写像 $(\sigma(x, y), \tau(x, y))$ が存在する。このとき、 $\sigma(x, y)$ の等位線が軌道となっている。

このように停留点でない点の近くでは、長方形からの、水平方向と垂直方向が、それぞれ横断方向と軌道方向となる写像が存在する。このような写像をフローボックスという。

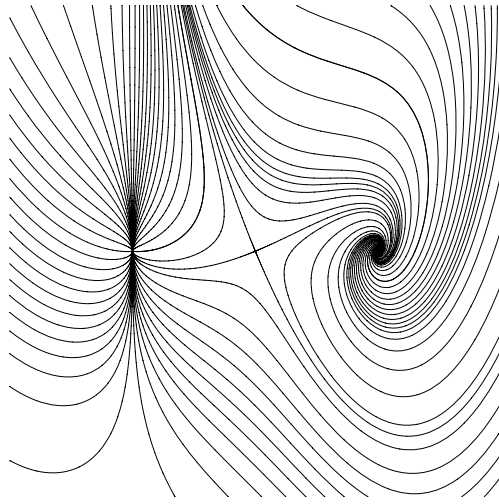


図 13.1 問 13.4 のベクトル場が生成するフローの軌道.

13.3 停留点の近傍 (6 / 2 4)

フローの停留点の近くの様子はずっと複雑でありうる。多くのベクトル場では何通りかの典型的現象がみられる。これは次の事情による。

原点 $(0, 0)$ がフローの停留点とする。フローによって定まるベクトル場 $\vec{p}(\vec{q}) = (u(x, y), v(x, y))$ は $(0, 0)$ で、

$$\begin{aligned} u(x, y) &= a_{11}x + a_{12}y + \varepsilon_1(x, y) \\ v(x, y) &= a_{21}x + a_{22}y + \varepsilon_2(x, y) \end{aligned}$$

のようにテーラー展開される。ここで、

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(0, 0) & \frac{\partial u}{\partial y}(0, 0) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(0, 0) & \frac{\partial v}{\partial y}(0, 0) \end{pmatrix}$$

である。この線形部分だけを見た常微分方程式は

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{21} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

である。線形常微分方程式の解は行列の指数関数を使えば

$$\vec{q}(t; x_0, y_0) = \exp\left(t \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{21} \end{pmatrix}\right) \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

のように表示される。その解の様子は、 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{21} \end{pmatrix}$ の固有値の値に従って、(固有値の実部が 0 にならないときは、) 次のように分類される。

固有値がともに負の実数 または実数部分が負の共役複素数	t が増加するとともに 解は原点に収束する
固有値がともに正の実数 または実数部分が負の共役複素数	t が増加するとともに 解は原点から離れる
固有値が正負の実数	原点に収束する 2 本の解曲線 原点から離れる 2 本の解曲線がある

問 13.3. 上の固有値の条件を行列の係数で表せ。

上に分類した以外の場合もあるが、上に分類したものの特徴は、原点 $(0, 0)$

の近傍で線形常微分方程式の解の様子とよとの常微分方程式

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{21} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_1(x, y) \\ \varepsilon_2(x, y) \end{pmatrix}$$

の解の様子が同じと考えてよいことである。

従って、ベクトル場の零点の周りでの軌道の様子は $\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}$ をみるこ

とでかなり良くわかるのである。常微分方程式、力学系理論の本⁷⁾ 参照。

問 13.4. ベクトル場 $\begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(x+1)(x-1) - y(x+1) \\ y + x(x+1)(x-1)(x+1) \end{pmatrix}$ について、

零点を求め、その点での $\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}$ の固有値を計算せよ。図 13.1 参照。

13.4 平面のフローによる面積の変化 (7 / 1)

フロー $\vec{q}(t; \vec{q}_0) = \begin{pmatrix} x(t; x_0, y_0) \\ y(t; x_0, y_0) \end{pmatrix}$ に対して、 $t = s$ を固定して、

$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ を $\begin{pmatrix} x(s; x_0, y_0) \\ y(s; x_0, y_0) \end{pmatrix}$ に写す写像 $\vec{Q}_s(\vec{q}_0)$ の、ヤコビ行列 $J(\vec{Q}_s)_{(\vec{q}_0)}$

は $\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial x_0}(s; x_0, y_0) & \frac{\partial x}{\partial y_0}(s; x_0, y_0) \\ \frac{\partial y}{\partial x_0}(s; x_0, y_0) & \frac{\partial y}{\partial y_0}(s; x_0, y_0) \end{pmatrix}$ である。このヤコビ行列の行列式

$\det J(\vec{Q}_s)_{(\vec{q}_0)}$ が、 $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ の近傍から $\begin{pmatrix} x(s; x_0, y_0) \\ y(s; x_0, y_0) \end{pmatrix}$ の近傍への写像による面積の拡大縮小の割合を表している。これを計算するためにこの行列式の s による変化を考える。

$$\vec{Q}_{t+s}(\vec{q}_0) = \vec{Q}_t(\vec{Q}_s(\vec{q}_0))$$

であるから

$$J(\vec{Q}_{t+s})_{(\vec{q}_0)} = J(\vec{Q}_t)_{(\vec{Q}_s(\vec{q}_0))} J(\vec{Q}_s)_{(\vec{q}_0)}$$

であり、行列式について

$$\det J(\vec{Q}_{t+s})_{(\vec{q}_0)} = \det J(\vec{Q}_t)_{(\vec{Q}_s(\vec{q}_0))} \det J(\vec{Q}_s)_{(\vec{q}_0)}$$

となる。従って、 t についての微分について、

$$\frac{d}{dt} \det J(\vec{Q}_{t+s})_{(\vec{q}_0)} = \left\{ \frac{d}{dt} \det J(\vec{Q}_t)_{(\vec{Q}_s(\vec{q}_0))} \right\} \det J(\vec{Q}_s)_{(\vec{q}_0)}$$

を得る。ここで、 $\frac{d}{dt} \det J(\vec{Q}_t)_{(\vec{Q}_s(\vec{q}_0))}$ の $t=0$ での値がわかると

$D(s) = \det J(\vec{Q}_s)_{(\vec{q}_0)}$ が満たす常微分方程式が得られる。

$\frac{d}{dt} \det J(\vec{Q}_t)_{(\vec{Q}_s(\vec{q}_0))}$ の $\vec{q}(s; \vec{q}_0)$ を \vec{q}_0 に置き換えて計算する。 $J(\vec{Q}_t)_{(\vec{q}_0)}$ は列ベクトル $\frac{\partial \vec{q}}{\partial x_0}(t; \vec{q}_0)$, $\frac{\partial \vec{q}}{\partial y_0}(t; \vec{q}_0)$ を並べて作った行列であるから、

$$\det J(\vec{Q}_t)_{(\vec{q}_0)} = \left| \frac{\partial \vec{q}}{\partial x_0}(t; \vec{q}_0), \frac{\partial \vec{q}}{\partial y_0}(t; \vec{q}_0) \right|$$

と書くと、

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \det J(\vec{Q}_t)_{(\vec{q}_0)} \\ &= \left| \frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{q}}{\partial x_0}(t; \vec{q}_0), \frac{\partial \vec{q}}{\partial y_0}(t; \vec{q}_0) \right| + \left| \frac{\partial \vec{q}}{\partial x_0}(t; \vec{q}_0), \frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{q}}{\partial y_0}(t; \vec{q}_0) \right| \end{aligned}$$