$$\int_{\partial D} x\,\mathrm{d}\,y, \quad -\int_{\partial D} y\,\mathrm{d}\,x, \quad \int_{\partial D} \frac{x\,\mathrm{d}\,y - y\,\mathrm{d}\,x}{2}$$

は D の面積を表す。

問 10.12. D を $(t^2, t^3 - t)$ $(-1 \leqq t \leqq 1)$ で囲まれる領域とする。D の面積を求めよ。

つぎの例は問 10.4 にあらわれたものと同じであるが、非常に重要である。

例 10.13. 平面上の点 (x_0, y_0) と正実数 r_0 が ${r_0}^2 \neq x_0^2 + y_0^2$ を満たしているとする。γ を $t \in [0, 2\pi]$ をパラメータとする円 $(x_0 + r_0 \cos t, y_0 + r_0 \sin t)$ とする。次の微分 1 形式 ω について γ に沿う線積分 $\displaystyle\int_\gamma \omega$ を求める。

$$\omega = \frac{x\,\mathrm{d}\,y - y\,\mathrm{d}\,x}{x^2 + y^2} = -\frac{y}{x^2 + y^2}\,\mathrm{d}\,x + \frac{x}{x^2 + y^2}\,\mathrm{d}\,y$$

上のグリーンの定理にあらわれる $f = -\dfrac{y}{x^2 + y^2}$, $g = \dfrac{x}{x^2 + y^2}\,\mathrm{d}\,y$ であるから、

$$\begin{aligned}&-\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) + \frac{\partial g}{\partial x}(x, y)\\ &= +\frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{y}{(x^2 + y^2)^2}(2y) + \frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{x}{(x^2 + y^2)^2}(2x) = 0\end{aligned}$$

であって、この $-\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) + \dfrac{\partial g}{\partial x}(x, y)$ の領域 D 上の積分は 0 になる。しかし、これが $\displaystyle\int_\gamma \omega = 0$ を意味するとは限らないから注意が必要である。グリーンの定理を用いるためには、γ を境界とする半径 r_0 の円板 D_γ 上で連続微分可能な微分 1 形式 ω が定義されている必要がある。ところが、微分 1 形式 ω は原点 $(0, 0)$ では定義されていない。従って、円 γ の中心 (x_0, y_0) と原点の距離が r_0 よりも大きければ円板 D_γ 上で ω は定義されており、$\displaystyle\int_\gamma \omega = 0$ $(x_0^2 + y_0^2 > {r_0}^2)$ がいえる。では $x_0^2 + y_0^2 < {r_0}^2$ すなわち D_γ が原点を含む場合はどう考えればよいだろうか。まず原点を中心とする半径 r_0 の円に対して直接計算すると

$$\int_\gamma \omega = \int_0^{2\pi} \Big(-\frac{r_0 \sin t}{{r_0}^2}(-r_0 \sin t)\,\mathrm{d}\,t + \frac{r_0 \cos t}{{r_0}^2}(r_0 \cos t)\,\mathrm{d}\,t\Big) = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\,t = 2\pi$$

この値は半径によらない。一般の D_γ が原点を含む場合は D_γ から原点を中心とする非常に小さな半径 δ の円板 B_δ を取り除き、残った部分を D とする。すると、D の境界は（反時計回りの向きを持つ）γ と原点中心半径 δ の円に時計回りの向きをいれたものである。∂B_δ の向きは反時計回りであるから $\partial D = \gamma - \partial B_\delta$ である。グリーンの定理は D に適用できるから、$\displaystyle\int_{\partial D} \omega = 0$ となるが、これは $\displaystyle\int_\gamma \omega = \int_{\partial B_\delta} \omega = 2\pi$ を意味する。

問 10.14. グリーンの定理を使って、次の微分 1 形式 ω について上の円 γ に沿う線積分 $\displaystyle\int_\gamma \omega$ を求めよ。

$$\omega = \frac{x\,\mathrm{d}\,x + y\,\mathrm{d}\,y}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2}\,\mathrm{d}\,x + \frac{y}{x^2 + y^2}\,\mathrm{d}\,y$$

問 10.15. γ を楕円 $(x_0 + a \cos t, y_0 + b \sin t)$ とする。γ が原点を通らないとき、$\displaystyle\int_\gamma (x^2 + y^2 - 1)\frac{x\,\mathrm{d}\,y - y\,\mathrm{d}\,x}{x^2 + y^2}$ を求めよ。
ヒント：原点では微分 1 形式が定義されていないことに注意する。
$(x^2 + y^2 - 1)\dfrac{x\,\mathrm{d}\,y - y\,\mathrm{d}\,x}{x^2 + y^2} = (x\,\mathrm{d}\,y - y\,\mathrm{d}\,x) - \dfrac{x\,\mathrm{d}\,y - y\,\mathrm{d}\,x}{x^2 + y^2}$ と分けて考える。

閉形式の線積分は端点だけでは定まらないが、閉形式の閉曲線上での線積分はグリーンの定理の一般の場合を使うと、いくつかの円周での値がわかっていると計算できることが多い。

問 10.16. 平面から $(1,0)$, $(-1,0)$ の 2 点を除いたところで定義された次の微分 1 形式を考える。

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{(x-1)\,\mathrm{d}\,y - y\,\mathrm{d}\,x}{(x-1)^2+y^2} - \frac{(x+1)\,\mathrm{d}\,y - y\,\mathrm{d}\,x}{(x+1)^2+y^2} \\ &= \frac{-4xy\,\mathrm{d}\,x + 2(x^2-y^2-1)\,\mathrm{d}\,y}{(1+x^2+y^2)^2-4x^2}\end{aligned}$$

円周 $\gamma = \{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2 = r^2\}$ に反時計回りの向き付けを考える。円周が $(1,0)$, $(-1,0)$ の 2 点は通過しないものとするとき、$\displaystyle\int_\gamma \alpha$ を求めよ。

ヒント：α の積分は $\dfrac{(x-1)\,\mathrm{d}\,y - y\,\mathrm{d}\,x}{(x-1)^2+y^2}$ の積分と $\dfrac{(x+1)\,\mathrm{d}\,y - y\,\mathrm{d}\,x}{(x+1)^2+y^2}$ の差である。また、線積分は円周を平行移動すれば微分形式 $\dfrac{x\,\mathrm{d}\,y - y\,\mathrm{d}\,x}{x^2+y^2}$ の線積分として計算される。

11　複素関数（参考）

11.1　複素微分（参考）

複素数 $z = x + y\sqrt{-1}$ を変数とする複素数値の関数

$$f(z) = u(x,y) + v(x,y)\sqrt{-1}$$

を考えよう。ここで、$u(x,y)$, $v(x,y)$ は実数値の 2 変数関数である。複素数の間には積が

$$(a_1+b_1\sqrt{-1})(a_2+b_2\sqrt{-1}) = a_1a_2 - b_1b_2 + (a_1b_2+b_1a_2)\sqrt{-1}$$

のように定義され、商も定義され、$\dfrac{1}{a+b\sqrt{-1}} = \dfrac{a-b\sqrt{-1}}{a^2+b^2}$ のようになる。複素関数の微分は $f(z_1)-f(z_0)$, z_1-z_0 の比の極限である。その極限を $a+b\sqrt{-1}$ とする。

$$\begin{aligned}f(z_1)-f(z_0)\text{ の実部} &= u(x_1,y_1)-u(x_0,y_0) \\ &= \frac{\partial u}{\partial x}(x_1-x_0) + \frac{\partial u}{\partial y}(y_1-y_0) + \varepsilon_1(x_1,y_1,x_0,y_0) \\ f(z_1)-f(z_0)\text{ の虚部} &= v(x_1,y_1)-v(x_0,y_0) \\ &= \frac{\partial v}{\partial x}(x_1-x_0) + \frac{\partial v}{\partial y}(y_1-y_0) + \varepsilon_2(x_1,y_1,x_0,y_0)\end{aligned}$$

だから

$$\begin{aligned}&f(z_1)-f(z_0) \\ &=\{\frac{\partial u}{\partial x}(x_1-x_0) + \frac{\partial u}{\partial y}(y_1-y_0) + \varepsilon_1(x_1,y_1,x_0,y_0)\} \\ &\quad+\{\frac{\partial v}{\partial x}(x_1-x_0) + \frac{\partial v}{\partial y}(y_1-y_0) + \varepsilon_2(x_1,y_1,x_0,y_0)\}\sqrt{-1}\end{aligned}$$

が

$$\begin{aligned}&(a+b\sqrt{-1})(z_1-z_0) \\ &=(a+b\sqrt{-1})((x_1-x_0)+(y_1-y_0)\sqrt{-1}) \\ &=\{a(x_1-x_0)-b(y_1-y_0)\} + \{b(x_1-x_0)+a(y_1-y_0)\}\sqrt{-1}\end{aligned}$$

と１次の部分まで一致するためには、

$$a = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad b = \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

を満たす必要がある。

これは $u(x,y)\,\mathrm{d}\,x - v(x,y)\,\mathrm{d}\,y,\ v(x,y)\,\mathrm{d}\,x + u(x,y)\,\mathrm{d}\,y$ が積分可能条件を満たし、これらが閉形式であることを意味している。この

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

を**コーシー・リーマンの方程式**と呼ぶ。複素変数についての微分可能性は実変数の微分可能性にさらに上の方程式を満たすという条件を課したものである。$f(x+y\sqrt{-1})$ を実軸の方向に偏微分したもの $\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial x}\sqrt{-1}$ が虚軸方向の偏微分の情報も含んでいることになる。$f(z)$ が複素変数について微分可能のとき、$\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial x}\sqrt{-1}$ を $f(z)$ の複素関数としての導関数と呼び、$f'(z)$ と書く。

$$f(z_1) - f(z_0) = f'(z_0)(z_1 - z_0) + \varepsilon(z_1, z_0), \quad \lim_{z_1 \to z_0} \frac{|f(z_1) - f(z_0)|}{|z_1 - z_0|} = 0$$

となっている。**複素関数**というときは複素変数に関して微分可能なものを指す。

11.2　複素数値微分１形式（参考）

$f(z) = u(x,y) + v(x,y)\sqrt{-1}$ が複素微分可能のとき、複素数に値を持つ微分形式

$$u(x,y)\,\mathrm{d}\,x - v(x,y)\,\mathrm{d}\,y + \sqrt{-1}(v(x,y)\,\mathrm{d}\,x + u(x,y)\,\mathrm{d}\,y)$$

を考える。この実部、虚部が閉形式であった。

$$\begin{aligned}&(u(x,y) + v(x,y)\sqrt{-1})(\mathrm{d}\,x + \sqrt{-1}\,\mathrm{d}\,y)\\ &= u(x,y)\,\mathrm{d}\,x - v(x,y)\,\mathrm{d}\,y + \sqrt{-1}(v(x,y)\,\mathrm{d}\,x + u(x,y)\,\mathrm{d}\,y)\end{aligned}$$

だから、$\mathrm{d}\,z = \mathrm{d}\,x + \sqrt{-1}\,\mathrm{d}\,y$ と定義すると、$f(z) = u(x,y) + v(x,y)\sqrt{-1}$ と書きなおして, 上に述べたことは $f(z)\,\mathrm{d}\,z$ が複素数値の閉形式であるといっても良い。

グリーンの定理により，$f(z)$ が円板 D を含む領域で定義されていれば、その円板の周 ∂D 上の線積分 $\displaystyle\int_{\partial D} f(z)\,\mathrm{d}\,z = 0$ となる。これは**コーシーの定理**と呼ばれ複素関数論の基本定理である。

また、$f(z)$ が複素平面上の円板上で定義された関数とすると、円板内の曲線 γ に対して線積分 $\displaystyle\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}\,z$ は端点のみによる。

問 11.1. 円板内の点 z_0 を固定し、z_0 から z にいたる線分を γ_z とし、$F(z) = \displaystyle\int_{\gamma_z} f(z)\,\mathrm{d}\,z$ とおくと、$F(z)$ はコーシー・リーマンの方程式を満たし、導関数は $f(z)$ となることを示せ。

問 11.2. $f_1(x+y\sqrt{-1}) = u_1(x,y) + v_1(x,y)\sqrt{-1}$,
$f_2(x+y\sqrt{-1}) = u_2(x,y) + v_2(x,y)\sqrt{-1}$ がコーシー・リーマンの方程式を満たすならば、f_1, f_2 の積も商も合成もコーシー・リーマンの方程式を満たすことを確かめよ。

問 11.3. $f(z)$ を原点を中心とする半径 r の円板上で複素微分可能な複素数値関数とする。$\displaystyle\int_{\partial D_r} \frac{f(z)}{z}\,\mathrm{d}\,z$ を求めよ。

12　平面の曲線の族

12.1　平面上の関数の等高線（６／１７）

平面上の関数 $f(x,y)$ について、$f(x_0,y_0)=c_0$, $(\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0),\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0))\neq\vec{0}$ のとき、(x_0,y_0) の近傍で $f(x,y)=c_0$ は滑らかな曲線となることを示した。（定理 6.1、23 ページ参照。）この時、c_0 の近くの値 c に対して、(x_0,y_0) の近傍で $f(x,y)=c$ となる点を考えると、(x_0,y_0) の近傍では $(\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y),\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y))\neq\vec{0}$ が成立しているから $f(x,y)=c$ も滑らかな曲線を定めている。このように考えると、$(\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y),\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y))\neq\vec{0}$ をみたす領域で、各点を通る滑らかな曲線 $f(x,y)=c$ があり、これらは c の値が異なればお互いに異なっている。このようにこの領域は等高線で埋め尽くされている。このような領域を埋め尽くす曲線の族を考える。

12.2　微分１形式が定める曲線族（６／１７）

関数 f の全微分 $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,\mathrm{d}\,x+\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,\mathrm{d}\,y$ が各点の近傍の等高線の方向の情報を持っているから、この全微分が $f(x,y)=c$ という等高線の族を定めていると考えてもよい。定まった曲線を $\vec{q}(t)=(\xi(t),\eta(t))$ のように適当なパラメータで表し、その接ベクトル $\dfrac{\mathrm{d}\,\vec{q}}{\mathrm{d}\,t}(t)=(\xi'(t),\eta'(t))$ を考えると、$f(\xi(t),\eta(t))=c$ だから $\dfrac{\partial f}{\partial x}(\xi(t),\eta(t))\xi'(t)+\dfrac{\partial f}{\partial y}(\xi(t),\eta(t)))\eta'(t)=0$ である。つまり接ベクトルの方向は $\mathrm{grad}\,f=(\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y),\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y))$ に直交している。

$h(x,y)$ を 0 にならない関数として、$h(x,y)\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,\mathrm{d}\,x+h(x,y)\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,\mathrm{d}\,y$ を考えるとこの微分１形式自体は積分可能条件（45 ページ）$\dfrac{\partial}{\partial y}\big(h(x,y)\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)\big)=\dfrac{\partial}{\partial x}\big(h(x,y)\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\big)$ を満たすとは限らないから、ある関数の全微分になっているとは限らない。しかし、もとの $f(x,y)=c$ の定める曲線 $\vec{q}(t)=(\xi(t),\eta(t))$ の接ベクトル $\dfrac{\mathrm{d}\,\vec{q}}{\mathrm{d}\,t}(t)=(\xi'(t),\eta'(t))$ は $(h(x,y)\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y),h(x,y)\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y))$ に直交し、

$$h(\xi(t),\eta(t))\frac{\partial f}{\partial x}(\xi(t),\eta(t))\xi'(t)+h(\xi(t),\eta(t))\frac{\partial f}{\partial y}(\xi(t),\eta(t))\eta'(t)=0$$

をみたす。従って、この微分１形式は $f(x,y)=c$ と同じ曲面族を定めている。

一般に、平面上の微分１形式 $f(x,y)\,\mathrm{d}\,x+g(x,y)\,\mathrm{d}\,y$ について、曲線 $\vec{q}(t)=(\xi(t),\eta(t))$ で、その接ベクトル $\dfrac{\mathrm{d}\,\vec{q}}{\mathrm{d}\,t}(t)=(\xi'(t),\eta'(t))$ について、$f(\xi(t),\eta(t))\xi'(t)+g(\xi(t),\eta(t)))\eta'(t)=0$ を満たすものがあるかどうかを考えよう。

$g(x_0,y_0)\neq 0$ とすると (x_0,y_0) の近傍で $g(x,y)\neq 0$ が成立する。ここでは $\dfrac{f(\xi(t),\eta(t))}{g(\xi(t),\eta(t))}\xi'(t)+\eta'(t)=0$ を満たす曲線を考えているが、とくに $\xi'(t)\neq 0$ でなければ曲線とならない。$\xi'(t)\neq 0$ ならば曲線はグラフの形 $(x,\beta(x))$ をしているから、パラメータがこのように与えられていたとすると $\dfrac{f(x,\beta(x))}{g(x,\beta(x))}+\beta'(x)=0$, すなわち $\beta'(x)=-\dfrac{f(x,\beta(x))}{g(x,\beta(x))}$ を満たすことになる。

関数 $F(x,y)$ に対し、$\beta'(x)=F(x,\beta(x))$ の形の式を**正規形の常微分方程式**という。この常微分方程式は $F(x,y)$ が連続かつ y についてリプシッツ連続のときに初期値 $b_0=\beta(x_0)$ を定めると一意的に解 $\beta(x)$ を持つことが知られている（定理**??**、**??**ページ参照）。b_0 の値を変化させると解は変化するから、初期値の関数とも考えて $\beta(x)=B(x;b_0)$ と書くと、b_0 を変化させたときの $y=B(x;b_0)$

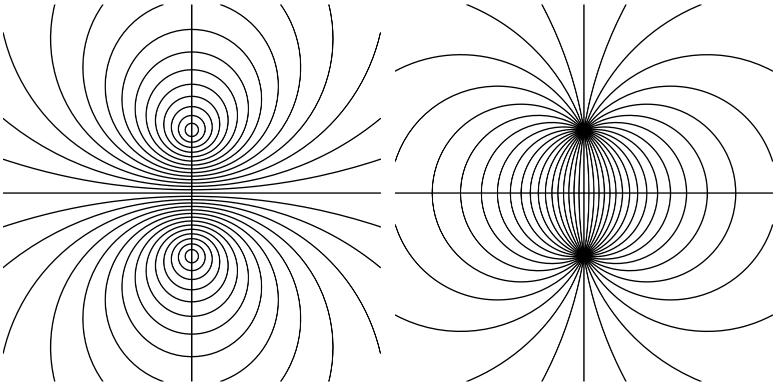

図 12.1　例題 12.2, 問 12.3 の曲線族. これらは直交する円の族である.

のグラフ $\{(x, B(x; b_0))\}$ の族が (x_0, y_0) の近傍の曲線族を定める。

$B(x; b_0)$ を x_0 において b_0 を初期値とする常微分方程式 $\beta'(x) = -\dfrac{f(x, \beta(x))}{g(x, \beta(x))}$ の解とする。(x_0, y_0) の近傍を解曲線が埋め尽くすことからこの近傍上でその点を通過する曲線の初期値 b_0 を対応させる関数 $G(x, y)$ が定義され、さらにこの関数 $G(x, y)$ を使って、曲線は $G(x, y) = b_0$ で定義される。

実際、$(x, b_0) \longmapsto (x, B(x; b_0))$ のヤコビ行列 $\begin{pmatrix} 1 & \dfrac{\partial B}{\partial x} \\ 0 & \dfrac{\partial B}{\partial b_0} \end{pmatrix}$ の、(x_0, y_0) での値は、微分方程式と $B(x_0; b_0) = b_0$ により、$\begin{pmatrix} 1 & -\dfrac{f(x_0, y_0)}{g(x_0, y_0)} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ となる。従って、逆写像定理 8.1（31 ページ）により、(x_0, y_0) の近傍で $(x, b_0) \longmapsto (x, B(x; b_0))$ の逆写像 $(x, y) \longmapsto (x, G(x, y))$ が定義される。

このような関数 $G(x, y)$ の全微分 $\dfrac{\partial G}{\partial x}(x, y)\,\mathrm{d}\,x + \dfrac{\partial G}{\partial y}(x, y)\,\mathrm{d}\,y$ と、元の微分１形式 $f(x, y)\,\mathrm{d}\,x + g(x, y)\,\mathrm{d}\,y$ を比べると、曲線 $\{(x, B(x; b_0))\}$ の接ベクトルは係数のベクトル $(\dfrac{\partial G}{\partial x}(x, y), \dfrac{\partial G}{\partial y}(x, y))$ とも $(f(x, y), g(x, y))$ とも直交しているから、各点でベクトル $(\dfrac{\partial G}{\partial x}(x, y), \dfrac{\partial G}{\partial y}(x, y))$ はベクトル $(f(x, y), g(x, y))$ の実数倍である。この実数を $h(x, y)$ とすると

$$\frac{\partial G}{\partial x}(x, y)\,\mathrm{d}\,x + \frac{\partial G}{\partial y}(x, y)\,\mathrm{d}\,y = h(x, y)f(x, y)\,\mathrm{d}\,x + h(x, y)g(x, y)\,\mathrm{d}\,y$$

となっている。

$(f(x, y), g(x, y)) \neq \vec{0}$ を満たす微分１形式 $f(x, y)\,\mathrm{d}\,x + g(x, y)\,\mathrm{d}\,y$ を 0 にならない微分１形式と呼ぶ。上の議論で次の定理が示された。

定理 12.1. 0 にならない微分１形式 $f(x, y)\,\mathrm{d}\,x + g(x, y)\,\mathrm{d}\,y$ に対して、各点の近傍では 0 にならない関数 $h(x, y)$ が存在して $h(x, y)(f(x, y)\,\mathrm{d}\,x + g(x, y)\,\mathrm{d}\,y)$ は関数の全微分となる。

例題 12.2. 平面上の微分１形式 $2xy\,\mathrm{d}\,x + (y^2 - x^2 - 1)\,\mathrm{d}\,y$ の定める曲線族を求めよ。

例題 12.2 の答。 微分方程式 $\dfrac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x} = \dfrac{2xy}{x^2 - y^2 + 1}$ を解きたいが、それには一般的な方法があるわけではない。この例題では次のように考えることができる。

$x^2 = s$ とおくと、微分１形式は $y\,\mathrm{d}\,s + (y^2 - s - 1)\,\mathrm{d}\,y$ と書かれる。さらに、$2y$ を掛けて $y^2 = t$ とおくと、微分１形式は $2t\,\mathrm{d}\,s + (t - s - 1)\,\mathrm{d}\,t$ となる。

この微分１形式が定める曲線として、微分方程式

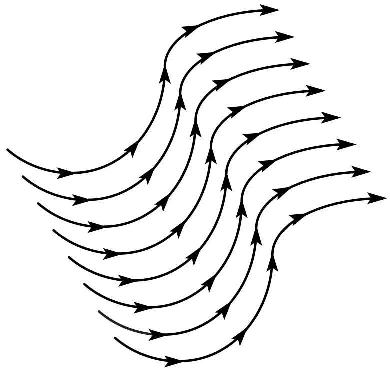

図 12.2 向きとパラメータを持った曲線の族.

$$\frac{\mathrm{d}\,s}{\mathrm{d}\,u} = t - s - 1$$
$$\frac{\mathrm{d}\,t}{\mathrm{d}\,u} = -2t$$

の解 $(\sigma(u), \tau(u))$ が考えられる。微分方程式は、第 2 式から、まず C_1 を定数として、$t = C_1 e^{-2u}$ がわかり、これを第 1 式に代入すると $\frac{\mathrm{d}\,s}{\mathrm{d}\,u} = C_1 e^{-2u} - s - 1$ が得られる。このような微分方程式の解は、$\frac{\mathrm{d}\,s}{\mathrm{d}\,u} = -s$ の解 Ke^{-u} の定数部分を関数に書き換えた $s = K(u)e^{-u}$ の形で求まることが知られている。$K(u)$ は $K'(u)e^{-u} - K(u)e^{-u} = C_1 e^{-2u} - K(u)e^{-u} - 1$ から $K'(u) = C_1 e^{-u} - e^u$ を満たしているので、C_2 を定数として $K(u) = -C_1 e^{-u} - e^u + C_2$. 従って $s = -C_1 e^{-2u} - 1 + C_2 e^{-u}$ を得る。

$x^2 = -C_1 e^{-2u} - 1 + C_2 e^{-u}$, $y^2 = C_1 e^{-2u}$ から $x^2 + y^2 + 1 = C_2 e^{-u}$, $(x^2+y^2+1)^2 = \frac{{C_2}^2}{C_1} y^2$ を得る。改めて $C = \frac{{C_2}^2}{C_1}$ として、$(x^2+y^2+1)^2 = Cy^2$ を得る。$C \leqq 0$ ならば、これを満たす (x, y) は存在しない。$C > 0$ のとき、$(x^2 + y^2 + 1 + \sqrt{C}y)(x^2 + y^2 + 1 - \sqrt{C}y) = 0$ は、

$$(x^2 + (y + \frac{\sqrt{C}}{2})^2 + 1 - \frac{C}{4})(x^2 + (y - \frac{\sqrt{C}}{2})^2 + 1 - \frac{C}{4}) = 0$$

と変形されるから、$C \geqq 4$ のとき、$(0, \pm\frac{\sqrt{C}}{2})$ を中心とする半径 $\sqrt{\frac{C}{4} - 1}$ の円である。

このような円の族 $x^2 + y^2 + 1 + 4cy = 0$ は

$$(1 + c)(x^2 + (y + 1)^2) = c(x^2 + (y - 1)^2)$$

と変形され、$(0, -1)$ への距離と $(0, 1)$ への距離の比が、$c \geqq 0$ のときは $\sqrt{c} : \sqrt{1 + c}$ となる点、$c \leqq -1$ のときは $\sqrt{-c} : \sqrt{-(1 + c)}$ となる点である。これはアポロニウスの円と呼ばれる。

問 12.3. 平面上の微分 1 形式 $(x^2 - y^2 + 1)\,\mathrm{d}\,x + 2xy\,\mathrm{d}\,y$ の定める曲線族を求めよ。

12.3 向きとパラメータを持った曲線の族（6／２４）

平面上に曲線の族が、等高線の族のように与えられ、さらに、曲線に向きとパラメータを持っているとする。各点 $\overrightarrow{q_0} = (x_0, y_0)$ に対し、それを含む曲線が定まりその曲線上のパラメータの値が定まるが、パラメータが t だけ増加した点を $\overrightarrow{q}(t; \overrightarrow{q_0}) = (x(t; x_0, y_0), y(t; x_0, y_0))$ と書くことにする。パラメータは、t だけ増加あるいは減少した点が定まればよい。

パラメータがついていることの重要性は次のことである。点 $\overrightarrow{q_0} = (x_0, y_0)$ に対し、同じ曲線の上でパラメータが t だけ増加した点 $\overrightarrow{q}(t; \overrightarrow{q_0})$ から、さらにパ