

7 空間の曲面 2

7.1 空間上の関数とその等位面 (5 / 13)

空間の各点における温度の値を対応させるとこれは空間上の関数を与える。空間上の関数は $f(x, y, z)$ のように表示される。多くの場合 $f(x, y, z) = c$ という関数の値が等しい点全体は曲面をなす。レベルサーフェス(等位面)とよぶ。関数が点における温度であれば等温面、圧力であれば等圧面である。

平面の関数 $h(x, y)$ に対して、その関数のグラフが傾いているならば滑らかな等高線 $h(x, y) = c$ が定義されることを述べた。3次元空間で定義された関数のグラフは4次元空間にあるが平面上の等高線の場合と同様に等位面 $f(x, y, z) = c$ が曲面となるためには $(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}) \neq \vec{0}$ という条件を課するのが良い。 $(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z})$ も勾配ベクトルと呼ばれ $\text{grad } f$ と書かれる。

定理 7.1 (陰関数定理). $f(x, y, z)$ は連続微分可能とし、 $\frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ とすると (x_0, y_0, z_0) の近くで、レベルサーフェスは (x_0, y_0) の近くから z_0 の近くへの連続微分可能関数のグラフとなる。

陰関数定理の証明をしよう。 $\frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) > 0$ であるとする。偏微分の連続性から、 (x_0, y_0, z_0) を含むある直方体

$$[x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b] \times [z_0 - c, z_0 + c]$$

上で $\frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) > 0$ であり、この直方体上で、 $f(x, y, z)$ は z について単調増加である。さて、正実数 ε を

$$\varepsilon = \min\{f(x_0, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0 - c), f(x_0, y_0, z_0 + c) - f(x_0, y_0, z_0)\}$$

で定めると、ある δ に対し、 $\max\{|x - x_0|, |y - y_0|\} \leq \delta$ のとき、

$$f(x, y, z_0 - c) < f(x_0, y_0, z_0) - \frac{\varepsilon}{2}, \quad f(x_0, y_0, z_0) + \frac{\varepsilon}{2} < f(x, y, z_0 + c)$$

である。このような各 (x, y) に対し、中間値の定理から区間 $(z_0 - c, z_0 + c)$ 上の1点 z で $f(x, y, z) = f(x_0, y_0, z_0)$ となる。単調性からこのような z はただ1つつまり、それを $g(x, y)$ とおく。

$g(x, y)$ が (x, y) について連続であることは、 $(x, y, g(x, y))$ において、上の議論を繰り返し示すことができるが、後の議論を透明にするためにリプシッツ連続であることを示そう。

$g(x, y)$ がリプシッツ連続とは、正実数 L で次の不等式を満たすものが取れることをいう。

$$|g(x_2, y_2) - g(x_1, y_1)| \leq L\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

さて、 $f(x, y, z)$ のひとつの方向 (u, v, w) ($u^2 + v^2 + w^2 = 1$) への変化を調べる。通常は球面上の緯度を φ 、経度を θ で表すように $(u, v, w) = (\cos \varphi \cos \theta, \cos \varphi \sin \theta, \sin \varphi)$ のようなパラメータをとるが、ともかく $\frac{d f(x_1 + tu, y_1 + tv, z_1 + tw)}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}u + \frac{\partial f}{\partial y}v + \frac{\partial f}{\partial z}w$ を得る。仮定から、直方体上で $\frac{\partial f}{\partial z} > 0$ であるが、これは $(u, v, w) = (0, 0, 1)$ のときにベクトル $\text{grad } f$ と (u, v, w) の内積 $\frac{\partial f}{\partial x}u + \frac{\partial f}{\partial y}v + \frac{\partial f}{\partial z}w$ が正であることを言っている。

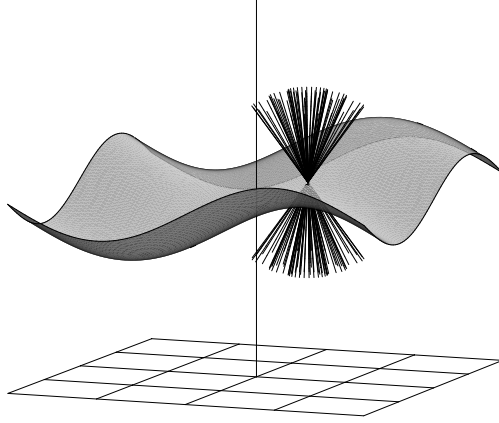


図 7.1 線分に沿って関数が増加することからリプシッツ連続性がわかる。

内積は連続であるから方向 (u, v, w) が $(0, 0, 1)$ に近いとき、すなわちある緯度 $\varphi_0 \leq \frac{\pi}{2}$ よりも北極点に近い方向 $(u, v, w) = (\cos \varphi \cos \theta, \cos \varphi \sin \theta, \sin \varphi)$ ($\varphi_0 \leq \varphi$) に対し、内積の値は正となる。すなわち、その方向で $f(x, y, z)$ は単調増加であり、 $(x_1, y_1, g(x_1, y_1))$ に対し、 (x_2, y_2, z_2) が、

$$z_2 - g(x_1, y_1) \geq \tan \varphi_0 \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

を満たせば、 $f(x_2, y_2, z_2) > f(x_1, y_1, g(x_1, y_1)) = f(x_0, y_0, z_0)$ 、また、

$$z_2 - g(x_1, y_1) \leq -\tan \varphi_0 \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

を満たせば、 $f(x_2, y_2, z_2) < f(x_1, y_1, g(x_1, y_1)) = f(x_0, y_0, z_0)$ となる。よって、 $g(x_2, y_2)$ は $f(x_2, y_2, g(x_2, y_2)) = f(x_0, y_0, z_0)$ を満たすから、

$$|g(x_2, y_2) - g(x_1, y_1)| \leq \tan \varphi_0 \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

を満たす。これで、 $g(x, y)$ が $\tan \varphi_0$ をリプシッツ定数としてリプシッツ連続であることが示された。

さて、 $g(x, y)$ の偏微分について調べよう。 $f(x, y, g(x, y)) = f(x_1, y_1, z_1)$ ($z_1 = g(x_1, y_1)$) について、 $f(x, y, z)$ の微分可能性から、

$$\begin{aligned} & f(x_1 + h, y_1 + k, g(x_1 + h, y_1 + k)) \\ &= f(x_1, y_1, z_1) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_1, y_1, z_1)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_1, y_1, z_1)k \\ & \quad + \frac{\partial f}{\partial z}(x_1, y_1, z_1)(g(x_1 + h, y_1 + k) - g(x_1, y_1)) \\ & \quad + \varepsilon(x_1, y_1, z_1, h, k, g(x_1 + h, y_1 + k) - g(x_1, y_1)), \\ & \lim \frac{\varepsilon(x_1, y_1, z_1, h, k, g(x_1 + h, y_1 + k) - g(x_1, y_1))}{\sqrt{h^2 + k^2 + (g(x_1 + h, y_1 + k) - g(x_1, y_1))^2}} = 0 \end{aligned}$$

である。従って

$$\begin{aligned} & g(x_1 + h, y_1 + k) - g(x_1, y_1) \\ &= -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x_1, y_1, z_1)}{\frac{\partial f}{\partial z}(x_1, y_1, z_1)}h - \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x_1, y_1, z_1)}{\frac{\partial f}{\partial z}(x_1, y_1, z_1)}k - \varepsilon_1(x_1, y_1, h, k) \end{aligned}$$

において、

$$\begin{aligned} & \frac{\varepsilon_1(x_1, y_1, h, k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} \\ &= \frac{\varepsilon(x_1, y_1, z_1, h, k, g(x_1 + h, y_1 + k) - g(x_1, y_1))}{\sqrt{h^2 + k^2 + (g(x_1 + h, y_1 + k) - g(x_1, y_1))^2}} \\ & \quad \times \frac{\sqrt{h^2 + k^2 + (g(x_1 + h, y_1 + k) - g(x_1, y_1))^2}}{\sqrt{h^2 + k^2}} \end{aligned}$$

となるが、 $g(x, y)$ のリプシッツ連続性により、

$$\begin{aligned} & \sqrt{h^2 + k^2 + (g(x_1 + h, y_1 + k) - g(x_1, y_1))^2} \\ & \leq \sqrt{(1 + (\tan \varphi_0)^2)(h^2 + k^2)} = \frac{\sqrt{h^2 + k^2}}{\cos \varphi_0} \end{aligned}$$

だから、 $(h, k) \rightarrow 0$ のとき、 $\frac{\varepsilon_1(x_1, y_1, h, k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} \rightarrow 0$ となる。従って

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, g(x, y))}{\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, g(x, y))}, \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, g(x, y))}{\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, g(x, y))}$$

であることがわかる。これらは連続な関数である。

注意。 $g(x, y)$ が偏微分可能であることがわかっていて $f(x, y, g(x, y)) = c$ ならば、 $\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}$ が上の式で与えられなければならないことは $f(x, y, g(x, y)) = c$ を偏微分すればわかる。上の証明では ε_1 の評価が最重要の点であり、リプシッツ連続性を用いるとこれがうまくできるのである。

7.2 陰関数表示された曲面の接平面 (5 / 1 3)

空間上の関数 $f(x, y, z)$ について、 $(\text{grad } f)(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ ならば (x_0, y_0, z_0) の近傍において $f(x, y, z) = f(x_0, y_0, z_0)$ は曲面を表すことを示した。この曲面上の曲線で (x_0, y_0, z_0) を通るものは $(\xi(t), \eta(t), \zeta(t))$ ($(\xi(t_0), \eta(t_0), \zeta(t_0)) = (x_0, y_0, z_0)$) と書かれるが、この曲線は $f(\xi(t), \eta(t), \zeta(t)) = f(x_0, y_0, z_0)$ を満たしているので、曲線の接ベクトル $(\xi'(t_0), \eta'(t_0), \zeta'(t_0))$ は、これを t について微分した式

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)\xi'(t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)\eta'(t_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)\zeta'(t_0) = 0$$

を満たす。これは、 $(\text{grad } f)(x_0, y_0, z_0)$ と接ベクトル $(\xi'(t_0), \eta'(t_0), \zeta'(t_0))$ の内積が 0、すなわち、これらが直交していることを表している。接ベクトルとなるベクトルは曲面の接平面上にあるベクトルであるから、接平面は方程式

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0$$

で表される。5 ページ参照。言葉を変えていうと、 $\text{grad } f$ は曲面の法線方向のベクトルを表している。

7.3 2次曲面 (5 / 1 3)

陰関数表示された曲面の典型的な例として2次曲面について説明しよう。

2次曲面は x, y, z についての2次式が0になる点として定義される。すなわち $x^2, y^2, z^2, xy, yz, zx, x, y, z, 1$ の線形結合が0になるというものである。このような2次式は2次同次部分、1次同次部分、定数項の和であり、行列を使って次の形に表される。

$$f(x, y, z) = (x \ y \ z) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + (b_1 \ b_2 \ b_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + c$$

ここで、 $a_{12} + a_{21}$ は xy の係数であるから $a_{12} = a_{21}$ ととることにしてよい。

このように考えると行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ は対称行列としてよい。線形

代数の定理によれば対称行列は直交行列 P (逆行列 P^{-1} が転置行列 P^* に一致する行列) で対角化される。線形代数の本⁷⁾ 参照。

$$P^*AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}. \text{ この直交行列 } P \text{ を使って } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \text{ と座標}$$

変換すると、2次式は XYZ 座標で

$$\begin{aligned} & (X \ Y \ Z)P^*AP \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} + (b_1 \ b_2 \ b_3)P \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} + c \\ &= (X \ Y \ Z) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} + (\beta_1 \ \beta_2 \ \beta_3) \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} + c \end{aligned}$$

と書かれる。ここで $(\beta_1 \ \beta_2 \ \beta_3) = (b_1 \ b_2 \ b_3)P$ とおいた。従って XYZ 座標では2次式

$$F(X, Y, Z) = \lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + \lambda_3 Z^2 + \beta_1 X + \beta_2 Y + \beta_3 Z + c$$

を使って、 $f(x, y, z) = 0$ は $F(X, Y, Z) = 0$ と書かれる。

$F(X, Y, Z)$ に対して、 $\text{grad } F$ は簡単に計算できて、
 $\text{grad } F = (2\lambda_1 X + \beta_1, 2\lambda_2 Y + \beta_2, 2\lambda_3 Z + \beta_3)$ となる。この $F(X, Y, Z) = 0$ が曲面を表すためには、 $F(X, Y, Z) = 0$ を満たす点において $\text{grad } F \neq \vec{0}$ が成立すればよい。

ここで $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = \det A \neq 0$ と仮定する。このとき、 $\text{grad } F = \vec{0}$ となる点は $(-\frac{\beta_1}{2\lambda_1}, -\frac{\beta_2}{2\lambda_2}, -\frac{\beta_3}{2\lambda_3})$ の1点だけである。したがって、この点が $F(X, Y, Z) = 0$ を満たさなければ、すなわち $F(-\frac{\beta_1}{2\lambda_1}, -\frac{\beta_2}{2\lambda_2}, -\frac{\beta_3}{2\lambda_3}) \neq 0$ ならば $F(X, Y, Z) = 0$ は曲面を表す。言い方を変えると、 $f(x, y, z)$ について、 $\det A \neq 0$ ならば、定数項 c がある c_0 と異なれば $f(x, y, z) = 0$ は曲面を表す。

このような $F(X, Y, Z)$ を扱うときには、高等学校以来親しみのある平方完成という方法もある。

$$F(X, Y, Z) = \lambda_1 \left(X + \frac{\beta_1}{2\lambda_1}\right)^2 + \lambda_2 \left(Y + \frac{\beta_2}{2\lambda_2}\right)^2 + \lambda_3 \left(Z + \frac{\beta_3}{2\lambda_3}\right)^2 + c - c_0$$

となり、上にあらわれた c_0 が、 $c_0 = \frac{\beta_1^2}{4\lambda_1} + \frac{\beta_2^2}{4\lambda_2} + \frac{\beta_3^2}{4\lambda_3}$ を満たすこともわかる。

ここまで来て、奇妙なことに気が付く人もいるだろう。つまり、 $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, $\lambda_3 > 0$ で、 $c - c_0 > 0$ ならば $F(X, Y, Z)$ は常に正の値をとり、 $F(X, Y, Z) = 0$ を満たす点は存在しない。先ほどの主張は c_0 と異なる定数項を持つ場合は曲面であるというものであるが、これが空集合に対する主張となっているのである。

これは、論理的に反省すべきところである。数学の論理の立場では、条件を満たす点の存在しない命題はいつも成立していると考ええる。あるいは空集合は常に曲面であると考えるのである。

次に興味深い場合は $\lambda_1 \lambda_2 \neq 0$, $\lambda_3 = 0$, $\beta_3 \neq 0$ となる場合である。このときは $\text{grad } F$ の一つの成分 $\beta_3 \neq 0$ であるから、定数項の値によらず曲面を定める。このときは、

$$Z = -\frac{\lambda_1}{\beta_3} \left(X + \frac{\beta_1}{2\lambda_1}\right)^2 - \frac{\lambda_2}{\beta_3} \left(Y + \frac{\beta_2}{2\lambda_2}\right)^2 + \frac{\beta_1^2}{4\beta_3\lambda_1} + \frac{\beta_2^2}{4\beta_3\lambda_2} + \frac{c}{\beta_3}$$

となる。

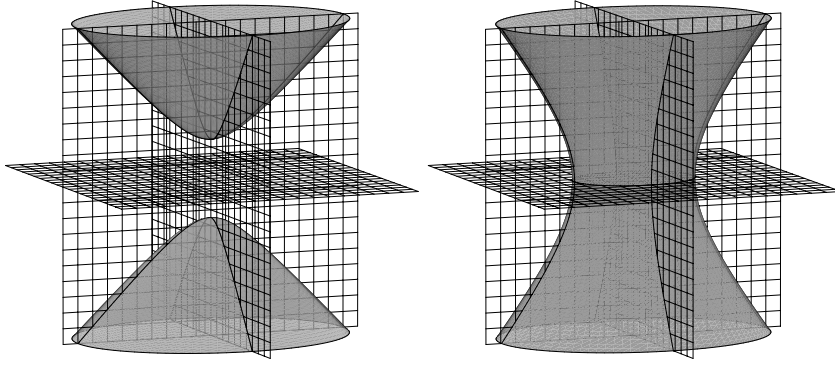


図 7.2 2 葉双曲面, 1 葉双曲面.

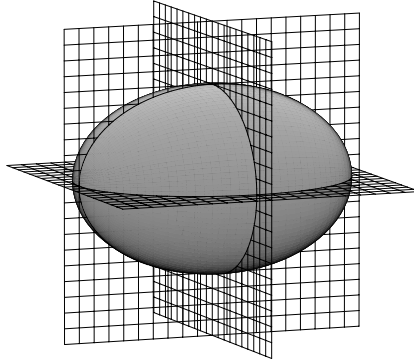


図 7.3 楕円面.

A の固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, および係数 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ についてのこれ以外の場合
は 2 次曲線と直線の直積等になりあまり面白くない。

上の場合の 2 次曲面の形をとらえるためには、座標の平行移動、座標軸方向
の定数倍を行う。

$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = \det A \neq 0$ のときは $\text{grad } F = 0$ となる点が原点となるように平行
移動し、新しい座標を再び XYZ と書くと、曲面の方程式は
 $\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + \lambda_3 Z^2 = c_0 - c$ となる。さらに、 $c_0 - c \neq 0$ として、この方
程式が表す図形を X 方向に $\sqrt{|\frac{\lambda_1}{c_0 - c}|}$ 倍、 Y 方向に $\sqrt{|\frac{\lambda_2}{c_0 - c}|}$ 倍、 Z 方向に
 $\sqrt{|\frac{\lambda_3}{c_0 - c}|}$ 倍した図形は $\pm X^2 \pm Y^2 \pm Z^2 = 1$ で表される。符号が $+++$ の
ときは球面、 $++-$ のときは双曲線 $x^2 - y^2 = 1$ を x 軸のまわりに回転させて
得られる 2 葉双曲面、 $+-$ のときは双曲線 $x^2 - y^2 = 1$ を y 軸のまわりに回
転させて得られる 1 葉双曲面と呼ばれる図形である。図 7.2 参照。座標軸方向
に定数倍した形が球面になったときは、楕円面と呼ばれる。図 7.3 参照。

$\lambda_1 \lambda_2 \neq 0, \lambda_3 = 0, \beta_3 \neq 0$ となる場合は、平行移動および座標軸方向の定数
倍により、 $Z = \pm X^2 \pm Y^2$ の形になる。符号が同じ時に楕円放物面、符号が異
なるときに双曲放物面と呼ばれる。図 5.3 (22 ページ) 参照。

問 7.2. 3 変数の関数 $f(x, y, z)$ に対し、 $\frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$,
 $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) = 0$ とするとき、 (x_0, y_0, z_0) において定義さ

れる陰関数 $g(x, y)$ の (x_0, y_0) におけるヘッセ行列 $\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \end{pmatrix}$ を求めよ。

問 7.3. 空間上の関数

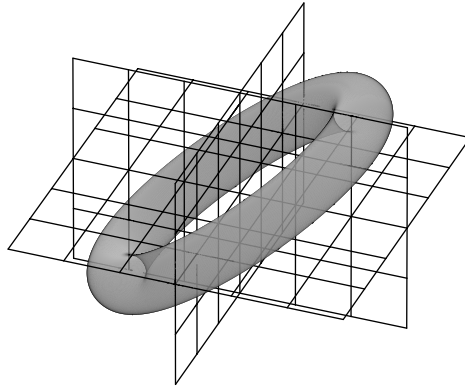


図 7.4 問 7.3 の図形. 辺の長さ 2 の正方形の網目は座標平面.

$$f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2 + 24)^2 - 4((4x + 3z)^2 + (5y)^2)$$

を考える。

(1) $f(x, y, z) = 0$ を満たす点は有界閉集合をなすことを示せ。

ヒント：有界性は $x^2 + y^2 + z^2 = N^2$ とするとき N がある実数より大ならば $f(x, y, z) > 0$ を示す。

(2) $f(x, y, z) = 0$ は曲面であることを示せ。

ヒント： $f = 0, \text{grad } f = \vec{0}$ を満たす点がないことをいえばよい。たとえば $4f(x, y, z) - x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) - y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) - z \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z)$ を計算してみる。

(3) 4点、 $\pm(4, 0, 4), \pm(4, 0, 2)$ において、
 $f(x_0, y_0, z_0) = 0, \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0, \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) = 0$ であることを確かめ、これらの点 (x_0, y_0) の近傍で $f(x, y, z) = 0$ により定義される陰関数 $g(x, y)$ のヘッセ行列を求めよ。

8 逆写像の定理

8.1 曲面のパラメータの取り換え (5 / 20)

曲線のパラメータ表示においてはパラメータの取り換えは単調な関数を代入することを許すというものであった。すなわち、 $(\xi(t), \eta(t), \zeta(t))$ というパラメータ表示においてパラメータを取り換える場合には、単調な関数 $\tau(s)$ を使って $t = \tau(s)$ の代入により得られる $(\xi(\tau(s)), \eta(\tau(s)), \zeta(\tau(s)))$ が同じ曲線の異なるパラメータによる表示である。 $\frac{d\tau}{ds} \neq 0$ ならば、単調性が保証されるのであった。

曲面のパラメータについて、一番簡単な場合に考えると、平面上の関数のグラフになっている場合が挙げられるが、平面自体の座標の取り換えも曲面のパラメータの取り換えを引き起こす。すなわち、

$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \neq 0$ ならば、 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ とすると、関数のグラフ $(x, y, f(x, y))$ は

$$(a_{11}X + a_{12}Y, a_{21}X + a_{22}Y, f(a_{11}X + a_{12}Y, a_{21}X + a_{22}Y))$$

のように表される。

このように少なくとも平面のパラメータの書き換えは許されてしまう。実際に平面のパラメータを書き換える方法には非常に大きな自由度がある。

平面のパラメータの書き換えは、書き換えた後、元に戻すことが出来なければならない。つまり、パラメータ (s, t) と (x, y) があると、点 (x, y) に対