5.4 曲率（参考）

曲面の曲がり方をもっと詳しく調べるにはどうすれば良いだろうか。曲線を調べるときには曲線上の点における接線と法線を軸とする座標を考えた。2 変数関数 $f(x,y)$ のグラフ $z=f(x,y)$ の接平面の方程式は

$$z-f(x_0,y_0)=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-x_0)$$

で与えられる。これはベクトル $(-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0),-\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0),1)$ と接平面の方向のベクトル $(x-x_0,y-y_0,z-f(x_0,y_0))$ との内積が 0 ということだから、接平面の方向のベクトルと $(-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0),-\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0),1)$ は直交している。5 ページ参照。$(-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0),-\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0),1)$ の方向の単位ベクトル $\vec{n}$ をとる時、$(x_0,y_0,f(x_0,y_0))+t\vec{n}$ と表される直線を曲面 $z=f(x,y)$ の**法線**と呼ぶ。

$(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ を原点として曲面 $z=f(x,y)$ の法線を Z 軸とし、接平面 $z-f(x_0,y_0)=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-x_0)$ 上に X 軸、Y 軸を持つ座標系を考える。すなわち、ある直交行列 P を使って、
$\begin{pmatrix}X\\Y\\Z\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}x-x_0\\y-y_0\\z-f(x_0,y_0)\end{pmatrix}$ により座標変換する。

$(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ の近くで XYZ 座標で考えると、曲面と Z 軸に平行な直線は 1 点で交わるから，曲面は $Z=F(X,Y)$ の形に書かれる。接平面は $Z=0$ だから、$\frac{\partial F}{\partial X}(0,0)=0,\ \frac{\partial F}{\partial Y}(0,0)=0$ である。従って、

$$F(X,Y)=\frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial X^2}(0,0)X^2+\frac{\partial^2 F}{\partial X\partial Y}(0,0)XY+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial Y^2}(0,0)Y^2+\varepsilon(X,Y)$$

$(\lim_{X^2+Y^2\to 0}\frac{\varepsilon(X,Y)}{X^2+Y^2}=0)$ と書かれる。F の 2 階微分のなす行列 H と f の 2 階微分のなす行列 h, すなわち
$H=\begin{pmatrix}\frac{\partial^2 F}{\partial X^2}(0,0) & \frac{\partial^2 F}{\partial X\partial Y}(0,0)\\ \frac{\partial^2 F}{\partial X\partial Y}(0,0) & \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2}(0,0)\end{pmatrix}$ と $h=\begin{pmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)\end{pmatrix}$ とは異なる行列であるが、19 ページの接平面と曲面の位置関係の議論から固有値の符号の組み合わせは一致している。

曲面 $z=f(x,y)$ とその上の 1 点 $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ に対して, その点における法線が定まり、XYZ 座標の取り方は、XY 座標を接平面上で回転するだけの自由度しかない。つまり、接平面に別の $\overline{X}\,\overline{Y}$ 座標をとると、接平面の XY 座標と $\overline{X}\,\overline{Y}$ 座標との間には $\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\overline{X}\\\overline{Y}\end{pmatrix}$ という関係があるが, $\overline{X}\,\overline{Y}Z$ 座標系では、曲面を与える関数 $\overline{F}$ は

$$\begin{aligned}&\overline{F}(\overline{X},\overline{Y})=F(\overline{X}\cos\varphi-\overline{Y}\sin\varphi,\overline{X}\sin\varphi+\overline{Y}\cos\varphi)\\
=&\ \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\overline{X} & \overline{Y}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi\\ -\sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial^2 F}{\partial X^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial X\partial Y}\\ \frac{\partial^2 F}{\partial X\partial Y} & \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\overline{X}\\\overline{Y}\end{pmatrix}\\
&\quad+\varepsilon(\overline{X}\cos\varphi-\overline{Y}\sin\varphi,\overline{X}\sin\varphi+\overline{Y}\cos\varphi)\end{aligned}$$

のように与えられる。すなわち、
$H=\begin{pmatrix}\frac{\partial^2 F}{\partial X^2}(0,0) & \frac{\partial^2 F}{\partial X\partial Y}(0,0)\\ \frac{\partial^2 F}{\partial X\partial Y}(0,0) & \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2}(0,0)\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}$ に対して、$\overline{X}\,\overline{Y}Z$ 座標系における 2 階微分の行列 $\begin{pmatrix}\frac{\partial^2 \overline{F}}{\partial \overline{X}^2}(0,0) & \frac{\partial^2 \overline{F}}{\partial \overline{X}\partial \overline{Y}}(0,0)\\ \frac{\partial^2 \overline{F}}{\partial \overline{X}\partial \overline{Y}}(0,0) & \frac{\partial^2 \overline{F}}{\partial \overline{Y}^2}(0,0)\end{pmatrix}$ は $A^{-1}HA$ で与えられる。

従って、H の固有値 λ_1,λ_2 は接平面の XY 座標のとり方によらず、曲面によって定まっている。この H の固有値 λ_1,λ_2 を曲面の $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ における**主曲率**とよぶ。固有値 λ_1,λ_2 に対する固有ベクトルは XY 平面上すなわち曲面の接平面上にある。これらの固有ベクトルの方向を**主曲率方向**と呼ぶ。

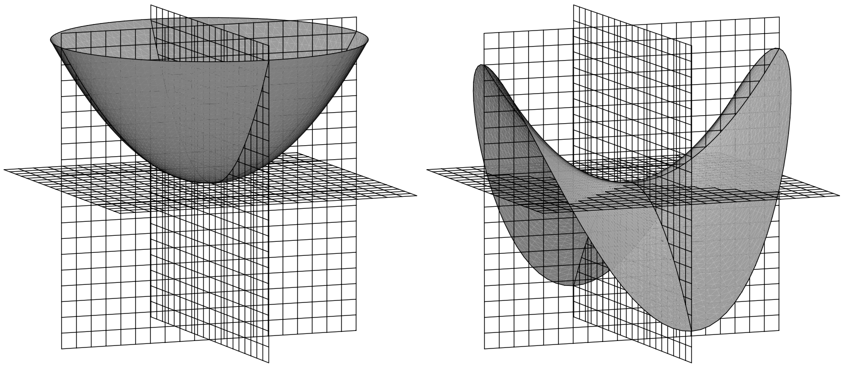

図 5.3 楕円放物面, 双曲放物面.

行列の固有値を λ_1, λ_2 とする。λ_1 と λ_2 が異なるとするとその固有ベクトルの方向に $\overline{X}$ 軸 $\overline{Y}$ 軸を取ることができる。固有ベクトルの方向の単位ベクトルを XY 座標で $\begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{pmatrix}$ とそれと直交する $\begin{pmatrix}-\sin\varphi\\ \cos\varphi\end{pmatrix}$ にとると、XY 座標と $\overline{X}\,\overline{Y}$ 座標との間には、上に述べた $\begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\overline{X}\\ \overline{Y}\end{pmatrix}$ という関係があるが，この特別な $\overline{X}\,\overline{Y}Z$ 座標系では

$$\overline{F}(\overline{X},\overline{Y})=\frac{1}{2}(\lambda_1\overline{X}^2+\lambda_2\overline{Y}^2)+\varepsilon(\overline{X}\cos\varphi-\overline{Y}\sin\varphi,\overline{X}\sin\varphi+\overline{Y}\cos\varphi)$$

となる。

$z=\lambda_1x^2+\lambda_2y^2$ のグラフを $\lambda_1\lambda_2>0$ のとき**楕円放物面**、$\lambda_1\lambda_2<0$ のとき**双曲放物面**という。図 5.3 参照。このように曲面を法線方向を軸とする楕円放物面、双曲放物面で近似したときの係数が主曲率である。

曲面を接平面を XY 座標としてグラフの形に書くのは容易ではないから、主曲率、主曲率方向を求めるのには若干面倒な計算が必要である。

問 5.3. 曲面上の点 $\vec{q_0}$ における法線方向の単位ベクトルを $\vec{n}$ とする。$\vec{n}$ を Z 軸方向とし、$\vec{q_0}$ における接平面を XY 平面とする座標系で、曲面が $Z=F(X,Y)$ と書かれているとする。$\vec{q_0}$ を通る曲面上の曲線 $\vec{q}(t)$ $(\vec{q}(t_0)=\vec{q_0})$ について、$\vec{n}$ との内積 $(\vec{q}\bullet\vec{n})(t)=\vec{q}(t)\bullet\vec{n}$ の 2 階微分 $\dfrac{\mathrm{d}^2(\vec{q}\bullet\vec{n})}{\mathrm{d}\,t^2}(t_0)$ は $\begin{pmatrix}X & Y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dfrac{\partial^2F}{\partial X^2}(0,0) & \dfrac{\partial^2F}{\partial X\partial Y}(0,0)\\ \dfrac{\partial^2F}{\partial X\partial Y}(0,0) & \dfrac{\partial^2F}{\partial Y^2}(0,0)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix}$ で与えられることを示せ。ここで $(X,Y)=(X,Y,0)=\dfrac{\mathrm{d}\,\vec{q}}{\mathrm{d}\,t}(t_0)$ である。

特に、ある曲線 $\vec{q}(t)$ について、接ベクトル $\dfrac{\mathrm{d}\,\vec{q}}{\mathrm{d}\,t}(t_0)$ が曲面の $\vec{q_0}=\vec{q}(t_0)$ における主曲率方向の単位ベクトルであるとすると、内積 $\vec{q}(t)\bullet\vec{n}$ の 2 階微分 $\dfrac{\mathrm{d}^2(\vec{q}\bullet\vec{n})}{\mathrm{d}\,t^2}(t_0)$ はこの主曲率方向の主曲率であることを示せ。

問 5.4. $f(x,y)$ のグラフの曲面上の点 $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ において、

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=0,\quad \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=a$$

とする。主曲率は次の対称行列の固有値と一致することを示せ。

$$\begin{pmatrix}\dfrac{1}{(\sqrt{a^2+1})^3}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{1}{a^2+1}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\\ \dfrac{1}{a^2+1}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} & \dfrac{1}{\sqrt{a^2+1}}\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\end{pmatrix}$$

ヒント：接ベクトルが単位ベクトルとなるような曲線の族を考える。

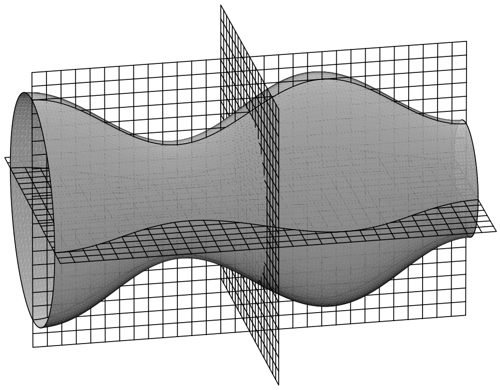

図 5.4 回転面.

問 5.5. 回転面 $\sqrt{y^2+z^2}=f(x)$ に対して、主曲率方向、主曲率を求めよ。
ヒント：回転対称性があるから xz 平面上の点で考える。また、xz 平面に対して対称であり、主曲率方向は直交しているから、2 つの主曲率が等しくなければ主曲率方向は決まってくる。図 5.4 参照。

主曲率は XYZ 座標系のとり方を換えて、特に法線方向 Z 軸の向きがかわると符号が逆になる。主曲率の積は $F(X,Y)$ のヘッセ行列の行列式で、これは法線方向の取り方によらない。主曲率の積を**ガウス曲率**と呼ぶ。

曲面 $z=f(x,y)$ の各点 $\vec{q}=(x,y,f(x,y))$ に対し、その点の法線方向の単位ベクトル $\vec{n}(x,y)$ をとる。曲面から 3 次元空間の単位球面への写像と考えられるが、これを**ガウスの写像**という。

問 5.6. 曲面 $z=f(x,y)$ の点 $\vec{q_0}$ で接平面は水平とする。ガウスの写像 $\vec{n}(x,y)$ の値は $\vec{q_0}$ の近くでは $(0,0,1)$ の近くにある。従って、$\vec{n}(x,y)$ の x 座標を $u(x,y)$, y 座標を $v(x,y)$ とおくと、
$\vec{n}(x,y)=(u(x,y),v(x,y),\sqrt{1-u(x,y)^2-v(x,y)^2})$ と書かれる。f の 2 階微分の行列は $(u(x,y),v(x,y))$ のヤコビ行列に等しいことを示せ。

ガウスの曲率は問 5.6 のヤコビ行列の行列式、すなわち写像 $\vec{n}$ による面積の符号を考慮した拡大縮小の割合に等しい。曲線と曲面の本[7)] 参照。

6 平面の曲線 2

6.1 等高線として現れる平面曲線（5／1）

地図の等高線は地図上で同じ標高の点を結んで描かれている。地表の曲がり方を考えないことにすると、平面上の高さを表す関数 $h(x,y)$ に対して、$h(x,y)=c$ となる点 (x,y) の集合が、標高 c の等高線である。c の高さの点がひろがりを持っていると曲線にならないから、ある点 (x,y) の近くで、等高線が曲線になるのは、その点の付近で傾斜がある場合であると考えられる。平面上の関数 $h(x,y)$ が連続微分可能とすると曲面 $z=h(x,y)$ が傾斜していることと滑らかな等高線が描かれることの関係は次の陰関数定理で述べられる。勾配ベクトル $\operatorname{grad} h=(\dfrac{\partial h}{\partial x},\dfrac{\partial h}{\partial y})$ が $\vec{0}$ と異なれば、$\dfrac{\partial h}{\partial x}$, $\dfrac{\partial h}{\partial y}$ の一方は 0 でない。その一方が 0 でない場合を考えれば十分である。

定理 6.1 (陰関数定理). $h(x,y)$ を連続微分可能な関数、$\dfrac{\partial h}{\partial y}(x_0,y_0)\neq 0$ とする。このとき、x_0 を含む開区間 $(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon)$ で定義された連続微分可能な関数 $g(x)$ で、$g(x_0)=y_0$, $h(x,g(x))=h(x_0,y_0)$ を満たすものが存在する。

従って、等高線は (x_0, y_0) の近くで関数 $y = g(x)$ のグラフである。

例題 6.2. 上の定理の下で、$g'(x)$ を求めよ。

例題 6.2 の答。 $h(x, g(x)) = h(x_0, y_0)$ を x について微分すると

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x, g(x)) + \frac{\partial h}{\partial y}(x, g(x))g'(x) = 0$$

を得る。従って、 $g'(x) = -\dfrac{\dfrac{\partial h}{\partial x}(x, g(x))}{\dfrac{\partial h}{\partial y}(x, g(x))}$ である。

この陰関数定理の証明をすでに知っている読者もいることと思う。ここでは、３変数の場合に次節で示すので省略する。（定理 7.1、25 ページ参照。）

6.2　平面の曲線のまとめ（５／１）

平面の曲線はパラメータ表示、グラフ表示、陰関数による表示が出来る。パラメータについての微分が零ベクトル $\vec{0}$ でない場合は座標の一方についての関数のグラフと見られる。陰関数の一方の変数 (x または y) についての偏微分が 0 でなければ他方 (y または x) の関数のグラフに書かれる。

各点において滑らかな曲線の形の平面の部分集合について次が成り立つ。

定理 6.3. 平面の有界な閉集合 C について以下の性質が同値である。

- 陰関数表示
  すべての $\vec{q} = (x_0, y_0) \in C$ に対し、ある正実数 δ に対して平面における δ 近傍 U をとると、U 上で定義された関数 $F(x, y)$ で、U 上で $(\dfrac{\partial F}{\partial x}, \dfrac{\partial F}{\partial y}) \neq \vec{0}$ を満たすものがあって、$C \cap U = \{(x, y) \mid F(x, y) = F(x_0, y_0)\} \cap U$ となる。
- グラフ表示
  すべての $\vec{q} = (x_0, y_0) \in C$ に対し、ある正実数 δ に対して平面における δ 近傍 U をとると、実数 x の δ 近傍上で定義された関数 $f(x)$ が存在して $C \cap U = \{(x, y) \mid y = f(x)\} \cap U$ となるか、または実数 y の δ 近傍上で定義された関数 $g(y)$ が存在して $C \cap U = \{(x, y) \mid x = g(y)\} \cap U$ となる。
- パラメータ表示
  すべての $\vec{q} = (x_0, y_0) \in C$ に対し、ある正実数 δ_0 より小さい任意の正実数 δ に対して平面における δ 近傍 U をとると、ある区間 (a, b) 上で定義され U に値を持つ関数 $\vec{\Phi}(t) = (\xi(t), \eta(t))$ で，すべての $t \in (a, b)$ に対し $\dfrac{\mathrm{d}\vec{\Phi}}{\mathrm{d}t} = (\xi'(t), \eta'(t)) \neq \vec{0}$ であり、$\vec{\Phi}(t_1) = \vec{\Phi}(t_2)$ ならば $t_1 = t_2$ となるものがあり、$C \cap U = \{\vec{\Phi}(t) \bigm| a < t < b\}$ となる。

最後のパラメータ表示はさらに次のように書かれる。

- 正実数 $T_1, \ \ldots, \ T_k$ と $j = 1, \ \ldots, \ k$ に対し、実数上の周期 T_j の周期関数 $\xi_j(t), \ \eta_j(t)$ で，すべての t に対し $(\xi_j'(t), \eta_j'(t)) \neq \vec{0}$ であり、$(\xi_i(t_1), \eta_i(t_1)) = (\xi_j(t_2), \eta_j(t_2))$ ならば $i = j$ かつ $\dfrac{t_1 - t_2}{T_j}$ は整数となるものが存在して、$C = \{(\xi_1(t), \eta_1(t)) \bigm| t \in \mathbf{R}\} \cup \cdots \cup \{(\xi_k(t), \eta_k(t)) \bigm| t \in \mathbf{R}\}$ となる。

ベクトル値周期関数 $(\xi_j(t), \eta_j(t))$ の像はいくつかの閉曲線である。上のパラメータ表示のいくつかの区間を順につなぎ合わせて関数 $(\xi(t), \eta(t))$ の定義域を広げていくと直線全体で定義された周期関数が得られるのである。