２００８年度数理科学　　講義資料

担当：坪井　俊

http://faculty.ms.u-tokyo.ac.jp/users/tsuboi/sk1-2008.html

1　空間とベクトル

1.1　位置ベクトルと平行移動（省略）

直線に原点と向きを定め、さらに単位の長さを定めると、直線上の点には実数の座標が定まる。座標 x の点に対して、座標 $-x$ の点は原点について対称な点を表し、座標 x_1 の点と座標 x_2 の点に対して、座標 $x_1 + x_2$ の点は点 x_1（あるいは点 x_2）から見て方向も考えて距離 x_2（あるいは距離 x_1）の点を表す。座標は位置を表すものであるから、２つ位置をたし合わせることにはもともとは意味がなかったはずであるが、相対的な位置と考える（あるいは平行移動した座標を考える）ことにより、座標のたし合わせに意味がつけられる。

平面の点は (x, y) のように２つの実数からなる座標で表され、空間の点は (x, y, z) のように３つの実数からなる座標で表される。このように原点からの位置を表す実数の組を向きと大きさとを持つ量と考え、**位置ベクトル**という。

空間の場合、座標を定めるためには、原点を定め、x 軸、y 軸、z 軸を互いに直交するようにとり、さらにそれらに向きと単位の長さをとっておく必要がある。x, y, z が正の実数のとき、辺の長さが x, y, z であるような直方体を、原点を頂点とし辺が軸の方向になるようにおいたときの原点から最も遠い頂点が座標 (x, y, z) を持つ点である。逆に、空間の点に対して、その点と原点を頂点とする上のような直方体を作ればその辺の長さと向きを考えて点の座標 (x, y, z) が得られる。

１つのベクトル $\overrightarrow{q} = (x, y, z)$ の実数倍は、原点 $\overrightarrow{0} = (0, 0, 0)$ と $\overrightarrow{q} = (x, y, z)$ を通る直線上に、$\overrightarrow{q}$ を単位として、座標を考えたときの与えられた実数に対応する点である。実数 a に対し、$a\overrightarrow{q} = (ax, ay, az)$ である。

２つの点の位置を加え合わせることにはそのままでは意味がない。しかし、第１の点の位置に対する第２の点の相対的な位置を考える、すなわち、第１の点に平行移動した座標系による第２の点の位置を考えることにすると、第１の点の原点に対する位置ベクトルと第２の点の第１の点に対する位置ベクトルを加えることにより、第２の点の原点に対する位置を記述できる。

相対的な位置を考えれば、点 $\overrightarrow{q_1} = (x_1, y_1, z_1)$ に対し、そこからみて相対的に $\overrightarrow{q_2} = (x_2, y_2, z_2)$ にある点が、$\overrightarrow{q_1} + \overrightarrow{q_2} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$ である。(x_2, y_2, z_2) に対する直方体を (x_1, y_1, z_1) に平行に移動したときの頂点 (x_2, y_2, z_2) の移った先が、座標のたし合わせに対応する点である。図 1.2 参照。

こうして相対的な位置を考えることにより位置を表す座標の間に加法が定義される。

この考え方で、$\overrightarrow{q_1} + \overrightarrow{q_2} = \overrightarrow{q_2} + \overrightarrow{q_1}$ はどういう意味だろうか。

点 $\overrightarrow{q_1}$ に対し、相対的に $\overrightarrow{q_2}$ にある点が、点 $\overrightarrow{q_2}$ に対し、相対的に $\overrightarrow{q_1}$ にある点と等しいということである。赤道の長さが 40000km である地球上では赤道から北に 5000　真西に 5000　動いた点は、元の点から真西に 5000　北に 5000　動いた点とは異なる。$\overrightarrow{q_1} + \overrightarrow{q_2} = \overrightarrow{q_2} + \overrightarrow{q_1}$ は空間が平らであることを反映している。

さて、それぞれのベクトルを２倍して $2\overrightarrow{q_1} = (2x_1, 2y_1, 2z_1)$, $2\overrightarrow{q_2} = (2x_2, 2y_2, 2z_2)$ を考えると、これは原点から出る、ベクトル $\overrightarrow{q_1} = (x_1, y_1, z_1)$, $\overrightarrow{q_2} = (x_2, y_2, z_2)$ の方向の直線上で、大きさが元のベクトルの２倍の点である。３つの点 $\overrightarrow{0}$, $2\overrightarrow{q_1}$, $2\overrightarrow{q_2}$ のなす３角形考え、２点 $2\overrightarrow{q_1}$, $2\overrightarrow{q_2}$ の中点 P を考える。図 1.3 参照。この３角形の辺の中点を結ぶ線分として、$\overrightarrow{0}$, $\overrightarrow{q_2}$ を結ぶ線分の長さと $\overrightarrow{q_1}$, P を結ぶ線分の長さは等しく、これらの線分は平行である。ゆえに P は $\overrightarrow{q_1}$ に対して相対的に $\overrightarrow{q_2}$ にある点であるから $P = \overrightarrow{q_1} + \overrightarrow{q_2}$ である。同様に、$\overrightarrow{0}$, $\overrightarrow{q_1}$ を結ぶ線分の長さと $\overrightarrow{q_2}$, P を結ぶ線分の長さは等しく、これらの線分は平行である。ゆえに P は $\overrightarrow{q_2}$ に対して相対的に $\overrightarrow{q_1}$ にある点であるから $P = \overrightarrow{q_2} + \overrightarrow{q_1}$ である。

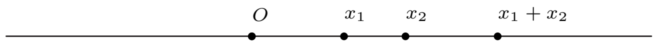

図 1.1　座標のたし合わせ

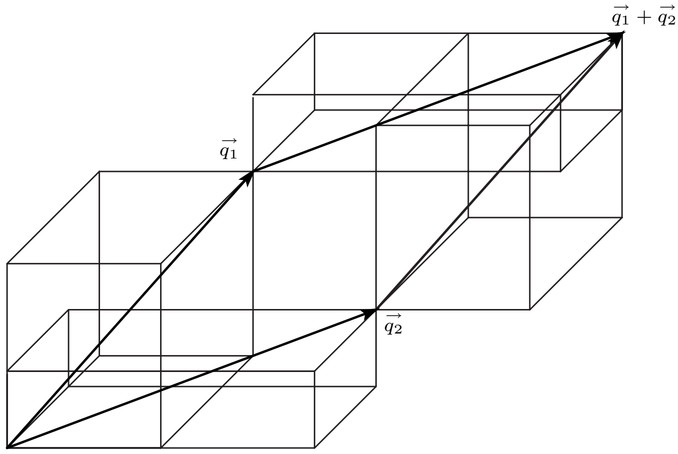

図 1.2　３次元の座標のたし合わせ.

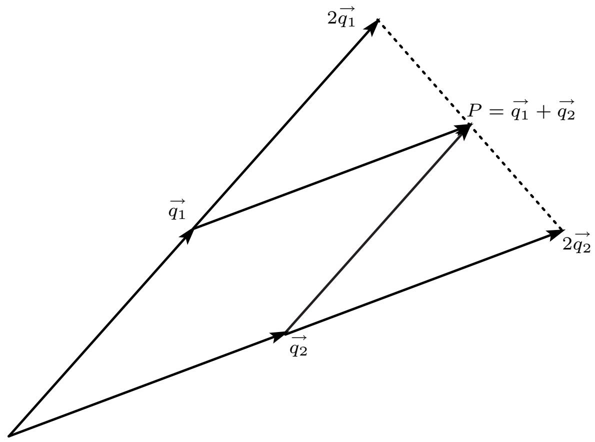

図 1.3　ベクトルのたし合わせ.

従って、$\overrightarrow{q_1} + \overrightarrow{q_2} = \overrightarrow{q_2} + \overrightarrow{q_1}$ である。これは、座標を考えると当然のことであるが、ユークリッドの幾何が、座標の表示と整合性があることを示している。

このとき、$\overrightarrow{0}, \overrightarrow{q_1}, P, \overrightarrow{q_2}$ は平行四辺形をなしている。すなわち、２つのベクトル $\overrightarrow{q_1}$, $\overrightarrow{q_2}$ の和 $\overrightarrow{q_1} + \overrightarrow{q_2}$ は、幾何的には、それらを原点から出る矢印と見て、それらを２辺とする平行四辺形の第４の頂点となっていることに注意しよう。

このように相対的な位置という考え方、あるいは平行移動の考え方がベクトルの基礎にある。

空間のベクトルには、ベクトルの実数倍、２つのベクトルの加法が定義されている。また、ベクトル $\overrightarrow{q} = (x, y, z)$ の大きさ（長さ）$\|\overrightarrow{q}\|$ はピタゴラスの定理から、$\|\overrightarrow{q}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ と定められている。数学的な言葉では、３次元ユークリッド空間を考えているのである。（線形代数の教科書[7] を参照。）

ベクトルの成分を横に並べて行ベクトルに書くか、縦に並べて列ベクトルに書くかは、書きやすいほうを使い、行列との積をとる場合以外では、こだわらないことにする。

1.2　ベクトルの変化（４／１５）

ある点 $\overrightarrow{q}$ を通る直線は、その直線を原点を通るように平行移動したときに直線上にある点 $\overrightarrow{p}$ $(\overrightarrow{p} \neq \overrightarrow{0})$ を使って、

$$\{\overrightarrow{q} + t\overrightarrow{p} \mid t \in \mathbf{R}\}$$

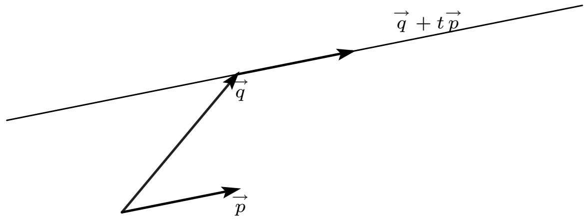

図 1.4　直線.

のように書かれる。ここで $\mathbf{R}$ は実数全体のなす集合を表す記号であり、$t \in \mathbf{R}$ は t が実数の集合の要素である、つまり t は実数全体をうごくパラメータ（媒介変数）であることを表している。また、{ 要素 | 条件 } という書き方で、条件を満たす要素のなす集合を表している。

1.3　速度ベクトル（４／１５）

点が運動しているとき、その位置を変化するベクトル $\vec{q}(t)$ だと思うと、位置の変化 $\vec{q}(t+h)-\vec{q}(t)$ は同じようにベクトルであり、変化の割合 $\frac{1}{h}(\vec{q}(t+h)-\vec{q}(t))$ もベクトルである。その極限として速度ベクトル $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\vec{q}$ が得られる。ここまでベクトルは平行移動して考える場合を除いて原点から出る矢印と考えたが、実際の問題に則して考えようとするときには速度ベクトル $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\vec{q}$ は $\vec{q}$ の位置から出る矢印と考えるのが都合がよい。

等速直線運動 $\vec{q}(t)=\vec{q}+t\vec{p}$ の $t=t_0$ における速度ベクトル $\frac{\mathrm{d}\,\vec{q}}{\mathrm{d}\,t}(t_0)=\vec{p}$ は $\vec{q}(t_0)=\vec{q}+t_0\vec{p}$ を始点としていると考える。

運動する点 $\vec{q_1}(t)$ に対して相対的に $\vec{q_2}(t)$ の位置にある点の位置ベクトルは $\vec{q_1}(t)+\vec{q_2}(t)$ である。

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}(\vec{q_1}(t)+\vec{q_2}(t))=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\vec{q_1}(t)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\vec{q_2}(t)$$

は速度ベクトル $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\vec{q_1}(t)$ で運動する点に対して、相対的に速度ベクトル $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\vec{q_2}(t)$ を持つ点の原点に対する速度ベクトルは、速度ベクトルの和 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\vec{q_1}(t)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\vec{q_2}(t)$ であるということである。ガリレオの相対性原理と呼ばれる。

1.4　ベクトルと力の合成（省略）

ニュートンの力学では、速度ベクトルの変化率である加速度ベクトルが点にかかる力と比例することを述べている。１つの点にかかる力が釣り合っているときには加速度は生じないが、力の釣り合いが、ベクトルの平行四辺形の加法と整合性があることが実験的に容易に確かめられる。

３つのバネ秤を使って力の釣り合いを実験すると点とみなせる一つの物体に加わる３つの力の釣り合いは $\vec{f_1},\vec{f_2}$ を２辺とする平行四辺形の対角線が $\vec{f_3}$ をちょうど逆向きにしたものになる。すなわち、$\vec{f_1},\vec{f_2},\vec{f_3}$ が釣り合っているとは $\vec{f_1}+\vec{f_2}+\vec{f_3}=\vec{0}$ となることである。これは２つの力 $\vec{f_1},\vec{f_2}$ の合成がベクトルの和 $\vec{f_1}+\vec{f_2}$ となることも表している。

2　２つのベクトル

2.1　ベクトルの内積（４／１５）

２つのベクトル $\vec{q_1},\vec{q_2}$ に対し、ベクトルの間の角度やベクトルのつくる平行四辺形の面積を考えることが出来る。

$\vec{0},\vec{q_1},\vec{q_2}$ は３角形をなしているのだから、ベクトルの間の角度を θ とすると余弦定理

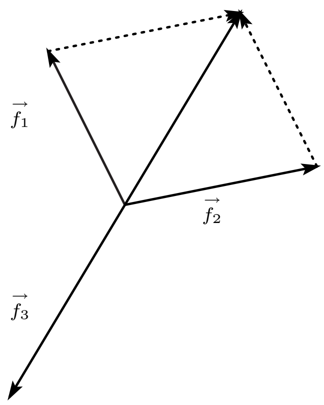

図 1.5　力の釣り合い.

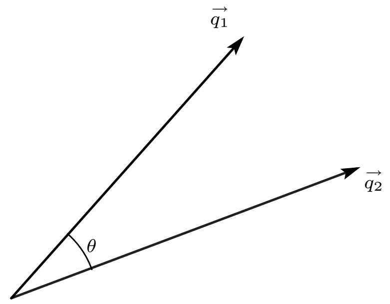

図 2.1　2つのベクトルのなす角.

$$\|\vec{q_1} - \vec{q_2}\|^2 = \|\vec{q_1}\|^2 + \|\vec{q_2}\|^2 - 2\|\vec{q_1}\|\,\|\vec{q_2}\|\cos\theta$$

が成り立つ。

ピタゴラスの定理から3次元の空間の場合だと

$$\|\vec{q_1}\|^2 = {x_1}^2 + {y_1}^2 + {z_1}^2, \quad \|\vec{q_2}\|^2 = {x_2}^2 + {y_2}^2 + {z_2}^2,$$

$$\|\vec{q_1} - \vec{q_2}\|^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2$$

が成立し、

$$\|\vec{q_1}\|\,\|\vec{q_2}\|\cos\theta = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

であることがわかる。この実数をベクトル $\vec{q_1}, \vec{q_2}$ の**内積**といい、$\vec{q_1} \bullet \vec{q_2}$ で表す。

$$\vec{q_1} \bullet \vec{q_2} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

問 2.1. 一般の n 次元の空間でも、ベクトル $\vec{q_1} = (u_1, \ldots, u_n)$, $\vec{q_2} = (v_1, \ldots, v_n)$ に対し、$\vec{q_1} \bullet \vec{q_2} = \|\vec{q_1}\|\,\|\vec{q_2}\|\cos\theta = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k v_k$ と表されることを示せ。

2.2　平面の方程式（４／１５）

$\vec{0}$ でない一つのベクトル $\vec{q_0}$ を固定して考える。

あるベクトル $\vec{q}$ との内積 $\vec{q} \bullet \vec{q_0} = \|\vec{q}\|\,\|\vec{q_0}\|\cos\theta$ に現れる $\|\vec{q}\|\cos\theta$ は、次のように解釈できる。原点と点 $\vec{q_0}$ を含む直線を ℓ として、ℓ 上に $\vec{q_0}$ を正方向とする座標を考える。ℓ と点 $\vec{q}$ を含む平面内で点 $\vec{q}$ から ℓ へ下ろした垂線の足の ℓ での座標（向きを考えた原点からの距離）が $\|\vec{q}\|\cos\theta$ である。

従って、実数 k に対して、$\vec{q} \bullet \vec{q_0} = k$ を満たす $\vec{q}$ の全体は、$\|\vec{q}\|\cos\theta = \dfrac{k}{\|\vec{q_0}\|}$

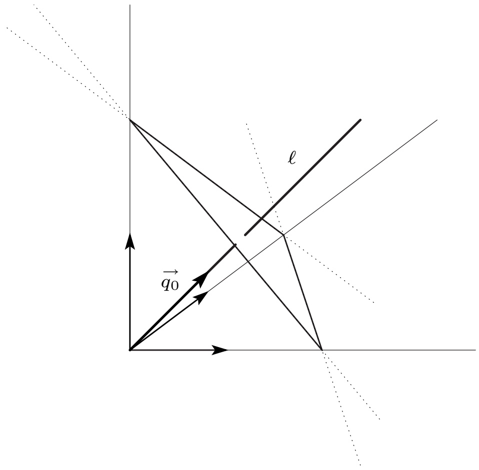

図 2.2　直線と直交する平面は直線上のベクトルとの内積が一定の点である.

が一定であるから、ℓ 上の ℓ での座標（向きを考えた原点からの距離）が $\dfrac{k}{\|\overrightarrow{q_0}\|}$ である点を通り、ℓ と垂直な平面である。

$\overrightarrow{q_0} = (a, b, c) \neq \overrightarrow{0}$, $\overrightarrow{q} = (x, y, z)$ とすると、$\overrightarrow{q} \bullet \overrightarrow{q_0} = k$ は

$$ax + by + cz = k$$

と書かれる。これが、平面を表す方程式である。この方程式で表された平面と原点との距離は $\dfrac{|k|}{\|\overrightarrow{q_0}\|} = \dfrac{|k|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$ となる。図 2.2 参照。$\|\overrightarrow{q_0}\| = 1$ のときは、表示がわかり易い。$a^2 + b^2 + c^2 = 1$ のとき、$ax + by + cz = k$ で表される平面と原点の距離は $|k|$ である。

2.3　ベクトルの外積（省略）

２つのベクトルが作る３角形の面積を考えよう。

例題 2.2. 空間の次元が２、３、４のとき、２つのベクトル $\overrightarrow{q_1}, \overrightarrow{q_2}$ に対し、$\overrightarrow{0}, \overrightarrow{q_1}, \overrightarrow{q_2}$ を頂点とする３角形の面積を求めよ。

例題 2.2 の答。 ベクトル $\overrightarrow{q_1}, \overrightarrow{q_2}$ のなす角を θ $(0 \leqq \theta \leqq \pi)$ として、３角形の面積 A は $A = \dfrac{1}{2}\|\overrightarrow{q_1}\|\,\|\overrightarrow{q_2}\|\sin\theta$ で表される。$\sin\theta = \sqrt{1 - (\cos\theta)^2}$ であるから、

$$\begin{aligned}(\|\overrightarrow{q_1}\|\,\|\overrightarrow{q_2}\|\sin\theta)^2 &= \|\overrightarrow{q_1}\|^2\|\overrightarrow{q_2}\|^2\{1 - (\cos\theta)^2\} \\ &= \|\overrightarrow{q_1}\|^2\|\overrightarrow{q_2}\|^2 - (\|\overrightarrow{q_1}\|\,\|\overrightarrow{q_2}\|\cos\theta)^2 \\ &= \|\overrightarrow{q_1}\|^2\|\overrightarrow{q_2}\|^2 - (\overrightarrow{q_1} \bullet \overrightarrow{q_2})^2\end{aligned}$$

２次元のとき、$\overrightarrow{q_1} = (x_1, y_1)$, $\overrightarrow{q_2} = (x_2, y_2)$ として、最後の式は

$$({x_1}^2 + {y_1}^2)({x_2}^2 + {y_2}^2) - (x_1x_2 + y_1y_2)^2 = (x_1y_2 - y_1x_2)^2 = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}^2.$$

従って、$A = \dfrac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}\right|$ である。

３次元のとき、$\overrightarrow{q_1} = (x_1, y_1, z_1)$, $\overrightarrow{q_2} = (x_2, y_2, z_2)$ として、最後の式は

$$\begin{aligned} & ({x_1}^2 + {y_1}^2 + {z_1}^2)({x_2}^2 + {y_2}^2 + {z_2}^2) - (x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2)^2 \\ = \ & (y_1z_2 - z_1y_2)^2 + (z_1x_2 - x_1z_2)^2 + (x_1y_2 - y_1x_2)^2 \\ = \ & \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_1 & z_2 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}^2. \end{aligned}$$

従って、$A = \dfrac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_1 & z_2 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}^2}$ である。

４次元のとき、$\overrightarrow{q_1} = (x_1, y_1, z_1, w_1)$, $\overrightarrow{q_2} = (x_2, y_2, z_2, w_2)$ として、最後の式は

$$
\begin{aligned}
&({x_1}^2+{y_1}^2+{z_1}^2+{w_1}^2)({x_2}^2+{y_2}^2+{z_2}^2+{w_2}^2) \\
&\qquad -(x_1x_+y_1y_2+z_1z_2+w_1w_2)^2 \\
= &\ (y_1z_2-z_1y_2)^2+(z_1x_2-x_1z_2)^2+(x_1y_2-y_1x_2)^2 \\
&\qquad +(x_1w_2-w_1x_2)^2+(y_1w_2-w_1y_2)^2+(z_1w_2-w_1z_2)^2 \\
= &\ \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} z_1 & z_2 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} z_1 & z_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix}^2 \\
= &\ Q
\end{aligned}
$$

従って、上の Q を使って $A=\dfrac{1}{2}\sqrt{Q}$ である。

さて、一般の n 次元の空間では、ベクトル $\vec{q_1}=(u_1,\ldots,u_n)$, $\vec{q_2}=(v_1,\ldots,v_n)$ に対し、

$$\|\vec{q_1}\|^2\|\vec{q_2}\|^2-(\vec{q_1}\bullet\vec{q_2})^2=\sum_{j<k}(u_jv_k-u_kv_j)^2=Q$$

となる。$\displaystyle\sum_{j<k}$ は $j<k$ となる j,k の組に対して和をとるという意味であり、異なる j, k の組み合わせに対して和をとることと同じで
${}_nC_2=\dfrac{n(n-1)}{2}$ 個の和である。面積は $A=\dfrac{1}{2}\sqrt{Q}$ となる。

三角形の面積の代わりに、その２倍の平行四辺形の面積（上の $\sqrt{Q}$）を考えると、例題 2.2 の答により、
次元が２なら $\left(\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}\right)$, 次元が３のときは $\left(\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} z_1 & z_2 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}\right)$,
次元が４のときは $\left(\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} z_1 & z_2 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} z_1 & z_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix}\right)$ という１次元、３次元、６次元のベクトルの長さの形をしている。

空間の次元が２のときは $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}$ は正負の値をとりうる。$\vec{q_2}$ の $\vec{q_1}$ に対する角度 θ は正負を考えれば $-\pi\leqq\theta\leqq\pi$ の範囲にとることができるが、この θ が正のときに、$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}$ は正、負のときに負となる。図 2.1 が平面上にあれば、行列式は負の値を与える。面積に正負を考えるのも角度に正負を考えるのと同様に自然なことである。

空間の次元が３のときだけ、運良く３次元のベクトルが得られている。歴史的にベクトル $\left(\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} z_1 & z_2 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}\right)$ を**ベクトルの外積**と呼び、$\vec{q_1}\times\vec{q_2}$ と書く。

$$\vec{q_1}\times\vec{q_2}=\left(\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} z_1 & z_2 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}\right)$$

この外積というベクトルは $\vec{q_1}$ が x 軸正方向の単位ベクトル、$\vec{q_2}$ が y 軸正方向の単位ベクトルのとき、$\vec{q_1}\times\vec{q_2}$ は z 軸正方向の単位ベクトルとなるように定めてある。いわゆる右手系では、時計の３時の向きに x 軸の正方向、１２時の向きに y 軸の正方向をとると時計の表面の向いている方向が z 軸の正方向となる。ベクトルの外積の大きさは２つのベクトルの定める平行四辺形の面積であるが、向きは２つのベクトルに直交している。定義式から、$\vec{q_2}\times\vec{q_1}=-\vec{q_1}\times\vec{q_2}$ である。

問 2.3. $\vec{q_1}\bullet(\vec{q_1}\times\vec{q_2})=\det(\vec{q_1},\vec{q_2},\vec{q_3})$ を示せ。ただし、$(\vec{q_1},\vec{q_2},\vec{q_3})$ は、$\vec{q_1}$, $\vec{q_2}$, $\vec{q_3}$ を列ベクトルとして並べた行列である。

問 2.4. $\vec{q_1}\times\vec{q_2}$ は $\vec{q_1}$ とも $\vec{q_2}$ とも直交することを示せ。
ヒント：直交することは内積が 0 となることである。

問 2.5. 3次元のベクトル $\vec{q}\neq\vec{0}$, $\vec{p}$ について、$\vec{q}\bullet\vec{p}=0$ とする。$\vec{p}=\vec{q}\times(\dfrac{\vec{p}\times\vec{q}}{\|\vec{q}\|^2})$ を示せ。

2.4 2つのベクトルの変化（4／15）

2つのベクトルが $\overrightarrow{q_1}$, $\overrightarrow{q_2}$ が変化するときに、その間の角度、原点と2つのベクトル $\overrightarrow{0}$, $\overrightarrow{q_1}$, $\overrightarrow{q_2}$ を頂点とする3角形の面積も変化する。

一般に2つのベクトル $\overrightarrow{q_1}(t)$, $\overrightarrow{q_2}(t)$ の内積 $\overrightarrow{q_1}(t) \bullet \overrightarrow{q_2}(t)$ の微分については次が成立する。

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}(\overrightarrow{q_1}(t) \bullet \overrightarrow{q_2}(t)) = \frac{\mathrm{d}\,\overrightarrow{q_1}}{\mathrm{d}\,t}(t) \bullet \overrightarrow{q_2}(t) + \overrightarrow{q_1}(t) \bullet \frac{\mathrm{d}\,\overrightarrow{q_2}}{\mathrm{d}\,t}(t)$$

実際、$\overrightarrow{q_1}(t) = (u_1(t), \ldots, u_n(t))$, $\overrightarrow{q_2}(t) = (v_1(t), \ldots, v_n(t))$ に対して、$\overrightarrow{q_1}(t) \bullet \overrightarrow{q_2}(t) = \sum_{k=1}^{n} u_k(t)v_k(t)$ であるが、

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}(\overrightarrow{q}_1(t) \bullet \overrightarrow{q}_2(t)) &= \sum_{k=1}^{n}(\frac{\mathrm{d}\,u_k}{\mathrm{d}\,t}(t)v_k(t) + u_k(t)\frac{\mathrm{d}\,v_k}{\mathrm{d}\,t}(t)) \\ &= \frac{\mathrm{d}\,\overrightarrow{q_1}}{\mathrm{d}\,t}(t) \bullet \overrightarrow{q_2}(t) + \overrightarrow{q_1}(t) \bullet \frac{\mathrm{d}\,\overrightarrow{q_2}}{\mathrm{d}\,t}(t)\end{aligned}$$

である。

問 2.6. ベクトル $\overrightarrow{q}(t) = (u_1(t), \ldots, u_n(t))$ の長さ（大きさ）の2乗について、$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\|\overrightarrow{q}(t)\|^2 = 2\frac{\mathrm{d}\,\overrightarrow{q}}{\mathrm{d}\,t}(t) \bullet \overrightarrow{q}(t)$ を示せ。また、$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\|\overrightarrow{q}(t)\|$ を求めよ。
ヒント：$\|\overrightarrow{q}(t)\|^2 = u_1(t)^2 + \cdots + u_n(t)^2 = \overrightarrow{q}(t) \bullet \overrightarrow{q}(t)$ を使う。

上の問から、長さが一定のベクトルの微分はベクトルに垂直である事がわかる。実際、長さが一定のベクトルは、原点を中心とする球面の上にあり球面上の運動の速度ベクトルは球面の半径に垂直である。

内積の微分の式の由来は内積の分配法則である。3次元のベクトルの外積に対しても、分配法則が成り立ち、同じ形の微分の計算法則がある。

問 2.7. 3次元のベクトル $\overrightarrow{q_1}(t) = (x_1(t), y_1(t), z_1(t))$, $\overrightarrow{q_2}(t) = (x_2(t), y_2(t), z_2(t))$ に対し、

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}(\overrightarrow{q_1}(t) \times \overrightarrow{q_2}(t)) = \frac{\mathrm{d}\,\overrightarrow{q_1}}{\mathrm{d}\,t}(t) \times \overrightarrow{q_2}(t) + \overrightarrow{q_1}(t) \times \frac{\mathrm{d}\,\overrightarrow{q_1}}{\mathrm{d}\,t}(t)$$

を示せ。

3 運動（参考）

3.1 単振動（参考）

直線上の点に加わる力が座標に比例し原点を向いているとする。これは普通のバネに重りをつけてそれを平衡の位置から少しずらした場合に起こることである。運動の方程式は $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\,t^2}\overrightarrow{q} = -a\overrightarrow{q}$ のように書かれる。ここでは $\overrightarrow{q} = (x)$ という1次元の場合を考えている。このような場合は、$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\overrightarrow{q} = \overrightarrow{p} = v$ とおいて、$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}$ という線形常微分方程式の問題となる。解は $\begin{pmatrix} x(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A\cos\sqrt{a}\,t + B\sin\sqrt{a}\,t \\ -\sqrt{a}A\sin\sqrt{a}\,t + \sqrt{a}B\cos\sqrt{a}\,t \end{pmatrix}$ のようになる。これが微分方程式を満たしていることは、

$$(\cos\sqrt{a}\,t)' = -\sqrt{a}\sin\sqrt{a}\,t, \quad (\sin\sqrt{a}\,t)' = \sqrt{a}\cos\sqrt{a}\,t$$

からわかる。ある時刻 t_0 における位置 $x(t_0)$ と速度 $v(t_0)$ がわかると A, B の値が

$$A = x(t_0)\cos\sqrt{a}\,t_0 - \frac{v(t_0)}{\sqrt{a}}\sin\sqrt{a}\,t_0$$
$$B = x(t_0)\sin\sqrt{a}\,t_0 + \frac{v(t_0)}{\sqrt{a}}\cos\sqrt{a}\,t_0$$

のように定まり、運動は

$$x(t) = A\cos\sqrt{a}\,t + B\sin\sqrt{a}\,t = \sqrt{A^2+B^2}\cos(\sqrt{a}\,t+\theta_0)$$

のように記述される。ただし、$\cos\theta_0 = \dfrac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}$, $\sin\theta_0 = -\dfrac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$ である。これは時刻 t に依存する周期運動すなわち振動を表しており、単振動と呼ばれる。

直線上の運動でなくとも同じ微分方程式で書かれるのが、ベクトルの記法の便利な点でもある。

３次元でも $\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\,t^2}\vec{q} = -a\vec{q}$ という常微分方程式は、各成分ごとに上の形の解を持ち、周期 $\dfrac{2\pi}{\sqrt{a}}$ をもつ周期的な運動を表している。

実際にはエネルギー $\dfrac{1}{2}\|\vec{p}\|^2 + \dfrac{1}{2}a\|\vec{q}\|^2$ が保たれることに注意すると振動の様子が理解しやすい。

問 3.1. エネルギー $\dfrac{1}{2}\|\vec{p}\|^2 + \dfrac{1}{2}a\|\vec{q}\|^2$ は時刻によらず一定であることを示せ。
ヒント：微分して 0 となることを示せばよい。

このエネルギーの保存は力が位置ベクトルに平行（つまり原点に向かうまたは離れる向き）で力の大きさが中心からの距離のみに依存するときに拡張される。このとき同様に次の面積速度（角運動量）の保存が成立する。

問 3.2. 単振動の方程式について、面積速度（角運動量）$\dfrac{1}{2}\vec{q}\times\vec{p}$ は時刻によらず一定であることを示せ。
ヒント：前の問と同じく微分して 0 となることを示せばよい。

3.2　惑星の運動（参考）

ニュートンの万有引力の法則に従う運動を考える。太陽は惑星に比べて非常に質量が大きく不動であるとする。太陽を原点に置き、惑星の運動は xy 平面上で起こるとして、座標を $\vec{q} = (x, y, 0)$ とする。惑星の運動方程式は $m\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\,t^2}\vec{q} = -\dfrac{GmM}{\|\vec{q}\|^3}\vec{q}$. ここで、惑星のエネルギー E は運動エネルギー $\dfrac{m}{2}\dfrac{\mathrm{d}\,\vec{q}}{\mathrm{d}\,t}\bullet\dfrac{\mathrm{d}\,\vec{q}}{\mathrm{d}\,t}$ と位置エネルギー $-\dfrac{GMm}{\|\vec{q}\|}$ の和である。

惑星の運動で E が保存されること $(\dfrac{\mathrm{d}\,E}{\mathrm{d}\,t} = 0)$ が、運動方程式を使って、問 3.1 と同様に、次のように示される。

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\,E}{\mathrm{d}\,t} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\Big(\frac{m}{2}\frac{\mathrm{d}\,\vec{q}}{\mathrm{d}\,t}\bullet\frac{\mathrm{d}\,\vec{q}}{\mathrm{d}\,t}\Big) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\frac{GmM}{\|\vec{q}\|}\\
&= m\frac{\mathrm{d}\,\vec{q}}{\mathrm{d}\,t}\bullet\frac{\mathrm{d}^2\,\vec{q}}{\mathrm{d}\,t^2} - GmM\Big(-\frac{1}{2}\Big)(\vec{q}\bullet\vec{q})^{-\frac{3}{2}}2\Big(\vec{q}\bullet\frac{\mathrm{d}\,\vec{q}}{\mathrm{d}\,t}\Big)\\
&= m\frac{\mathrm{d}\,\vec{q}}{\mathrm{d}\,t}\bullet\Big(\frac{\mathrm{d}^2\,\vec{q}}{\mathrm{d}\,t^2} + GM\frac{\vec{q}}{\|\vec{q}\|^3}\Big) = 0
\end{aligned}$$

また、面積速度（角運動量）$\vec{\Omega} = \dfrac{1}{2}\vec{q}\times\dfrac{\mathrm{d}\,\vec{q}}{\mathrm{d}\,t}$ が一定であることも、問 3.2 と同様に、運動方程式から次のように示される。

$$\begin{aligned}
2\frac{\mathrm{d}\,\vec{\Omega}}{\mathrm{d}\,t} &= \frac{\mathrm{d}\,\vec{q}}{\mathrm{d}\,t}\times\frac{\mathrm{d}\,\vec{q}}{\mathrm{d}\,t} + \vec{q}\times\frac{\mathrm{d}^2\,\vec{q}}{\mathrm{d}\,t^2}\\
&= \vec{0} + \vec{q}\times\Big(-GM\frac{\vec{q}}{\|\vec{q}\|^3}\Big) = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}
\end{aligned}$$

ケプラーの法則は、惑星は太陽を焦点の一つとする楕円上を面積速度一定であるように運動することを述べている。ニュートンの運動方程式と万有引力の法則から面積速度一定は上のように容易に示されたが、軌道が楕円になることは少しややこしい。

２次曲線を焦点との関係で記述するのは極方程式 $r = \dfrac{ea}{1+e\cos\theta}$ である。これは

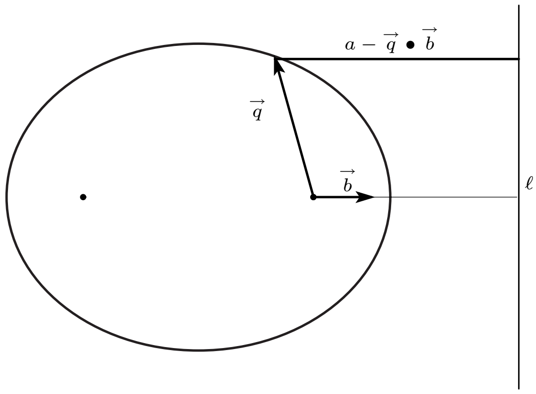

図 3.1 2次曲線は焦点と準線への距離の比が一定の曲線である.

平面の極座標で表示したものであるが、この方程式は次のようにして得られる。

x 軸正方向の単位ベクトルを $\vec{b}$ として、平面上の x 軸に垂直な直線 $\ell = \{\vec{q} \mid \vec{b} \bullet \vec{q} = a\}$ (準線)を考える。原点(焦点)への距離と準線 ℓ への距離の比が $e:1$ となる点の軌跡を考えると、$\vec{q}$ から直線 ℓ への距離は $|a - \vec{q} \bullet \vec{b}|$ であるから、$\|\vec{q}\| = e\,|a - \vec{q} \bullet \vec{b}|$ という方程式を得るが、e の値を負としてもよいことにして絶対値をはずすと

$$\|\vec{q}\| = e(a - \vec{q} \bullet \vec{b})$$

を得る。これを極座標で書き直すと $r = e(a - r\cos\theta)$ であり極方程式と同じものである。また、平面の座標 $\vec{q} = (x, y)$ で、式の両辺を2乗したものを書き直すと $x^2 + y^2 = e^2(x-a)^2$ となり、$|e| > 1, = 1, < 1$ に従って双曲線、放物線、楕円をあらわす。図 3.1 参照。

問 3.3. xy 平面の極座標 (r, θ) でエネルギー E、面積速度の大きさ Ω を表し、r と θ の間に成り立つ微分方程式を求めよ。e, a を E, Ω に従ってうまく定めると2次曲線 $r = \dfrac{ea}{1 + e\cos\theta}$ はその微分方程式の解になることを確かめよ。

さて、ベクトルの方程式を変形して、$\|\vec{q}\| = e(a - \vec{q} \bullet \vec{b})$ の形の式を得れば、ケプラーの主張がいえたことになるだろう。

まず、ベクトルの方向の変化について考える。$\dfrac{\vec{q}}{\|\vec{q}\|}$ の微分を考えることになる。これは長さ1のベクトルだから、その変化の方向 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\dfrac{\vec{q}}{\|\vec{q}\|}$ は $\dfrac{\vec{q}}{\|\vec{q}\|}$ に垂直である。角度の変化にベクトルの長さの2乗 $\|\vec{q}\|^2$ を掛けて $\dfrac{1}{2}$ にしたものが、面積速度である。面積速度 $\vec{\Omega} = \dfrac{1}{2}\vec{q} \times \dfrac{\mathrm{d}\,\vec{q}}{\mathrm{d}\,t}$ は、今の場合 z 軸方向であるが、$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\dfrac{\vec{q}}{\|\vec{q}\|}$ は z 軸と $\dfrac{\vec{q}}{\|\vec{q}\|}$ に垂直であるから、次の式が予想される。

問 3.4. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\dfrac{\vec{q}}{\|\vec{q}\|} = (\vec{q} \times \dfrac{\mathrm{d}\,\vec{q}}{\mathrm{d}\,t}) \times \dfrac{\vec{q}}{\|\vec{q}\|^3}$ を示せ。

さて、万有引力の法則の下で、次が成立する。

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\frac{\vec{q}}{\|\vec{q}\|} = (\vec{q} \times \frac{\mathrm{d}\,\vec{q}}{\mathrm{d}\,t}) \times \frac{\vec{q}}{\|\vec{q}\|^3} = -(\vec{q} \times \frac{\mathrm{d}\,\vec{q}}{\mathrm{d}\,t}) \times \frac{1}{GM}\frac{\mathrm{d}^2\,\vec{q}}{\mathrm{d}\,t^2}$$

不思議なことに、この最後の式は $(\vec{q} \times \dfrac{\mathrm{d}\,\vec{q}}{\mathrm{d}\,t}) \times \dfrac{1}{GM}\dfrac{\mathrm{d}\,\vec{q}}{\mathrm{d}\,t}$ の微分となっている。実際 $\vec{q} \times \dfrac{\mathrm{d}\,\vec{q}}{\mathrm{d}\,t}$ は面積速度の2倍で一定だから、微分すると0で、

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\{(\vec{q} \times \frac{\mathrm{d}\,\vec{q}}{\mathrm{d}\,t}) \times \frac{1}{GM}\frac{\mathrm{d}\,\vec{q}}{\mathrm{d}\,t}\} \\
&= \{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}(\vec{q} \times \frac{\mathrm{d}\,\vec{q}}{\mathrm{d}\,t})\} \times \frac{1}{GM}\frac{\mathrm{d}\,\vec{q}}{\mathrm{d}\,t} + (\vec{q} \times \frac{\mathrm{d}\,\vec{q}}{\mathrm{d}\,t}) \times \{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\frac{1}{GM}\frac{\mathrm{d}\,\vec{q}}{\mathrm{d}\,t}\} \\
&= (\vec{0}) \times \frac{1}{GM}\frac{\mathrm{d}\,\vec{q}}{\mathrm{d}\,t} + (\vec{q} \times \frac{\mathrm{d}\,\vec{q}}{\mathrm{d}\,t}) \times (\frac{1}{GM}\frac{\mathrm{d}^2\,\vec{q}}{\mathrm{d}\,t^2})
\end{aligned}$$

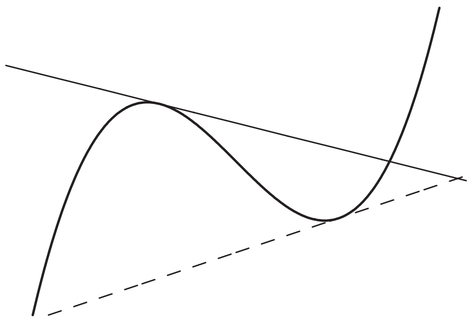

図 4.1　接線と２階微分.

ゆえに $\dfrac{\vec{q}}{\|\vec{q}\|} + (\vec{q} \times \dfrac{\mathrm{d}\,\vec{q}}{\mathrm{d}\,t}) \times \dfrac{1}{GM}\dfrac{\mathrm{d}\,\vec{q}}{\mathrm{d}\,t} = \vec{e}$ は微分すると $\vec{0}$ となる。従って、$\vec{e}$ は一定のベクトルである。この式と $\vec{q}$ の内積をとると次の式を得る。

$$\frac{\vec{q}}{\|\vec{q}\|} \bullet \vec{q} + ((\vec{q} \times \frac{\mathrm{d}\,\vec{q}}{\mathrm{d}\,t}) \times \frac{1}{GM}\frac{\mathrm{d}\,\vec{q}}{\mathrm{d}\,t}) \bullet \vec{q} = \vec{e} \bullet \vec{q}$$

$\dfrac{\vec{q}}{\|\vec{q}\|} \bullet \vec{q} = \|\vec{q}\|$ であるが、一方で、次の式が成立する。

問 3.5. $((\vec{q} \times \dfrac{\mathrm{d}\,\vec{q}}{\mathrm{d}\,t}) \times \dfrac{\mathrm{d}\,\vec{q}}{\mathrm{d}\,t}) \bullet \vec{q} = -\|\vec{q} \times \dfrac{\mathrm{d}\,\vec{q}}{\mathrm{d}\,t}\|^2$ を示せ。

こうして

$$\|\vec{q}\| + \frac{\|\vec{q} \times \frac{\mathrm{d}\,\vec{q}}{\mathrm{d}\,t}\|^2}{GM} = \vec{e} \bullet \vec{q}$$

が得られる。$\|\vec{q} \times \dfrac{\mathrm{d}\,\vec{q}}{\mathrm{d}\,t}\|^2$ は定数だから、これは原点を焦点とする２次曲線を表す。

4　平 面 の 曲 線

4.1　関数のグラフ（４／１５）

開区間 (a,b) 上で定義された連続微分可能な実数値関数 f の**グラフ** $\{(x,y) \mid y = f(x)\}$ を考える。関数 f のグラフは xy 平面内の曲線である。

グラフの形を考える上でグラフの各点における傾きは重要な要素である。微分法により、f の x_0 における微分係数 $\dfrac{\mathrm{d}\,f}{\mathrm{d}\,x}(x_0) = f'(x_0)$ が、$(x_0, f(x_0))$ における接線の傾きを与え、接線は１次式 $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ で与えられる。

グラフがある点 $(x_0, f(x_0))$ において下に凸であるか上に凸であるかは、導関数 $f'(x)$ が x_0 において増加しつつあるか減少しつつあるかにより定まる。従って、関数 f が２回連続微分可能とすると、２階微分係数 $f''(x_0) > 0$ ならば $(x_0, f(x_0))$ において下に凸、$f''(x_0) < 0$ ならば $(x_0, f(x_0))$ において上に凸となる。

グラフの曲線上を水平軸 x が増加する方向にたどると、グラフが下に凸であるような点では曲線は左へカーブし、上に凸であるような点では曲線は右へカーブしている。

グラフが下に凸という性質はグラフ上の点 $(x_0, f(x_0))$ の近くでグラフ上の２点を結ぶ線分が端点を除いてグラフの上側にあるということであり、またグラフの接線は接点を除いてグラフの下側にあるということである。特に、$f'(x_0) = 0$ のとき、$f''(x_0) > 0$ ならば $f(x_0)$ は極小値、$f''(x_0) < 0$ ならば $f(x_0)$ は極大値となる。

曲線上の $(x_0, f(x_0))$ から $(x_1, f(x_1))$ への弧の長さは
$\left|\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathrm{d}\,x\right|$ で与えられる。
$(x_0, f(x_0))$ から $(x, f(x))$ への向きを考慮した弧長を与える関数

$$\sigma(x) = \int_{x_0}^{x} \sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathrm{d}\,x$$

を考える。$\sigma(x)$ は単調増加関数だから、s に対し $\sigma(x) = s$ となる x が定まる。この x を $x = \xi(s)$ と書く。s を変数とするとグラフの曲線は弧長をパラメータとして、$(\xi(s), f(\xi(s)))$ という形に書かれる。

4.2 平面曲線のパラメータ表示（４／１５）

曲線が t を変数として $x = \xi(t),\ y = \eta(t)$ という形で表されたとき、これを曲線の**パラメータ表示**（媒介変数表示）という。グラフの形の曲線を弧長をパラメータとして表示したのは、このパラメータ表示の例である。

平面上の点の運動を記述するときは、時刻 t が最も自然なパラメータである。時刻 t における点の座標が $(\xi(t), \eta(t))$ で表される。これを t に対して変化する原点を始点にするベクトル $\vec{q}(t)$ とみることもできる。

点の位置の変化を表そうとすると、時刻 t の位置に平行移動した座標系で時刻 $t+h$ の位置を測ることになる。列ベクトルで書くと

$$\vec{q}(t+h) - \vec{q}(t) = \begin{pmatrix} \xi(t+h) \\ \eta(t+h) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \xi(t) \\ \eta(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi(t+h) - \xi(t) \\ \eta(t+h) - \eta(t) \end{pmatrix}$$

であるが、変化の割合の極限

$$\lim_{h\to 0} \frac{\vec{q}(t+h) - \vec{q}(t)}{h} = \begin{pmatrix} \displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{\xi(t+h) - \xi(t)}{h} \\ \displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{\eta(t+h) - \eta(t)}{h} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\mathrm{d}\,\xi}{\mathrm{d}\,t}(t) \\ \dfrac{\mathrm{d}\,\eta}{\mathrm{d}\,t}(t) \end{pmatrix}$$

が点の運動の速度 $\dfrac{\mathrm{d}\,\vec{q}}{\mathrm{d}\,t}(t)$ である。速度ベクトルは平面と同じ次元のベクトルでその始点は $\vec{q}(t)$ にあると考える。方向を持ち、大きさは

$$\left\|\frac{\mathrm{d}\,\vec{q}}{\mathrm{d}\,t}(t)\right\| = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}\,\xi}{\mathrm{d}\,t}(t)\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}\,\eta}{\mathrm{d}\,t}(t)\right)^2}$$

である。

速度ベクトル $\dfrac{\mathrm{d}\,\vec{q}}{\mathrm{d}\,t}(t) = (\dfrac{\mathrm{d}\,\xi}{\mathrm{d}\,t}(t), \dfrac{\mathrm{d}\,\eta}{\mathrm{d}\,t}(t)) = (\xi'(t), \eta'(t))$ が零ベクトル $\vec{0}$ になるときには曲線は折れ曲がることもある。しかし時刻 t_0 において速度ベクトル $\dfrac{\mathrm{d}\,\vec{q}}{\mathrm{d}\,t}(t_0)$ が零ベクトル $\vec{0}$ でないときには、時刻 t の前後で、軌跡の曲線は関数のグラフになることが示される。

実際、$\dfrac{\mathrm{d}\,\vec{q}}{\mathrm{d}\,t}(t_0) = (\xi'(t_0), \eta'(t_0)) \neq \vec{0}$ ならば、その成分のどちらかは 0 でない。第 1 座標 $\xi'(t_0) \neq 0$ とすると、$\xi(t)$ は $t = t_0$ の前後で単調増加または単調減少なので、$x_0 = \xi(t_0)$ の近くで逆関数 $\tau(x)$ が定義される。このとき、t_0 の前後で $(\xi(t), \eta(t))$ で与えられる曲線は、x_0 の近くで定義された $\tau(x)$ によって $(x, \eta(\tau(x)))$ と書かれる曲線と一致する。（パラメータは異なるが平面の部分集合として一致している。）これは関数 $y = \eta(\tau(x))$ のグラフになっているということである。

例 4.1. t をパラメータとする平面曲線 $\vec{q}(t) = (\dfrac{t^2}{2}, \dfrac{t^3}{3})$ に対し、
$\dfrac{\mathrm{d}\,\vec{q}}{\mathrm{d}\,t}(t) = (t, t^2)$ である。この曲線に対し、次に議論する曲線の長さは次のよう

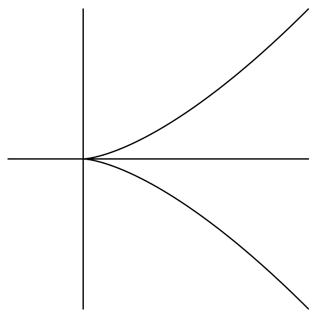

図 4.2 カスプ.

に求まる。

$$\sigma(t) = \int_0^t \sqrt{t^2 + t^4}\,\mathrm{d}\,t = \mathrm{sign}(t)(\frac{2}{3}(1+t^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3})$$

ここで $\mathrm{sign}(t)$ は t の正負の符号を表す。$s = \sigma(t)$ の逆関数 $t = \tau(s)$ は次のようになる。

$$\tau(s) = \mathrm{sign}(s)((\frac{3}{2}s+1)^{\frac{2}{3}} - 1)^{\frac{1}{2}}$$

ここでは速度が 0 になったための不具合が出てきている。つまり、曲線 $\vec{q}(t)$ はカスプと呼ばれる形をしており、曲線は $t = 0$ のところで折れ曲がっているのである。

4.3　弧長（4／15）

時刻というような最初から与えられているパラメータがないときには向きを考慮した道のり s が最も自然なパラメータのとり方である。

速度ベクトルの大きさを速さといい、速さの積分が道のりである。$\vec{q}(t_0)$ から $\vec{q}(t)$ への向きを考慮した道のりを与える関数

$$\sigma(t) = \int_{t_0}^t \|\frac{\mathrm{d}\,\vec{q}}{\mathrm{d}\,t}\|\,\mathrm{d}\,t = \int_{t_0}^t \sqrt{(\xi'(t))^2 + (\eta'(t))^2}\,\mathrm{d}\,t$$

を考える。$\xi(t)$, $\eta(t)$ が連続微分可能ならばこの積分は有限である。速度ベクトル $\dfrac{\mathrm{d}\,\vec{q}}{\mathrm{d}\,t}$ が $\vec{0}$ にならないとすると、$\sigma(t)$ は単調増加関数だから、s に対し $\sigma(t) = s$ となる t が定まる。この t を $t = \tau(s)$ と書く。

このとき、曲線 $\vec{q}(t)$ を弧長によりパラメータ付けた表示は
$\vec{q}(\tau(s)) = (\xi(\tau(s)), \eta(\tau(s)))$ となる。

問 4.2. 弧の長さを次のように定義する。区間 $[t_0, t_1]$ の分割
$t_0 = u_0 < u_1 < \cdots < u_n = t_1$ をとると、$\{\xi(u_k), \eta(u_k)\}_{k=0,\ldots,n}$ を結ぶ折れ線の長さ $\displaystyle\sum_{k=1}^n \sqrt{(\xi(u_k) - \xi(u_{k-1}))^2 + (\eta(u_k) - \eta(u_{k-1}))^2}$ が定まる。このような折れ線の長さのあらゆる個数のあらゆる有限の分割 $\{u_0, u_1, \ldots, u_n\}$ にわたる上限を弧の長さと定義する。$\xi(t)$, $\eta(t)$ が連続微分可能ならば、この上限は、上で与えた積分 $\sigma(t_1)$ に等しいことを示せ。

問 4.3. 曲線上の道のりあるいは曲線の長さを考えるためには、連続微分可能性のような仮定が必要である。実際、曲線

$$\{(x,y) \mid y = x^2 \sin\frac{1}{x^2},\ x \in [-1,1]\}$$

は微分可能であるが長さが無限大になることを示せ。図 4.3 参照。

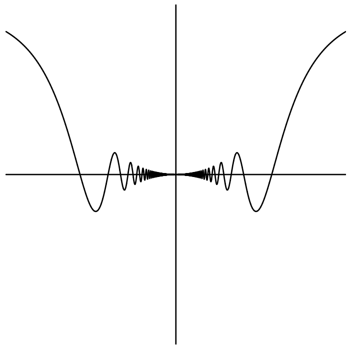

図 4.3 長さが無限大になる曲線.

曲線 $\vec{q}(t)$ の $t=t_0$ における速度ベクトル $\dfrac{\mathrm{d}\,\vec{q}}{\mathrm{d}\,t}(t_0)$ を、曲線 $\vec{q}(t)$ が $\vec{q}(t_0)$ で定める**接ベクトル**ともいう。パラメータが時刻という意味を持たないときには接ベクトルと呼ぶほうが混乱が起きない。パラメータのとり方によらず曲線の接ベクトルは曲線の接線の方向を向いている。曲線上の１点 $\vec{q}(t_0)$ を通る接ベクトル $\dfrac{\mathrm{d}\,\vec{q}}{\mathrm{d}\,t}(t_0)$ に垂直な直線を曲線 $\vec{q}(t)$ の $\vec{q}(t_0)$ における**法線**と呼ぶ。

4.4 曲率（４／２２）

さて、曲線 $\vec{q}(s)=(\xi(s),\eta(s))$ がもともと弧長 s でパラメータ付けられていたとする。（前ページの $\vec{q}(\tau(s))$ を書き直して、改めて $\vec{q}(s)$ と書いたと考えよう。）

このとき $\sigma(s)=\displaystyle\int_{s_0}^{s}\|\frac{\mathrm{d}\,\vec{q}}{\mathrm{d}\,s}\|\,\mathrm{d}\,s=s-s_0$ となる。従って、接ベクトルの大きさについて $\|\dfrac{\mathrm{d}\,\vec{q}}{\mathrm{d}\,s}\|=1$ が成立する。

この $\|\dfrac{\mathrm{d}\,\vec{q}}{\mathrm{d}\,s}(s)\|=1$ を２乗すると $\dfrac{\mathrm{d}\,\vec{q}}{\mathrm{d}\,s}(s)\bullet\dfrac{\mathrm{d}\,\vec{q}}{\mathrm{d}\,s}(s)=1$ である。これを微分し、２で割ると $\dfrac{\mathrm{d}^2\,\vec{q}}{\mathrm{d}\,s^2}(s)\bullet\dfrac{\mathrm{d}\,\vec{q}}{\mathrm{d}\,s}(s)=0$ を得る。（問 2.6、7 ページ参照。）この２階微分のベクトルの大きさ $\kappa=\|\dfrac{\mathrm{d}^2\,\vec{q}}{\mathrm{d}\,s^2}(s)\|$ を**曲率**と呼ぶ。$\dfrac{\mathrm{d}^2\,\vec{q}}{\mathrm{d}\,s^2}(s)$ は曲線の $\vec{q}(s)$ における法線の方向を向いている。

$\vec{p}(s)=\dfrac{\mathrm{d}\,\vec{q}}{\mathrm{d}\,s}(s)$ とすると、これは接線方向の単位ベクトルである。法線方向の単位ベクトル $\vec{n}(s)$ を、行ベクトル $\vec{p}(s)$, $\vec{n}(s)$ でつくった行列 $\begin{pmatrix}\vec{p}(s)\\ \vec{n}(s)\end{pmatrix}$ の行列式が $\det\begin{pmatrix}\vec{p}(s)\\ \vec{n}(s)\end{pmatrix}=1$ となるように定める。$\begin{pmatrix}\vec{p}(s)\\ \vec{n}(s)\end{pmatrix}$ は２次の直交行列であることに注意しよう。（通常は $\vec{n}$ は $\vec{p}$ を時計と反対回りに直角に回転したものである。）そうすると $\dfrac{\mathrm{d}^2\,\vec{q}}{\mathrm{d}\,s^2}(s)=\pm\kappa\vec{n}$ で正の符号のとき曲線は左にカーブし、負のときに右にカーブする。

例題 4.4. 関数 $f(x)$ のグラフ上の一点 $\{(x,f(x))\}$ におけるグラフの曲線の曲率を求めよ。

例題 4.4 の答。 11 ページで求めた $(\xi(s),f(\xi(s)))$ を弧長による表示とする。$\sigma(\xi(s))=s$ を微分して $\sqrt{1+(f'(\xi(s)))^2}\dfrac{\mathrm{d}\,\xi}{\mathrm{d}\,s}(s)=1$ すなわち

$$(1+(f'(\xi(s)))^2)(\frac{\mathrm{d}\,\xi}{\mathrm{d}\,s}(s))^2=1$$

を得る。これを微分すると、

$$2f'(\xi(s))f''(\xi(s))(\frac{\mathrm{d}\,\xi}{\mathrm{d}\,s}(s))^3+2(1+(f'(\xi(s)))^2)\frac{\mathrm{d}\,\xi}{\mathrm{d}\,s}(s)\frac{\mathrm{d}^2\,\xi}{\mathrm{d}\,s^2}(s)=0$$

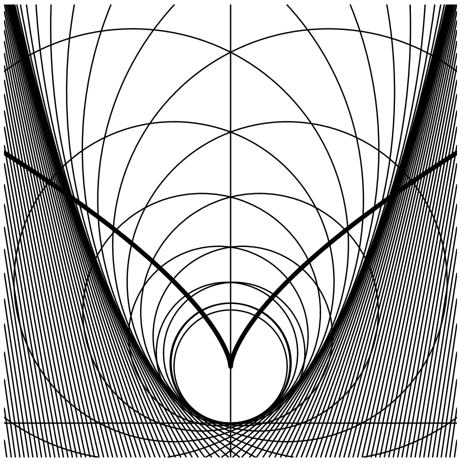

図 4.4　放物線の曲率円とその中心の軌跡.

ゆえに、

$$\frac{d^2\xi}{ds^2}(s) = -\frac{f'(\xi(s))(\frac{d\xi}{ds}(s))^2 f''(\xi(s))}{1+(f'(\xi(s)))^2} = -\frac{f'(\xi(s))}{(1+(f'(\xi(s)))^2)^2} f''(\xi(s))$$

である。一方、$\frac{d f(\xi(s))}{ds} = f'(\xi(s))\frac{d\xi}{ds}(s)$ を微分して、

$$\begin{aligned}\frac{d^2 f(\xi(s))}{ds^2} &= f''(\xi(s))(\frac{d\xi}{ds}(s))^2 + f'(\xi(s))\frac{d^2\xi}{ds^2}(s) \\ &= \frac{f''(\xi(s))}{1+(f'(\xi(s)))^2} - \frac{(f'(\xi(s)))^2}{(1+(f'(\xi(s)))^2)^2} f''(\xi(s)) \\ &= \frac{f''(x)}{(\sqrt{1+(f'(x))^2})^3}\end{aligned}$$

従って、$\|\frac{d^2\vec{q}}{ds^2}\| = \frac{|f''(x)|}{(\sqrt{1+(f'(x))^2})^3}$ を得る。

この例でわかるように、$f'(x_0)=0$ となる点 x_0 に対し、$y=f(x)$ のグラフ上の点 $(x_0, f(x_0))$ における曲率は２階微分の絶対値 $|f''(x_0)|$ に等しい。また、曲率が 0 でないことと２階微分が 0 でないことは同値である。これが、曲線の凸性が２階微分でわかる理由である。

弧長でパラメータ付けられた曲線 $\vec{q}(s)$ に対し、
$\vec{q}(s_0) + \frac{1}{\kappa^2}\frac{d^2\vec{q}}{ds^2}(s_0) = \vec{q}(s_0) \pm \frac{1}{\kappa}\vec{n}(s_0)$ を中心とし、半径が曲率の逆数 $\frac{1}{\kappa}$ の円を曲線 $\vec{q}(s)$ の $\vec{q}(s_0)$ における**曲率円**と呼ぶ。

この円の弧長をパラメータとする定義式は

$$\begin{aligned}\vec{q_1}(s) = \quad & \vec{q}(s_0) + \frac{1}{\kappa^2}\frac{d^2\vec{q}}{ds^2}(s_0) \\ & + \frac{\sin\kappa(s-s_0)}{\kappa}\frac{d\vec{q}}{ds}(s_0) - \frac{\cos\kappa(s-s_0)}{\kappa^2}\frac{d^2\vec{q}}{ds^2}(s_0)\end{aligned}$$

である。もとの曲線 $\vec{q}(s)$ とこの円の表示 $\vec{q_1}(s)$ とは s_0 において、微分および２階微分が同じ値を持つ。

$$\vec{q_1}(s_0) = \vec{q}(s_0), \quad \frac{d\vec{q_1}}{ds}(s_0) = \frac{d\vec{q}}{ds}(s_0), \quad \frac{d^2\vec{q_1}}{ds^2}(s_0) = \frac{d^2\vec{q}}{ds^2}(s_0)$$

すなわち弧長をパラメータとして持つ曲線として、２次の近似となる円が曲率円である。

図 4.4 は放物線の曲率円の族とその中心の軌跡を描いたものである。放物線自身は曲率円がたくさん描かれて黒く見えるところの縁にある。

曲率円の中心のなす曲線 $\vec{q}(s) + \frac{1}{\kappa^2}\frac{d^2\vec{q}}{ds^2}(s)$ を曲線 $\vec{q}(s)$ の縮閉線、このとき曲線 $\vec{q}(s)$ を上の曲線の伸開線と呼ぶ。特異点の本[7)] 参照。

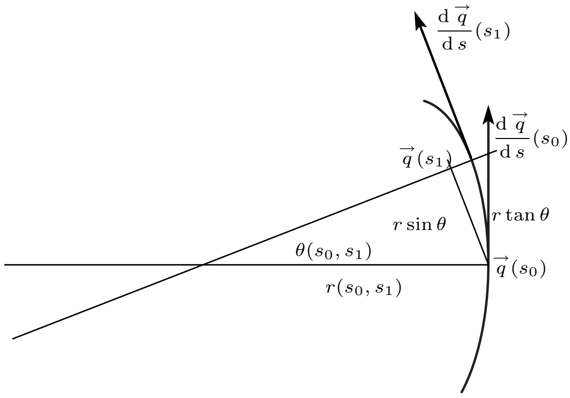

図 4.5 曲線の法線の交わり.

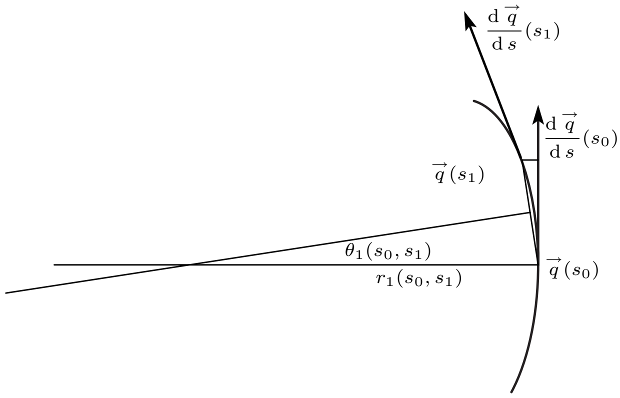

図 4.6 曲線上の２点の垂直２等分線.

問 4.5. $\dfrac{d^2\vec{q}}{ds^2}(s_0) \neq \vec{0}$ とする。曲率円の中心は、$\vec{q}(s_0)$ における法線と $\vec{q}(s_1)$ における法線の交点の、s_1 が s_0 に近づく時の極限であることを示せ。
ヒント：$|\theta(s_0, s_1)| = \|\dfrac{d^2\vec{q}}{ds^2}(s_0)\|\,|s_1 - s_0| + \varepsilon_1(s_0, s_1)$ $(\lim\limits_{s_1\to s_0} \dfrac{\varepsilon_1(s_0, s_1)}{s_1 - s_0} = 0)$ および $r(s_0, s_1)\sin\theta(s_0, s_1) < s_1 - s_0 < r(s_0, s_1)\tan\theta(s_0, s_1)$ に注意する。図 4.5 参照。

曲率円は次のように $\vec{q}(s)$ の３点を通る円の極限とみることも出来る。

問 4.6. $\dfrac{d^2\vec{q}}{ds^2}(s_0) \neq 0$ とする。$\vec{q}(s_0)$ における曲率円は、$s_{-1} < s_0 < s_1$ に対して $\vec{q}(s_{-1})$, $\vec{q}(s_0)$, $\vec{q}(s_1)$ を通る円の s_{-1}, s_1 が s_0 に近づくときの極限であることを示せ。
ヒント：$\vec{q}(s_0)$ における法線を補助線として使う。図 4.6 参照。
$\|\vec{q}(s_1) - \vec{q}(s_0)\| = 2r_1(s_0, s_1)\sin\theta_1(s_0, s_1)$,
$\|\vec{q}(s_1) - \vec{q}(s_0)\|\sin\theta_1(s_0, s_1) = |(\vec{q}(s_1) - \vec{q}(s_0)) \bullet \vec{n}|$ において

$$\vec{q}(s) - \vec{q}(s_0) = \frac{d\vec{q}}{ds}(s_0)(s - s_0) + \frac{1}{2}\frac{d^2\vec{q}}{ds^2}(s_0)(s - s_0)^2 + \vec{\varepsilon}(s, s_0)$$

$(\lim\limits_{s\to s_0} \dfrac{\|\vec{\varepsilon}(s, s_0)\|}{|s - s_0|^2} = 0)$ に注意して、$r_1(s_0, s_1)$ の極限を求める。
さらに図 4.7 に注意して３点を通る円の中心の極限を求める。

さて、弧長 s でパラメータ付けられた曲線 $\vec{q}(s)$ について、その接ベクトル $\vec{p}(s)$ と法線方向の単位ベクトル $\vec{n}(s)$ は、正規直交基底であり、これらを行ベクトルとする行列の行列式は $\det\begin{pmatrix}\vec{p}(s)\\ \vec{n}(s)\end{pmatrix} = 1$ となる。このとき、

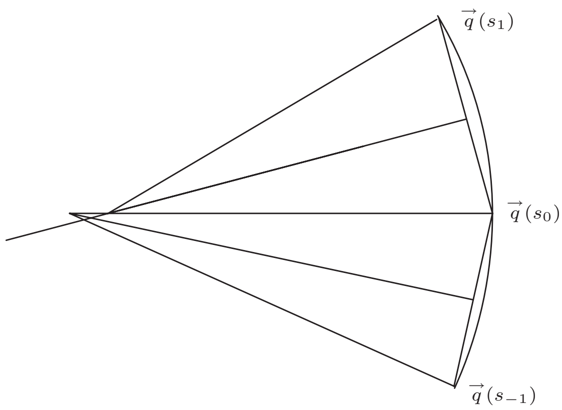

図 4.7　曲線上の３点を通る円の中心を探す.

$\dfrac{\mathrm{d}\,\vec{p}}{\mathrm{d}\,s}(s) = \pm\kappa(s)\vec{n}(s)$ となる。ここから後、この節では、曲率 κ が負の値をとることも許して、$\dfrac{\mathrm{d}\,\vec{p}}{\mathrm{d}\,s}(s) = \kappa(s)\vec{n}(s)$ とする。$\vec{n}(s) \bullet \vec{n}(s) = 1$ を微分すると $\vec{n}(s) \bullet \dfrac{\mathrm{d}\,\vec{n}}{\mathrm{d}\,s}(s) = 0$ を得るから、$\dfrac{\mathrm{d}\,\vec{n}}{\mathrm{d}\,s}(s)$ は $\vec{p}(s)$ の実数倍である。一方で、$\vec{p}(s) \bullet \vec{n}(s) = 0$ を微分した $\dfrac{\mathrm{d}\,\vec{p}}{\mathrm{d}\,s}(s) \bullet \vec{n}(s) + \vec{p}(s) \bullet \dfrac{\mathrm{d}\,\vec{n}}{\mathrm{d}\,s}(s) = 0$ から $\dfrac{\mathrm{d}\,\vec{n}}{\mathrm{d}\,s}(s) = -\kappa(s)\vec{p}(s)$ となる。

以上をまとめると、行列 $\begin{pmatrix} \vec{p}(s) \\ \vec{n}(s) \end{pmatrix}$ に対し、
$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,s}\begin{pmatrix} \vec{p}(s) \\ \vec{n}(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa(s) \\ -\kappa(s) & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vec{p}(s) \\ \vec{n}(s) \end{pmatrix}$ を得るが、これは行列 $\begin{pmatrix} \vec{p}(s) \\ \vec{n}(s) \end{pmatrix}$ が線形常微分方程式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,s}\vec{v}(s) = \begin{pmatrix} 0 & \kappa(s) \\ -\kappa(s) & 0 \end{pmatrix}\vec{v}(s)$$

の基本解行列であることを示している。線形常微分方程式の理論によれば、このような微分方程式は一意的に解かれて、基本解行列は初期値 $\begin{pmatrix} \vec{p}(s_0) \\ \vec{n}(s_0) \end{pmatrix}$ を定めると一意的に定まる。常微分方程式の本[7)] 参照。さらに、$\vec{q}(s_0)$ が与えられると、$\vec{p}(s)$ を s について積分することによって、$\vec{q}(s)$ が得られる。

$$\vec{q}(s) = \vec{q}(s_0) + \int_{s_0}^{s} \vec{p}(s)\,\mathrm{d}\,s$$

これは、$\vec{q}(s_0)$ とその点における接ベクトル、曲線上で $\vec{q}(s_0)$ から距離が $s - s_0$ の点の曲率 $\kappa(s)$ がわかっていれば曲線は一意的に定まることを言っている。

例題 4.7. 曲率が一定の曲線は円であることを示せ。

例題 4.7 の答。 $\kappa = 0$ ならば $\vec{q}$ の各成分は 1 次関数で直線となる。$\kappa \neq 0$ のとき線形常微分方程式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,s}\vec{v}(s) = \begin{pmatrix} 0 & \kappa \\ -\kappa & 0 \end{pmatrix}\vec{v}(s)$$

の基本解行列は初期値 $\begin{pmatrix} \vec{p}(s_0) \\ \vec{n}(s_0) \end{pmatrix}$ を定めると $\begin{pmatrix} \cos(\kappa s) & \sin(\kappa s) \\ -\sin(\kappa s) & \cos(\kappa s) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vec{p}(s_0) \\ \vec{n}(s_0) \end{pmatrix}$ の形に求まる。（$\vec{p}(s_0)$ を定めれば $\vec{n}(s_0)$ は 2 通りに決まる。）従って、

$$\vec{p}(s) = \cos(\kappa s)\vec{p}(s_0) + \sin(\kappa s)\vec{n}(s_0)$$

である。これを積分して、

$$\vec{q}(s) = \int_{s_0}^{s} \vec{p}(s)\,\mathrm{d}\,s = \vec{q}(s_0) + \frac{\sin(\kappa s)}{\kappa}\vec{p}(s_0) - \frac{\cos(\kappa s)}{\kappa}\vec{n}(s_0)$$

を得る。これは半径が $\dfrac{1}{\kappa}$ の円である。

5 空間の曲面 1

5.1 空間の２直線（４／２２）

空間の２直線は１つの平面上にある場合、交わるか平行であるかどちらかである。１つの平面上にない場合、２直線はねじれの位置にあるという。逆に、平行な２直線あるいは交わる２直線はそれらを含む平面を定める。交わる２直線 ℓ_1, ℓ_2 の交点 P の座標を $\vec{q_0} = (x_0, y_0, z_0)$ とし、ℓ_1, ℓ_2 上に P と異なる点 $\vec{q_1} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{q_2} = (x_2, y_2, z_2)$ をとる。直線 ℓ_1 上の点は、t_1 をパラメータとして

$$\vec{q_0} + t_1(\vec{q_1} - \vec{q_0}) = \vec{q_0} + t_1\vec{p_1}$$

で表される。ここで $\vec{p_1} = \vec{q_1} - \vec{q_0}$ である。同様に直線 ℓ_2 上の点は、$\vec{p_2} = \vec{q_2} - \vec{q_0}$ t_2 をパラメータとして

$$\vec{q_0} + t_2(\vec{q_2} - \vec{q_0}) = \vec{q_0} + t_2\vec{p_2}$$

で表される。交わる２直線 ℓ_1, ℓ_2 を含む平面の点は $\vec{q_0} + t_1\vec{p_1} + t_2\vec{p_2}$ の形に表される。この書き方は ℓ_1 の点をとおり、ℓ_2 に平行な直線の全体を考えたときに、その上にある点全体をあらわしているように読める。

特別に

$$\vec{q_0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z_0 \end{pmatrix},\ \vec{p_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ w_1 \end{pmatrix},\ \vec{p_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ w_2 \end{pmatrix}$$

の形のとき、$\vec{q_0} + t_1\vec{p_1}$ で表される ℓ_1 は xz 平面上の z 切片が z_0, 傾き w_1 の直線であり、$\vec{q_0} + t_2\vec{p_2}$ で表される ℓ_2 は yz 平面上の z 切片が z_0, 傾き w_2 の直線である。ℓ_1, ℓ_2 の定める平面 $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z_0 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ w_1 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ w_2 \end{pmatrix}$ の上の点は、$\{(t_1, t_2, z_0 + t_1w_1 + t_2w_2)\}$ の形をしているから、方程式

$$z = z_0 + w_1x + w_2y$$

で定められている。この平面を x 軸方向に x_0, y 軸方向に y_0 平行移動したものは $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ w_1 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ w_2 \end{pmatrix}$ とパラメータ表示される平面で、方程式

$$z - z_0 = w_1(x - x_0) + w_2(y - y_0)$$

で定められている。

5.2 平面上の関数のグラフ（４／２２）

２変数の関数 $f(x, y)$ は平面の点 (x, y) に対して値 $f(x, y)$ を対応させているものである。そのグラフは $(x, y, f(x, y))$ の形の点全体である。平面上の関数 $f(x, y)$ のグラフの形は $f(x, y)$ を地点 (x, y) における標高とするような地形である。平面上の曲線 $(\xi(t), \eta(t))$ を考えると、この曲線に沿う高さの変化は

$f(\xi(t),\eta(t))$ で表される。($f(x,y)$ が連続微分可能として) 高さの変化の割合は

$$\frac{\mathrm{d}\, f(\xi(t),\eta(t))}{\mathrm{d}\, t} = \frac{\partial f}{\partial x}(\xi(t),\eta(t))\xi'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(\xi(t),\eta(t))\eta'(t)$$

である。

平面の点 (x_0,y_0) に対し、$(\xi(t_0),\eta(t_0)) = (x_0,y_0)$ となる曲線を考え、$f(x,y)$ のグラフの上にある曲線 $(\xi(t),\eta(t),f(\xi(t),\eta(t)))$ を考えると、これはグラフ上の点 $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ を通る。この曲線の $t = t_0$ における接ベクトルは $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ に始点を持つベクトル

$$\left(\xi'(t_0),\eta'(t_0),\frac{\partial f}{\partial x}(\xi(t_0),\eta(t_0))\xi'(t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(\xi(t_0),\eta(t_0))\eta'(t_0)\right)$$

である。この曲線の接線は

$$\begin{pmatrix} \xi(t_0) \\ \eta(t_0) \\ f(\xi(t_0),\eta(t_0)) \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \xi'(t_0) \\ \eta'(t_0) \\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(\xi(t_0),\eta(t_0))\xi'(t_0) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(\xi(t_0),\eta(t_0))\eta'(t_0) \end{pmatrix}$$

というパラメータ表示をされる。この表示は

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ f(x_0,y_0) \end{pmatrix} + t\xi'(t_0) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) \end{pmatrix} + t\eta'(t_0) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \end{pmatrix}$$

と書かれる。関数 $f(x,y)$ 上の曲線はその x 座標を $\xi(t)$, y 座標を $\eta(t)$ とおくと、必ず $(\xi(t),\eta(t),f(\xi(t),\eta(t)))$ の形に書かれるが、$(\xi(t_0),\eta(t_0),f(\xi(t_0),\eta(t_0)))$ を通るグラフ上の曲線をどのようにとっても、その $(\xi(t_0),\eta(t_0),f(\xi(t_0),\eta(t_0)))$ における接線は

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ f(x_0,y_0) \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \end{pmatrix}$$

という平面に含まれる。この平面は

$$z - f(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)$$

とも書かれる。この平面をグラフの**接平面**という。

$$f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)$$

は 2 変数関数 $f(x,y)$ のテーラー展開の 1 次までの項であることに注意するとグラフの接平面は関数の 1 次近似のグラフであるということである。接平面が水平であるのは $(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0),\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0))$ が零ベクトル $\vec{0}$ のときである。

平面上の関数に対し、平面のベクトル $(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0),\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0))$ を**勾配ベクトル**と呼び、$(\mathrm{grad}\, f)(x_0,y_0)$ と書く。grad は**グラディエント**と読む。 再び曲線 $(\xi(t),\eta(t))$ に沿う $f(\xi(t),\eta(t))$ の変化の割合を考えると

$$\frac{\mathrm{d}\, f(\xi(t),\eta(t))}{\mathrm{d}\, t} = \frac{\partial f}{\partial x}(\xi(t),\eta(t))\frac{\mathrm{d}\,\xi}{\mathrm{d}\, t}(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(\xi(t),\eta(t))\frac{\mathrm{d}\,\eta}{\mathrm{d}\, t}(t)$$

これは勾配ベクトルと平面の曲線の速度ベクトルの内積の形をしている。二つのベクトルのなす角度を θ とすると、

$$\frac{\mathrm{d}\, f(\xi(t),\eta(t))}{\mathrm{d}\, t} = \|(\mathrm{grad}\, f)(x_0,y_0)\|\ \|\frac{\mathrm{d}\,\vec{q}}{\mathrm{d}\, t}\|\cos\theta$$

となる。従って、傾きの大きさは $\|(\mathrm{grad}\, f)(x_0,y_0)\|$ である。

図 5.1 は 2 変数関数のグラフの傾きの方向の曲線（最大傾斜線）および等高線を書いたものである。

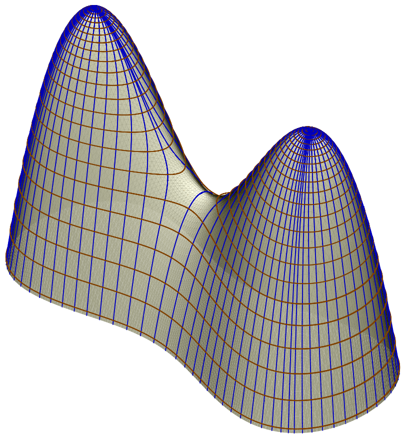

図 5.1　最大傾斜線と等高線.

5.3　グラフと接平面の関係（4／22）

平面の描かれた関数のグラフに対しては、関数の 2 階微分の符号がグラフが凸となる方向を定めていた。$z = f(x,y)$ のグラフが (x_0, y_0) をとおる平面上の直線 $(x_0 + t\cos\theta, y_0 + t\sin\theta)$ 上でどう変化するかをみるためには $g_\theta(t) = f(x_0 + t\cos\theta, y_0 + t\sin\theta)$ の t についての微分を計算すればよい。

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\,g_\theta}{\mathrm{d}\,t}(t) = &\frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + t\cos\theta, y_0 + t\sin\theta)\cos\theta \\ &+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + t\cos\theta, y_0 + t\sin\theta)\sin\theta\end{aligned}$$

$f(x,y)$ が 2 回連続微分可能として、$t = 0$ における 2 階微分は

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2\,g_\theta}{\mathrm{d}\,t^2}(0) = &\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)(\cos\theta)^2 \\ &+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)\cos\theta\sin\theta + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)(\sin\theta)^2\end{aligned}$$

となる。この最後の値がどのような θ に対しても正ならば、(x_0, y_0) を通るすべての直線の上でグラフは下に凸となる。従って、接平面は $f(x,y)$ のグラフの下側にあることになる。このとき $f(x,y)$ のグラフは下に凸という。

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)(\cos\theta)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)\cos\theta\sin\theta + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)(\sin\theta)^2 \\ = &\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta \\ \sin\theta\end{pmatrix}\end{aligned}$$

であって、これが任意の θ に対して正であることは対称行列 $\begin{pmatrix}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\end{pmatrix}$ が正定値であるといわれる性質であり、対称行列のすべての固有値が正であることと同値である。2 行 2 列の対称行列では、行列式とトレースが正であることとも同値である。線形代数の本[7] 参照。

例 5.1. 2 変数関数 $f(x,y) = x^3 - x - y^2$ のグラフ $z = x^3 - x + y^2 + 2$ について、凸である部分を定めるのは容易である。
$\begin{pmatrix}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6x & 0 \\ 0 & 2\end{pmatrix}$ だから、正定値であるのはグラフの $x > 0$ の部分である。図 5.2 参照。

特に接平面が水平であるときには、凸性に関する議論は、$f(x_0, y_0)$ が極値と

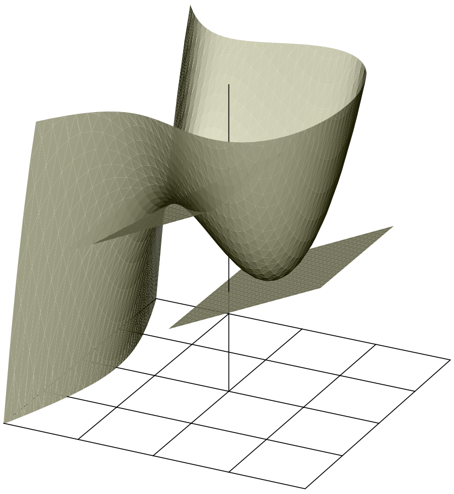

図 5.2 グラフと接平面.

なるための十分条件を与えている。

定理 5.2 (極値条件)**.** 平面上の 2 回連続微分可能な関数 $f(x,y)$ について、

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=0,\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=0$$

であり、$\det\begin{pmatrix}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)\\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)\end{pmatrix}>0$ とする。

$$\mathrm{tr}=\mathrm{tr}\begin{pmatrix}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)\\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)\end{pmatrix}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)$$

について、$\mathrm{tr}>0$ ならば、$f(x,y)$ は (x_0,y_0) で極小値をとり、$\mathrm{tr}<0$ ならば、$f(x,y)$ は (x_0,y_0) で極大値をとる。

また、上で求めた θ についての関数

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)(\cos\theta)^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)\cos\theta\sin\theta+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)(\sin\theta)^2$$

が正になる θ_+ と負になる θ_- が存在することと

$$\det\begin{pmatrix}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)\\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)\end{pmatrix}<0$$

とは同値であり，このときには $z=f(x,y)$ のグラフと $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ における接平面は、接点以外で交わることがわかる。0 に近い正実数 t を固定し、$f(x_0+t\cos\theta,y_0+t\sin\theta)$ を θ の関数だと思うとグラフが下に凸になる θ_+ においては接平面よりも上の値をとり、グラフが上に凸になる θ_- においては接平面よりも下の値をとるから接平面との交わりを 4 点以上で持つことになる。

とくに接平面が水平の場合、$\det\begin{pmatrix}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)\\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)\end{pmatrix}<0$ ならば極値にならないということがわかる。

このように接平面との位置関係は 2 階微分の行列によってかなり良くわかる。特に接平面が水平のとき、この 2 階微分の行列を**ヘッセ行列**（ヘッシアン）と呼ぶ。