多様体のコホモロジー理論としてのドラームコホモロジー理論を扱ってきて、向きを持つ n 次元多様体においては、多様体上での n 形式の積分が定義されることを見た。

多様体の位相の中で最も重要な事実の１つが、ポアンカレの双対定理である。

この章では、単体分割された多様体に対してのポアンカレの双対定理を説明する。

26　多様体の三角形分割

微分可能多様体は次のように三角形分割される。単体複体の単体 τ に対し、τ と交わらない単体 σ で、σ, τ がともに K の１つの単体の面となる（σ, τ が K の単体を張る）もの全体を考える。これを τ のリンクと呼び、$\mathrm{Lk}(\tau)$ と書く。$\mathrm{Lk}(\tau)$ は K の部分複体である。

定理 26.1 M をコンパクト n 次元 C^∞ 級多様体とする。次の *(∗)* を満たす n 次元単体複体 K と各単体上で C^∞ 級写像となる同相写像 $|K| \longrightarrow M$ が存在する。

(∗) K の各 p 単体 τ に対し、$\mathrm{Lk}(\tau)$ が $n-p-1$ 次元球面の単体分割となる。

条件 $(*)$ は K の頂点 v について、$\mathrm{Lk}(v)$ が $n-1$ 次元球面の単体分割となることと同値である。τ を面とする単体の内部の和集合を τ のスターと呼び、$\mathrm{St}(\tau)$ と書く。条件 $(*)$ が成り立てば $\mathrm{St}(\tau)$ は、n 次元開球と同相になる。

27　ポアンカレ双対性定理

向き付けを持つ微分可能多様体のポアンカレ双対定理を説明するためには、定理 26.1 で与えられる多様体の三角形分割を用いるのが都合が良い。

ポアンカレ双対定理は次のように述べられる。

定理 27.1 M をコンパクト向き付け可能多様体とすると次の同型が存在する。

$$H_{n-k}(M) \cong H^k(M)$$

これは、整数係数のホモロジー、コホモロジーに対して成立する。従って、実数係数でも成立する。

単体的ホモロジー理論は 19 節で説明した。

定理 20.7（60 ページ）において、コンパクトな向き付けをもつ連結 n 次元多様体 M について $M^n \cong \boldsymbol{R}$ であることを見た。その理由は、多様体の三角形分割について、１つの $n-1$ 次元単体は丁度２つの n 次元単体の境界になることであった。多様体の三角形分割 K における n 次元単体の全体を $\{\sigma_i\}$ とすると、M が向き付けられているときに、σ_i 上の向き付けが M の向き付けと一致するとき $a_i = +1$, M の向き付けと反対のとき $a_i = -1$ として、$c = \sum a_i\sigma_i$ を考えると、$\partial c = 0$ となる。この c 上での積分は M 上での積分と一致し、同型写像 $\displaystyle\int_c = \int_M : H^n_{DR}(M) \longrightarrow \boldsymbol{R}$ を与える。この c は M の整係数ホモロジー群の元を代表している。その元を M の基本類 (fundamental class) と呼び、$[M]$ で表す。

K の重心細分 $bsd(K)$ は次のように定義される単体複体である。K の各単体 τ の重心 b_τ を頂点と表す。重心細分 $bsd(K)$ の k 単体は、K の次元の異

なる単体 $\tau^{m_0}, \ldots, \tau^{m_k}$ であって、$\tau^{m_{i-1}}$ が τ^{m_i} の面となる ($\tau^{m_{i-1}} \prec \tau^{m_i}$; $i = 1, \ldots, k$) ものに対して、その重心で張られる k 単体 $\langle b_{\tau^{m_0}} \cdots b_{\tau^{m_k}} \rangle$ であるとする。こうすると、$bsd(K)$ は単体複体となる。

単体を記述するために $i_0 \cdots i_k$ の並べ替え $j_0 \cdots j_k$ に対して、

$$\langle j_0 \cdots j_k \rangle = \mathrm{sign} \begin{pmatrix} i_0 \cdots i_k \\ j_0 \cdots j_k \end{pmatrix} \langle i_0 \cdots i_k \rangle$$

と考える。K の k 単体 $\langle e_{i_0} \cdots e_{i_k} \rangle$ ($i_0 < \cdots < i_k$) に対して、$\langle e_{i_0} \cdots e_{i_k} \rangle$ を分割して得られる $bsd(K)$ の k 単体は次のように記述される。$i_0 \cdots i_k$ の並べ替え $J = j_0 \cdots j_k$ に対応して m 単体を $\tau_m = \tau_m(J) = \langle e_{j_0} \cdots e_{j_m} \rangle$ ($m = 0, \ldots, k$) と定義すると、次元が 1 ずつ増える単体の列 $\tau_0 \prec \cdots \prec \tau_k$ が得られる。$J = j_0 \cdots j_k$ と $\tau_0 \prec \cdots \prec \tau_k$ は 1 対 1 に対応する。となり、これに対して $bsd(K)$ の k 単体 $\langle b_{\tau_0} \cdots b_{\tau_k} \rangle$ が得られる。この $\tau_0 \cdots \tau_m$ に対し、$\mathrm{sign}(\tau_0 \cdots \tau_m) = \mathrm{sign} \begin{pmatrix} i_0 \cdots i_k \\ j_0 \cdots j_k \end{pmatrix}$ と定める。$(k+1)!$ 個の和 $\displaystyle\sum_{\tau_0 \prec \cdots \prec \tau_k} \mathrm{sign}(\tau_0 \cdots \tau_m) \langle b_{\tau_0} \cdots b_{\tau_k} \rangle$ は、各 $\mathrm{sign}(\tau_0 \cdots \tau_m) \langle b_{\tau_0} \cdots b_{\tau_k} \rangle$ の向きが $\langle e_{i_0} \cdots e_{i_k} \rangle$ の向きと一致し、和は符号を含めて、$\langle e_{i_0} \cdots e_{i_k} \rangle$ を表している。特に $|bsd(K)| = |K|$ である。

実際 $bsd : C_*(K) \longrightarrow C_*(bsd(K))$ を $bsd(\langle e_{i_0} \cdots e_{i_k} \rangle) = \displaystyle\sum_{\tau_0 \prec \cdots \prec \tau_k} \mathrm{sign}(\tau_0 \cdots \tau_m) \langle b_{\tau_0} \cdots b_{\tau_k} \rangle$ で定義すると、これはホモロジー群の同型 $bsd_* : H_*(K) \longrightarrow H_*(bsd(K))$ を導く。

さて、K を n 次元多様体の三角形分割とし、$bsd(K)$ を考える。K は、すべての k 単体 τ に対し、$Link(\tau)$ が $n-k-1$ 次元の球面の三角形分割となっているという性質を持つ。このとき K の各単体 τ に対し、τ を含む単体の和集合 $\mathrm{St}(b_\tau)$ を考えると、これは、n 次元閉球体と同相になる。

$bsd(K)$ と K の関係を考えてみると、K の単体 τ_k に対して、$\tau_k \prec \tau_{k+1} \prec \cdots \prec \tau_n$ という単体の列がとれるが、τ_k から始まる列 $\tau_k \prec \tau_{k+1} \prec \cdots \prec \tau_n$ 全体について $n-k$ 単体 $\langle b_{\tau_k} b_{\tau_{k+1}} \cdots b_{\tau_n} \rangle$ の閉包の和集合をとると、$n-k$ 次元の球体と同相になる。これを τ_k の双対胞体とよび、${\tau_k}^*$ で表す。τ_k の向きと、${\tau_k}^*$ の向きを並べて、M の b_{τ_k} における向きが定まるように ${\tau_k}^*$ の向きをとることが出来る。

k 単体の向きは、その k 単体に接する k 個の 1 次独立なベクトル (k 枠) により表示される。2 つの k 枠は、k 次正則行列により写りあうが、行列式が正の正則行列で写りあう時に同じ向きを定め、行列式が負の正則行列で写りあう時に反対の向きを定める。ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^N$ の $k+1$ 個の点 $v_0, \ldots, v_k$ を頂点とする単体 $\langle v_0 \cdots v_k \rangle$ に対しては、k 枠 $(v_1 - v_0, v_2 - v_1, \ldots, v_k - v_{k-1})$ が単体の向きを与える。この向きは、$(v_1 - v_0, v_2 - v_0, \ldots, v_k - v_0)$ と同じ向きである。n 単体 $\langle v_0 \ldots v_n \rangle$ の部分 k 単体 $\langle v_0 \cdots v_k \rangle$ と部分 $n-k$ 単体 $\langle v_k \cdots v_n \rangle$ ($0 \leqq k \leqq n$) に対して、$\langle v_0 \cdots v_k \rangle$ の向きを与える k 枠 $(v_1 - v_0, v_2 - v_1, \ldots, v_k - v_{k-1})$ と $\langle v_k \cdots v_n \rangle$ の向きを与える $n-k$ 枠 $(v_{k+1} - v_k, v_{k+2} - v_{k+1}, \ldots, v_n - v_{n-1})$ をならべた n 枠 $(v_1 - v_0, v_2 - v_1, \ldots, v_n - v_{n-1})$ が n 単体 $\langle v_0 \cdots v_n \rangle$ の向きを与えていることに注意しよう。

n 単体 $\langle v_0 \cdots v_n \rangle$ に対して、$\tau_k = \langle v_0 \cdots v_k \rangle$ という部分 k 単体を考えると、$\tau_n = \langle v_0 \cdots v_n \rangle$ の重心細分 $bsd(\tau_n)$ の n 単体 $\langle b_{\tau_0} \cdots b_{\tau_n} \rangle$ の向きは $\tau_n = \langle v_0 \cdots v_n \rangle$ の向きと一致する。従って、$\tau_k = \langle v_0 \cdots v_k \rangle$ の向きを与える k 枠と $\langle b_{\tau_k} \cdots b_{\tau_n} \rangle$ の向きを与える $n-k$ 枠を並べたものは $\tau_n = \langle v_0 \cdots v_n \rangle$ の向きを与える。

さて、$\tau_{k-1} \prec \tau_k$, $\langle b_{\tau_k} \cdots b_{\tau_n} \rangle \prec \langle b_{\tau_{k-1}} b_{\tau_k} \cdots b_{\tau_n} \rangle$ であるが、$\partial \tau_k$ の項の

τ_{k-1} の係数は $(-1)^k$ である。一方、$\partial\langle b_{\tau_{k-1}} b_{\tau_k} \cdots b_{\tau_n}\rangle$ の項の $\langle b_{\tau_k} \cdots b_{\tau_n}\rangle$ の係数は 1 であることに注意する。

M が向き付けられているとすると、K の n 単体 $\langle e_{j_0} \cdots e_{j_n}\rangle$ に対し、その向きが M の向きと同じが反対かが定まる。同じときに $+1$、反対のときに -1 として $\mathrm{sign}\langle e_{j_0} \cdots e_{j_n}\rangle = \pm 1$ を定める。

K の k 単体 $\langle v_0 \cdots v_k\rangle$ を含む n 単体 $\langle v_0 \cdots v_n\rangle$ について、$\tau_\ell = \langle v_0 \cdots v_\ell\rangle$ として、$\langle v_0 \cdots v_n\rangle$ が正の単体ならば、$\langle b_{\tau_k} \cdots b_{\tau_n}\rangle$ の向きと同じ単体を考え、$\langle v_0 \cdots v_n\rangle$ が負の単体ならば、$\langle b_{\tau_k} \cdots b_{\tau_n}\rangle$ の向きと逆向きの単体を考えた和をとる。

$$\langle v_0 \cdots v_k\rangle^* = \sum_{\langle v_0 \cdots v_k\rangle \subset \langle v_0 \cdots v_n\rangle} \mathrm{sign}(\langle v_0 \cdots v_n\rangle)\langle b_{\tau_k} \cdots b_{\tau_n}\rangle$$

を考えると、

$$\begin{aligned}
\partial\langle v_0 \cdots v_{k-1}\rangle^* &= \sum_{\langle v_0 \cdots v_{k-1}\rangle \subset \langle v_0 \cdots v_n\rangle} \mathrm{sign}(\langle v_0 \cdots v_n\rangle)\partial\langle b_{\tau_{k-1}} \cdots b_{\tau_n}\rangle \\
&= \sum_{\langle v_0 \cdots v_{k-1}\rangle \subset \langle v_0 \cdots v_k\rangle \subset \langle v_0 \cdots v_n\rangle} \mathrm{sign}(\langle v_0 \cdots v_n\rangle)\partial\langle b_{\tau_{k-1}} \cdots b_{\tau_n}\rangle \\
&= \sum_{\langle v_0 \cdots v_k\rangle \subset \langle v_0 \cdots v_n\rangle} \mathrm{sign}(\langle v_0 \cdots v_n\rangle)\partial\langle b_{\tau_k} \cdots b_{\tau_n}\rangle \\
&= \sum_{\langle v_0 \cdots v_k\rangle \subset \langle v_0 \cdots v_n\rangle} \langle v_0 \cdots v_k\rangle^*
\end{aligned}$$

$\partial : C_k(K) \longrightarrow C_{k-1}(K)$ を表す行列を $A = (a_{ij})_{i=1,\ldots,n_{k-1};j=1,\ldots,n_k}$ とする、すなわち $\partial\sigma_j^k = \displaystyle\sum_{i=1}^{n_{k-1}} a_{ij}\sigma_i^{k-1}$ $(\ell = 1, \ldots, n_k)$ とすると、$\partial : C_{n-k+1}(K^*) \longrightarrow C_{n-k}(K^*)$ を表す行列は $(-1)^k\,{}^tA = ((-1)^k a_{ji})_{j=1,\ldots,n_k;i=1,\ldots,n_{k-1}}$ となる。この行列は、$(-1)^k\delta : C^{k-1} \longrightarrow C^k$ を表すものである。

従って、$H_{n-k}(K^*) \cong H^k(K)$ となる。この同型は任意の係数で成り立つ。

従って、M が向き付け可能のとき $H_{n-k}(M) \cong H^k(M)$ が成立する。

28 閉微分形式のポアンカレ双対

定理 28.1 M をコンパクト向き付け可能多様体とする。$p + q = n$ のとき、閉 p 形式 α, 閉 q 形式 β に対し、$\displaystyle\int_M \alpha \wedge \beta = \int_{PD(\alpha)} \beta$ が成立する。

定理 28.2 M をコンパクト向き付け可能多様体とする。$p + q = n$ のとき $\wedge : H^p_{DR}(M) \otimes H^q_{DR}(M) \longrightarrow H^n_{DR}(M)$ は非退化双 1 次形式である。特に、$\dim H^p_{DR}(M) = \dim H^q_{DR}(M)$.

さて、$\boldsymbol{R}$ 係数のホモロジー・コホモロジーを考えると $\dim H_{n-k}(M) = \dim H^{n-k}(M)$ であった。ドラームコホモロジー群について、$\wedge : H^{n-k}_{DR}(M) \times H^k_{DR}(M) \longrightarrow H^n_{DR}(M)$ が定義され、向き付けられた多様体において $H^n_{DR}(M) \cong \boldsymbol{R}$ であり、$\displaystyle\int_M : H^n_{DR}(M) \longrightarrow \boldsymbol{R}$ が同型を与えていた。従って、閉 $n-k$ 形式 α, 閉 k 形式 β に対して $(\alpha, \beta) \longmapsto \displaystyle\int_M \alpha \wedge \beta \in \boldsymbol{R}$ が考えられるが、これは、$H^{n-k}_{DR}(M) \times H^k_{DR}(M)$ 上の非退化な双 1 次形式となることが、次の式からわかる。閉 $n-k$ 形式 α が定める K^* の $n-k$ コサイクルの双対 k サイクルを $PD(\alpha)$ と書くと、

$$\int_M \alpha \wedge \beta = \int_{PD(\alpha)} \beta.$$

計算により次を示すことが出来る。

$I=\{i_0,\dots,i_p\}$ $(i_0<\dots<i_p)$, $J=\{j_0,\dots,j_q\}$ $(j_0<\dots<j_q)$, $L=\{\ell_0,\dots,\ell_n\}$ $(\ell_0<\dots<\ell_n)$ とし、$I\subset L$, $J\subset L$ とする。$n=p+q$ とする。n 単体 $\sigma=\langle e_{\ell_0}\cdots e_{\ell_n}\rangle$ 上の微分形式

$$\omega_{i_0\cdots i_p}=p!\sum_{s=0}^{p}(-1)^s t_{i_s}\,\mathrm{d}t_{i_0}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}t_{i_{s-1}}\wedge\mathrm{d}t_{i_{s+1}}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}t_{i_p},$$

$$\omega_{j_0\cdots j_q}=q!\sum_{s=0}^{q}(-1)^r t_{j_r}\,\mathrm{d}t_{j_0}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}t_{j_{r-1}}\wedge\mathrm{d}t_{j_{r+1}}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}t_{j_q}$$

に対し、$\{i_0,\dots,i_p\}\cap\{j_0,\dots,j_q\}$ が２つ以上の元を持てば、$\omega_{i_0\cdots i_p}\wedge\omega_{j_0\cdots j_q}=0$. $\{i_0,\dots,i_p\}\cap\{j_0,\dots,j_q\}$ が丁度１つの元 $i_s=j_r$ $(=\ell_{s+r})$ のとき、

$$\begin{aligned}&\int_\sigma\omega_{i_0\cdots i_p}\wedge\omega_{j_0\cdots j_q}\\ &=(-1)^{s+r}\operatorname{sign}\begin{pmatrix}\ell_0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ell_n\\ i_si_0\cdots i_{s-1}i_{s+1}\cdots i_pj_0\cdots j_{r-1}j_{r+1}\cdots j_q\end{pmatrix}\frac{p!q!}{n!}.\end{aligned}$$

証明　$I\cap J$ が３つ以上の元を持てば、$(I\setminus\{i_s\})\cap(J\setminus\{j_r\})$ の元 ℓ が、$t_{i_s}\,\mathrm{d}t_{i_0}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}t_{i_{s-1}}\wedge\mathrm{d}t_{i_{s+1}}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}t_{i_p}$, $t_{j_r}\,\mathrm{d}t_{j_0}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}t_{j_{r-1}}\wedge\mathrm{d}t_{j_{r+1}}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}t_{j_q}$ の両方に現われ, $\omega_I\wedge\omega_J=0$ となる。

$I\cap J$ が丁度２つの元からなるとする。それらを $i_s=j_r<i_{s'}=j_{r'}$ とすると、

$$\begin{aligned}&\omega_I\wedge\omega_J\\ &=p!q!(-1)^{s+r'}t_{i_s}t_{j_{r'}}\,\mathrm{d}t_{i_0}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}t_{i_{s-1}}\wedge\mathrm{d}t_{i_{s+1}}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}t_{i_p}\\ &\qquad\qquad\wedge\mathrm{d}t_{j_0}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}t_{j_{r'-1}}\wedge\mathrm{d}t_{j_{r'+1}}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}t_{j_q}\\ &\quad+p!q!(-1)^{s'+r}t_{i_{s'}}t_{j_r}\,\mathrm{d}t_{i_0}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}t_{i_{s'-1}}\wedge\mathrm{d}t_{i_{s'+1}}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}t_{i_p}\\ &\qquad\qquad\wedge\mathrm{d}t_{j_0}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}t_{j_{r-1}}\wedge\mathrm{d}t_{j_{r+1}}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}t_{j_q}\end{aligned}$$

最初の項の n 次の外積について j_r を i_s に持ってくる符号の変化は $(-1)^{r+p-s}$, ２番目の項の $j_{r'}$ を $i_{s'}$ に持ってくる符号の変化は $(-1)^{r'-1+p-s'}$ である。従って $\mathrm{d}t_{i_0}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}t_{i_p}\wedge\mathrm{d}t_{j_0}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}t_{j_{r-1}}\wedge\mathrm{d}t_{j_{r+1}}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}t_{i_{r'-1}}\wedge\mathrm{d}t_{i_{r'+1}}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}t_{j_q}$ のように外積をそろえると、最初の項の符号は $(-1)^{s+r}(-1)^{r+p-s}=(-1)^p$, ２番目の項の符号は $(-1)^{s'+r'}(-1)^{r'-1+p-s'}=(-1)^{p-1}$ である。従って $\omega_I\wedge\omega_J=0$ となる。

$I\cap J$ がただ１つの元 $i_s=j_r$ であるとする。

$$\begin{aligned}&\omega_I\wedge\omega_J\\ &=p!q!(-1)^{s+r}t_{i_s}t_{j_r}\,\mathrm{d}t_{i_0}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}t_{i_{s-1}}\wedge\mathrm{d}t_{i_{s+1}}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}t_{i_p}\\ &\qquad\qquad\wedge\mathrm{d}t_{j_0}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}t_{j_{r-1}}\wedge\mathrm{d}t_{j_{r+1}}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}t_{j_q}\\ &\quad+p!q!\sum_{k\neq r}(-1)^{s+k}t_{i_s}t_{j_k}\,\mathrm{d}t_{i_0}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}t_{i_{s-1}}\wedge\mathrm{d}t_{i_{s+1}}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}t_{i_p}\\ &\qquad\qquad\wedge\mathrm{d}t_{j_0}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}t_{j_{k-1}}\wedge\mathrm{d}t_{j_{k+1}}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}t_{j_q}\\ &\quad+p!q!\sum_{k\neq s}(-1)^{k+r}t_{i_k}t_{j_r}\,\mathrm{d}t_{i_0}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}t_{i_{k-1}}\wedge\mathrm{d}t_{i_{k+1}}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}t_{i_p}\\ &\qquad\qquad\wedge\mathrm{d}t_{j_0}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}t_{j_{r-1}}\wedge\mathrm{d}t_{j_{r+1}}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}t_{j_q}\end{aligned}$$

第２項の $\mathrm{d}t_{j_r}$ に $-\sum_{\ell\neq j_r}\mathrm{d}\,t_\ell$, 第３項の $\mathrm{d}t_{i_s}$ に $-\sum_{\ell\neq i_s}\mathrm{d}\,t_\ell$ を代入すると、

$$
\begin{aligned}
&\omega_I\wedge\omega_J\\
&=p!q!\{(-1)^{s+r}t_{i_s}t_{j_r}+\sum_{k\neq r}(-1)^{s+k+r-k}t_{i_s}t_{j_k}+\sum_{k\neq s}(-1)^{k+r+s-k}t_{i_k}t_{j_r}\}\\
&\qquad\cdot\mathrm{d}t_{i_0}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}t_{i_{s-1}}\wedge\mathrm{d}t_{i_{s+1}}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}t_{i_p}\wedge\mathrm{d}t_{j_0}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}t_{j_{r-1}}\wedge\mathrm{d}t_{j_{r+1}}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}t_{j_q}\\
&=(-1)^{s+r}p!q!t_{i_s}\,\mathrm{d}t_{i_0}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}t_{i_{s-1}}\wedge\mathrm{d}t_{i_{s+1}}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}t_{i_p}\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\wedge\mathrm{d}t_{j_0}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}t_{j_{r-1}}\wedge\mathrm{d}t_{j_{r+1}}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}t_{j_q}
\end{aligned}
$$

ここで、$\int_{\langle e_{i_0}\cdots e_{i_n}\rangle}(-1)^\ell t_{i_\ell}\,\mathrm{d}t_{i_0}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}t_{i_{\ell-1}}\wedge\mathrm{d}t_{i_{\ell+1}}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}t_{j_n}=\dfrac{1}{(n+1)!}$ である。実際、この積分は

$$
\begin{aligned}
&\int_{\Delta^n}(-1)^\ell(x_\ell-x_{\ell+1})\,\mathrm{d}(1-x_1)\wedge(x_1-x_2)\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}(x_{\ell-1}-x_\ell)\\
&\qquad\qquad\wedge\mathrm{d}(x_{\ell+1}-x_{\ell+2})\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}(x_n-x_{n-1})\wedge\mathrm{d}(x_n)\\
&=\int_{\Delta^n}(-1)^\ell(x_\ell-x_{\ell+1})(-1)^\ell\,\mathrm{d}x_1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{\ell-1}\wedge\mathrm{d}x_\ell\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_n\\
&=\int_{x_1=0}^{1}\Bigl(\int_{x_2=0}^{x_1}\Bigl(\cdots\Bigl(\int_{x_n=0}^{x_{n-1}}(x_\ell-x_{\ell+1})\,\mathrm{d}x_n\Bigr)\cdots\Bigr)\,\mathrm{d}x_2\Bigr)\,\mathrm{d}x_1\\
&=\frac{n-\ell+1}{(n+1)!}-\frac{n-\ell}{(n+1)!}=\frac{1}{(n+1)!}
\end{aligned}
$$

従って、$i_s=j_r=\ell_{s+k}$ に注意すると

$$
\begin{aligned}
&\int_\sigma\omega_I\wedge\omega_J\\
&=\mathrm{sign}\begin{pmatrix}\ell_0\cdots\cdots\ell_{s+r-1}\ell_{s+r+1}\cdots\cdots\ell_n\\ i_0\cdots i_{s-1}i_{s+1}\cdots i_pj_0\cdots j_{r-1}j_{r+1}\cdots j_q\end{pmatrix}\\
&\qquad\cdot\int_\sigma(-1)^{s+r}p!q!t_{\ell_{s+r}}\,\mathrm{d}t_{\ell_0}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}t_{\ell_{s+r-1}}\wedge\mathrm{d}t_{\ell_{s+r+1}}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}t_{\ell_n}\\
&=\mathrm{sign}\begin{pmatrix}\ell_0\cdots\cdots\ell_{s+r-1}\ell_{s+r+1}\cdots\cdots\ell_n\\ i_0\cdots i_{s-1}i_{s+1}\cdots i_pj_0\cdots j_{r-1}j_{r+1}\cdots j_q\end{pmatrix}\frac{p!q!}{(n+1)!}
\end{aligned}
$$

■

次を示す。$|L|=n,\ |I|=|K|=p,\ |J|=q,\ p+q=n,\ I\subset L,\ J\subset L,\ K\subset L$ とするとき、

$$\langle\omega_I,\sum_K\langle\omega_J,e_K{}^*\rangle e_K\rangle=\langle\omega_I\wedge\omega_J,e_L\rangle.$$

右辺の値は分かっている。右辺の値は $\#(I\cap J)\geqq 2$ ならば 0 である。左辺は、$\sum_K\langle\omega_I,e_K\rangle\langle\omega_J,e_K{}^*\rangle$ に等しい。ここで、$K=I$ ならば、$\langle\omega_I,e_K\rangle=1$ となるが、$K\neq I$ ならば、$\langle\omega_I,e_K\rangle=0$ である。なぜならば、$\omega_I=p!\sum_{u=0}^{p}t_{i_u}\,\mathrm{d}\,t_{i_0}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}\,t_{i_{u-1}}\wedge\mathrm{d}\,t_{i_{u+1}}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}\,t_{i_p}$ について、$\omega_I|e_K$ は、$K\cap I$ を添え字とする重心座標で書かれているからである。従って $\sum_I\langle\omega_I,e_K\rangle\langle\omega_J,e_K{}^*\rangle=\langle\omega_J,e_I{}^*\rangle$.
示すべき式は

$$\langle\omega_J,e_I^*\rangle=\langle\omega_I\wedge\omega_J,e_L\rangle.$$

p 単体 $e_I=\langle e_{i_0}\cdots e_{i_p}\rangle$ $(i_0<\cdots<i_p)$ と q 単体 $e_J=\langle e_{j_0}\cdots e_{j_q}\rangle$ $(j_0<\cdots<j_p)$ が、頂点を１つ共有している（$i_s=j_r$）とする。今後は、$|I|=p$, $|J|=|K|=q$ とする。$k_0=i_s$ とする $j_0\cdots j_q$ の置換 $K=k_0\cdots k_q$ をとり、$e_K=\langle e_{k_0}\cdots e_{k_q}\rangle=\mathrm{sign}\begin{pmatrix}j_0\cdots j_q\\ k_0\cdots k_q\end{pmatrix}\langle e_{j_0}\cdots e_{j_q}\rangle$ とおく。

$\langle e_{i_0}\cdots e_{i_p}\rangle^*$ の単体を記述する。$w=0,\dots,q$ に対し $\tau_{p+w}=\langle e_{i_0}\cdots e_{i_p}e_{k_1}\cdots e_{k_w}\rangle$ とする。$e_{k_0}=e_{i_s}$ なので、$\tau_p=\langle e_{i_0}\cdots e_{i_p}\rangle$ となっている。単体 τ_{p+w} の重心は

$$b_{\tau_{p+w}}=\frac{1}{p+w+1}(\sum_{u=0}^{p}e_{i_u}+\sum_{v=1}^{w}e_{k_v})$$

となる。

従って

$$\begin{aligned}&b_{\tau_{p+w}}-b_{\tau_{p+w-1}}\\=&\frac{1}{p+w+1}(\sum_{u=0}^{p}e_{i_u}+\sum_{v=1}^{w}e_{k_v})-\frac{1}{p+w}(\sum_{u=0}^{p}e_{i_u}+\sum_{v=1}^{w-1}e_{k_v})\\=&-\frac{1}{(p+w)(p+w+1)}(\sum_{u=0}^{p}e_{i_u}+\sum_{v=1}^{w-1}e_{k_v})+\frac{1}{p+w+1}e_{k_w}\end{aligned}$$

であり、$\langle b_{\tau_p}\cdots b_{\tau_{p+q}}\rangle$ に沿う積分は

$$\begin{aligned}(x_1,\dots,x_q)\longmapsto\frac{1}{p+1}\sum_{u=0}^{p}e_{i_u}&\\+x_1(-\frac{1}{(p+1)(p+2)}(\sum_{u=0}^{p}e_{i_u})+\frac{1}{p+2}e_{k_1})&\\+x_2(-\frac{1}{(p+2)(p+3)}(\sum_{u=0}^{p}e_{i_u}+e_{k_1})+\frac{1}{p+3}e_{k_2})&\\+\cdots+x_q(-\frac{1}{(p+q)(p+q+1)}(\sum_{u=0}^{p}e_{i_u}+\sum_{v=1}^{q-1}e_{k_v})+\frac{1}{p+q+1}e_{k_q})&\end{aligned}$$

により Δ^q に引き戻した積分である。

$$\begin{aligned}t_{i_0}=\cdots=t_{i_p}=t_{k_0}&=\frac{1}{p+1}-\frac{x_1}{(p+1)(p+2)}-\cdots-\frac{x_q}{(p+q)(p+q+1)}\\t_{k_1}&=\frac{x_1}{p+2}-\frac{x_2}{(p+2)(p+3)}-\cdots-\frac{x_q}{(p+q)(p+q+1)}\\t_{k_2}&=\frac{x_2}{p+3}-\frac{x_3}{(p+3)(p+4)}-\cdots-\frac{x_q}{(p+q)(p+q+1)}\\\cdots&=\cdots\\t_{k_q}&=\frac{x_q}{p+q+1}\end{aligned}$$

だから、まず、$(p+1)t_{k_0}+\sum_{v=1}^{q}t_{k_v}=1$ である。従って、$\mathrm{d}\,t_{k_0}=-\sum_{v=1}^{q}\frac{\mathrm{d}\,t_{k_v}}{p+1}$ に注意して、

$$\begin{aligned}\omega_J&=q!\sum_{w=0}^{q}(-1)^w t_{k_w}\,\mathrm{d}\,t_{k_0}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}\,t_{k_{w-1}}\wedge\mathrm{d}\,t_{k_{w+1}}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}\,t_{k_q}\\&=q!\big(t_{k_0}\,\mathrm{d}\,t_{k_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}\,t_{k_q}+\frac{1}{p+1}\sum_{w=1}^{q}t_{k_w}\,\mathrm{d}\,t_{k_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}\,t_{k_q}\big)\\&=\frac{q!}{p+1}\big((p+1)t_{k_0}+\sum_{w=1}^{q}t_{k_w}\big)\,\mathrm{d}\,t_{k_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}\,t_{k_q}\\&=\frac{q!}{p+1}\,\mathrm{d}\,t_{k_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}\,t_{k_q}\\&=\frac{q!}{p+1}\frac{\mathrm{d}\,x_1}{p+2}\wedge\cdots\wedge\frac{\mathrm{d}\,x_q}{p+q+1}\end{aligned}$$

ゆえに

$$\int_{\langle b_{\tau_p}\cdots b_{\tau_{p+q}}\rangle}\omega_{k_0\cdots k_q}=\int_{\Delta^q}\frac{q!}{p+1}\frac{\mathrm{d}\,x_1}{p+2}\wedge\cdots\wedge\frac{\mathrm{d}\,x_q}{p+q+1}=\frac{p!}{(p+q+1)!}$$

ここで、$\omega_{k_0\cdots k_q} = \operatorname{sign}\binom{K}{J}\omega_{j_0\cdots j_q}$ であるから、

$$\begin{aligned}\int_{\langle b_{\tau_p}\cdots b_{\tau_{p+q}}\rangle}\omega_{j_0\cdots j_q} &= \operatorname{sign}\binom{K}{J}\frac{p!}{(p+q+1)!}\\ &= (-1)^r \operatorname{sign}\binom{K\setminus\{k_0\}}{J\setminus\{j_r\}}\frac{p!}{(p+q+1)!}\end{aligned}$$

を得る。

$\langle e_{\ell_0}\cdots e_{\ell_n}\rangle$ における $\langle e_{i_0}\cdots e_{i_p}\rangle^*$ を考えると、$I\cap K = \{i_s\}$ となる K について、$\ell_0\cdots\ell_n$ の置換 $e_{i_0}\cdots e_{i_p}k_1\cdots k_q$ に対して、$\tau_p \prec \tau_{p+1} \prec \cdots \prec \tau_{p+q}$ をとり、次の和として書かれる。

$$\langle e_{i_0}\cdots e_{i_p}\rangle^* = \sum_{k_1\cdots k_q}\operatorname{sign}(\langle e_{i_0}\cdots e_{i_p}e_{k_1}\cdots e_{k_q}\rangle)\langle b_{\tau_p}b_{\tau_{p+1}}\cdots b_{\tau_{p+q}}\rangle$$

従って、

$$\begin{aligned}&\int_{\langle e_{i_0}\cdots e_{i_p}\rangle^*}\omega_J\\ &= \sum_{k_1\cdots k_q}\operatorname{sign}(\langle e_{i_0}\cdots e_{i_p}e_{k_1}\cdots e_{k_q}\rangle)(-1)^r\operatorname{sign}\binom{K\setminus\{k_0\}}{J\setminus\{j_r\}}\frac{p!}{(p+q+1)!}\\ &= \sum_{k_1\cdots k_q}(-1)^r\operatorname{sign}\binom{\ell_0\cdots\ell_{p+q}}{i_0\cdots i_p j_0\cdots j_{r-1}j_{r+1}\cdots j_q}\frac{p!}{(p+q+1)!}\\ &= \operatorname{sign}\binom{\ell_0\cdots\ell_{s+r-1}\ell_{s+r+1}\ell_{p+q}}{i_0\cdots i_{s-1}i_{s+1}\cdots i_p j_0\cdots j_{r-1}j_{r+1}\cdots j_q}\frac{p!q!}{(p+q+1)!}\end{aligned}$$

こうして、$\displaystyle\int_{\langle e_{i_0}\cdots e_{i_p}\rangle^*}\omega_J = \int_{\langle e_{\ell_0}\cdots e_{\ell_{p+q}}\rangle}\omega_I\wedge\omega_J$ が示された。