12　ファンクターという見方

２つの C^∞ 級多様体の間では、C^∞ 級写像を考えるのが自然である。C^∞ 級多様体全体を「対象」(object) とし、C^∞ 級写像全体を「射」(morphism) とする「圏」(category) を考えている。射 $F_1 : M_1 \longrightarrow M_2$, $F_2 : M_2 \longrightarrow M_3$ に対して結合 $F_2 \circ F_1 : M_1 \longrightarrow M_3$ が定義され、射のなかに恒等写像 $\mathrm{id}_M : M \longrightarrow M$ がある。

２つのベクトル空間の間では、線形写像を考えるのが自然であり、ベクトル空間全体を「対象」とし、線形写像全体を「射」とする「圏」を考えることができる。射 $A_1 : V_1 \longrightarrow V_2$, $A_2 : V_2 \longrightarrow V_3$ に対して結合 $A_2 \circ A_1 : V_1 \longrightarrow V_3$ が定義され、射のなかに恒等写像 $\mathrm{id}_V : V \longrightarrow V$ がある。

さらに、２つのコチェイン複体の間では、コチェイン写像を考えるのが自然であり、コチェイン複体全体を「対象」とし、コチェイン写像全体を「射」とする「圏」が考えられる。

命題 10.7, 命題 11.7 により、微分形式を対応させる対応は、(C^∞ 級多様体, C^∞ 級写像) の圏から、(コチェイン複体, コチェイン写像) の圏への反変 (contravariant) 関手 (functor) となる。関手とは、対象 M に対象 $\Omega^*(M)$ を対応させ、射 $F : M \longrightarrow N$ に射 $F^* : \Omega^*(N) \longrightarrow \Omega^*(M)$ を対応させるもので結合について $(F_2 \circ F_1)^* = F_1{}^* F_2{}^*$ を満たすという意味である。反変という語は、写像の向きが F と F^* で M, N について逆になっていることを述べている。

p 次コホモロジー群をとる対応は、(コチェイン複体, コチェイン写像) の圏から、(ベクトル空間, 線形写像) の圏への同変関手となる。すなわち、$F^* : \Omega^*(N) \longrightarrow \Omega^*(M)$ に対して、$F^* : H^p_{DR}(N) \longrightarrow H^p_{DR}(M)$ を得る。

この２つの対応の結合は、(C^∞ 級多様体, C^∞ 級写像) の圏から (ベクトル空間, 線形写像) の圏への反変関手である。これが、定理 11.8 である。

さて、このことをこのことから、２つの多様体 M, N が微分同相ならば, $H^p_{DR}(M)$, $H^p_{DR}(N)$ は同型であることがわかる。

さらに強く命題 11.14 から次がいえる。２つの多様体 M, N に対して、C^∞ 級写像 $f : M \longrightarrow N$, $g : N \longrightarrow M$ で、$f \circ g$ と id_N が C^∞ ホモトピック、$g \circ f$ と id_M も C^∞ ホモトピックとなるものがあれば、$H^p_{DR}(M)$, $H^p_{DR}(N)$ は同型である。

注意 12.1　ここの f, g は実は連続写像であってもよい。連続写像は C^∞ 級写像で近似できるからである。結局、ホモトピー同値な２つの多様体のドラーム・コホモロジー群は同形となる。

従って、ドラームコホモロジー群を計算することにより、２つの多様体が異なることを示すことが可能である。次の節のマイヤー・ビエトリス完全列は、ドラーム・コホモロジー群の計算の方法を与える。

13　マイヤー・ビエトリス完全列

M_1, M_2 をコンパクト多様体 M の開集合で $M = M_1 \cup M_2$ を満たすものとする.

$M_{12}=M_1\cap M_2$ とおき,

$$\begin{array}{ccccc} & & M_1 & & \\ & {\scriptstyle i_1}\nearrow & & \searrow{\scriptstyle j_1} & \\ M_{12} & & & & M \\ & {\scriptstyle i_2}\searrow & & \nearrow{\scriptstyle j_2} & \\ & & M_2 & & \end{array}$$

を包含写像とする.

このとき、次の命題が成立する。

命題 13.1 次の列は完全である。

$$0 \longrightarrow \Omega^p(M) \xrightarrow{(j_1^*,j_2^*)} \Omega^p(M_1)\oplus\Omega^p(M_2) \xrightarrow{i_1^*-i_2^*} \Omega^p(M_{12}) \longrightarrow 0$$

証明 (j_1^*,j_2^*) が単射であること、$(i_1^*-i_2^*)\circ(j_1^*,j_2^*)=0$ であることは写像の意味を考えればすぐにわかる。

$i_1^*-i_2^*$ が全射であることは、次のように示す。

M_1, M_2 に対し、開集合 V_1, V_2 で、$\overline{V_1}\subset M_1$, $\overline{V_2}\subset M_2$, $V_1\cup V_2=M$ であるものをとる。定理 8.4 により、M 上の C^∞ 級関数 λ_1 を $1\leqq\lambda_1\leqq 1$, $\lambda_1|(M\backslash V_2)=1, \operatorname{supp}\lambda_1\subset V_1$. を満たすようにとることができる。$\lambda_2=1-\lambda_1$ とすると、$\{\lambda_1,\lambda_2\}$ は M の開被覆 $\{M_1,M_2\}$ に従属した 1 の分割となる。

λ_2 の台は M_2 のコンパクト部分集合だから $M\setminus M_2$ の近傍で $\lambda_2=0$ である。$\alpha\in\Omega^p(M_{12})$ に対して、$\lambda_2\alpha$ を考えるとこれは、$M\setminus M_2$ に 0 となるように拡張して、$M_{12}\cup(M\setminus M_2)=M_1$ 上の微分 p 形式と見ることができる：$\lambda_2\alpha\in\Omega^p(M_1)$. 同様に、$-\lambda_1\alpha\in\Omega^p(M_2)$ と考えられる。このとき、

$$(i_1^*-i_2^*)(\lambda_2\alpha,-\lambda_1\alpha)=\lambda_2\alpha+\lambda_1\alpha=\alpha$$

となる。 ■

命題 11.7 により外微分 d と引き戻しは可換だから次は可換図式となる。

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & \mathrm{d}\uparrow & & \mathrm{d}\uparrow & & \mathrm{d}\uparrow & & \\
0 & \longrightarrow & \Omega^{p+1}(M) & \xrightarrow{(j_1^*,j_2^*)} & \Omega^{p+1}(M_1)\oplus\Omega^{p+1}(M_2) & \xrightarrow{i_1^*-i_2^*} & \Omega^{p+1}(M_{12}) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \mathrm{d}\uparrow & & \mathrm{d}\uparrow & & \mathrm{d}\uparrow & & \\
0 & \longrightarrow & \Omega^{p}(M) & \xrightarrow{(j_1^*,j_2^*)} & \Omega^{p}(M_1)\oplus\Omega^{p}(M_2) & \xrightarrow{i_1^*-i_2^*} & \Omega^{p}(M_{12}) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \mathrm{d}\uparrow & & \mathrm{d}\uparrow & & \mathrm{d}\uparrow & & \\
0 & \longrightarrow & \Omega^{p-1}(M) & \xrightarrow{(j_1^*,j_2^*)} & \Omega^{p-1}(M_1)\oplus\Omega^{p-1}(M_2) & \xrightarrow{i_1^*-i_2^*} & \Omega^{p-1}(M_{12}) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \mathrm{d}\uparrow & & \mathrm{d}\uparrow & & \mathrm{d}\uparrow & &
\end{array}$$

M_{12} 上の p 次閉微分形式 α に対し, M_1 上の p 次微分形式 α_1 と M_2 上の p 次微分形式 α_2 とを $i_1^*\alpha_1-i_2^*\alpha_2=\alpha$ となるように取り, M_1 上の $p+1$ 次微分形式 $\mathrm{d}\,\alpha_1$ と M_2 上の $p+1$ 次微分形式 $\mathrm{d}\,\alpha_2$ とを考えると, これらは M_{12} 上で一致し, M 上の $p+1$ 次閉微分形式 β を定める. これにより、線型写像 $\Delta^*: H^p(M_{12})\longrightarrow H^{p+1}(M)$ が定まる.

命題 13.2 *(1)* M 上の $p+1$ 次閉微分形式 β のコホモロジー類 $[\beta]$ は、α に対する α_1, α_2 の取り方によらない。

(2) α が完全微分形式のとき、β も完全微分形式となる。

証明　(1) α_1', α_2' が $i_1^*\alpha_1' - i_2^*\alpha_2' = \alpha$ を満たすとする。$i_1^*(\alpha_1 - \alpha_1') - i_2^*(\alpha_2 - \alpha_2') = 0$ だから命題 13.1 により、$\gamma \in \Omega^p(M)$ で $(j_1^*, j_2^*)\gamma = (\alpha_1 - \alpha_1', \alpha_2 - \alpha_2')$ を満たすものがある。M_1 上の $p+1$ 次微分形式 $\mathrm{d}\,\alpha_1'$ と M_2 上の $p+1$ 次微分形式 $\mathrm{d}\,\alpha_2'$ が M_{12} 上で一致することにより定まる M 上の閉微分形式 β' に対して、$\beta - \beta' = \mathrm{d}\,\gamma$ となる。

(2) $\alpha = \mathrm{d}\,\eta$ とすると、$i_1^*\eta_1 - i_2^*\eta_2 = \eta$ となる $\eta_1 \in \Omega^{p-1}(M_1)$, $\eta_2 \in \Omega^{p-1}(M_2)$ がとれる。$\alpha_1 = \mathrm{d}\,\eta_1$, $\alpha_2 = \mathrm{d}\,\eta_2$ ととることができるので、$\mathrm{d}\,\alpha_1 = 0$, $\mathrm{d}\,\alpha_2 = 0$ となり、$\beta = 0$ と取れることになる。これは (1) の結果により、どのような α_1, α_2 をとっても β は完全形式になることを言っている。 ■

定理 13.3 (マイヤー・ビエトリス完全列) 次の列は完全列となる

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & & \cdots & \xrightarrow{i_1^*-i_2^*} & H^{p-1}(M_{12}) \\
\xrightarrow{\Delta^*} & H^p(M) & \xrightarrow{(j_1^*,j_2^*)} & H^p(M_1)\oplus H^p(M_2) & & \xrightarrow{i_1^*-i_2^*} & H^p(M_{12}) \\
\xrightarrow{\Delta^*} & H^{p+1}(M) & \xrightarrow{(j_1^*,j_2^*)} & \cdots & & &
\end{array}
$$

証明　1) $\Delta^*(i_1^* - i_2^*) = 0$ を示す。閉形式の対 $(\alpha_1, \alpha_2) \in \Omega^p(M_1) \oplus \Omega^p(M_2)$ に対し、$\alpha_{12} = i_1^*\alpha_1 - i_2^*\alpha_2 \in \Omega^p(M_{12})$ が得られている。α_{12} に対し、(α_1, α_2) をとれば、$(\mathrm{d}\,\alpha_1, \mathrm{d}\,\alpha_2) = (0, 0)$ だから、$\Delta^*(i_1^* - i_2^*) = 0$ である。

2) $(j_1^*, j_2^*)\Delta^* = 0$ を示す。閉形式 $\alpha_{12} \in \Omega^p(M_{12})$ に対し、$\alpha_{12} = i_1^*\alpha_1 - i_2^*\alpha_2$ となる $(\alpha_1, \alpha_2) \in \Omega^p(M_1) \oplus \Omega^p(M_2)$ をとり、$(\mathrm{d}\,\alpha_1, \mathrm{d}\,\alpha_2) = (j_1^*\alpha, j_2^*\alpha)$ とする閉形式 α のコホモロジー類を対応させるのが Δ^* であるが、$(\mathrm{d}\,\alpha_1, \mathrm{d}\,\alpha_2) = (j_1^*\alpha, j_2^*\alpha)$ は、$(j_1^*, j_2^*)\Delta^* = 0$ を意味している。

3) $(i_1^* - i_2^*)(j_1^*, j_2^*) = 0$ は、$(i_1^* - i_2^*)(j_1^*, j_2^*)\alpha = i_1^*j_1^*\alpha - i_2^*j_2^*\alpha = 0$ からわかる。

4) $\ker \Delta^* \subset \mathrm{im}(i_1^* - i_2^*)$ を示す。次の図式を参照せよ。

$$
\begin{array}{ccccc}
\alpha & \xmapsto{(j_1^*,j_2^*)} & (\mathrm{d}\,\alpha_1, \mathrm{d}\,\alpha_2) & \xmapsto{i_1^*-i_2^*} & 0 \\
\uparrow \mathrm{d} & & \uparrow \mathrm{d} & & \uparrow \mathrm{d} \\
\beta & & (\alpha_1, \alpha_2) & \xmapsto{i_1^*-i_2^*} & \alpha_{12} \\
 & & (\alpha_1 - j_1^*\beta, \alpha_2 - j_2^*\beta) & &
\end{array}
$$

閉形式 $\alpha_{12} \in \Omega^p(M_{12})$ に対し、$\alpha_{12} = i_1^*\alpha_1 - i_2^*\alpha_2$ となる $(\alpha_1, \alpha_2) \in \Omega^p(M_1) \oplus \Omega^p(M_2)$ をとり、$(\mathrm{d}\,\alpha_1, \mathrm{d}\,\alpha_2) = (j_1^*\alpha, j_2^*\alpha)$ とする閉形式 α に対し、$\alpha = \mathrm{d}\,\beta$ とする $\beta \in \Omega^p(M)$ があるとする。$(\mathrm{d}\,\alpha_1, \mathrm{d}\,\alpha_2) = (j_1^*\,\mathrm{d}\,\beta, j_2^*\,\mathrm{d}\,\beta) = (\mathrm{d}\,j_1^*\beta, \mathrm{d}\,j_2^*\beta)$ だから、$(\alpha_1 - j_1^*\beta, \alpha_2 - j_2^*\beta)$ は閉形式の対である。$i_1^*(\alpha_1 - j_1^*\beta) - i_2^*(\alpha_2 - j_2^*\beta) = i_1^*\alpha_1 - i_2^*\alpha_2 = \alpha_{12}$ となり、$[\alpha_{12}] = (i_1^* - i_2^*)([\alpha_1 - j_1^*\beta], [\alpha_2 - j_2^*\beta])$ となる。

5) $\ker(j_1^*, j_2^*) \subset \mathrm{im}\,\Delta^*$ を示す。$(j_1^*\alpha, j_2^*\alpha) = (\mathrm{d}\,\beta_1, \mathrm{d}\,\beta_2)$ とする。$i_1^*\beta_1 - i_2^*\beta_2 = \alpha_{12}$ とおくと、$\mathrm{d}\,\alpha_{12} = \mathrm{d}\,i_1^*\beta_1 - \mathrm{d}\,i_2^*\beta_2 = i_1^*\,\mathrm{d}\,\beta_1 - \mathrm{d}\,i_2^*\,\mathrm{d}\,\beta_2 = i_1^*j_1^*\alpha - i_2^*j_2^*\alpha = 0$ であり、$[\alpha] = \Delta^*[\alpha_{12}]$ となる。

6) $\ker(i_1^* - i_2^*) \subset \mathrm{im}(j_1^*, j_2^*)$ を示す。次の図式を参照せよ。

$$
\begin{array}{ccccc}
\alpha & \xmapsto{(j_1^*,j_2^*)} & (\alpha_1 - \mathrm{d}\,\beta_1, \alpha_2 - \mathrm{d}\,\beta_2) & \xmapsto{i_1^*-i_2^*} & 0 \\
 & & (\alpha_1, \alpha_2) & & \alpha_{12} \\
 & & \uparrow \mathrm{d} & & \uparrow \mathrm{d} \\
 & & (\beta_1, \beta_2) & \xmapsto{i_1^*-i_2^*} & \beta_{12}
\end{array}
$$

閉形式の対 $(\alpha_1, \alpha_2) \in \Omega^p(M_1) \oplus \Omega^p(M_2)$ に対し、$i_1^*\alpha_1 - i_2^*\alpha_2 = \mathrm{d}\,\beta_{12}$ となる $\beta_{12} \in \Omega^{p-1}(M_{12})$ があるとする。$\beta_{12} = i_1^*\beta_1 - i_2^*\beta_2$ とする $(\beta_1, \beta_2) \in$

$\Omega^{p-1}(M_1)\oplus\Omega^{p-1}(M_2)$ をとる。$(\alpha_1-\mathrm{d}\,\beta_1,\alpha_2-\mathrm{d}\,\beta_2)$ に対して、$(i_1^*-i_2^*)(\alpha_1-\mathrm{d}\,\beta_1,\alpha_2-\mathrm{d}\,\beta_2)=0$ だから、$(j_1^*,j_2^*)\alpha=(\alpha_1-\mathrm{d}\,\beta_1,\alpha_2-\mathrm{d}\,\beta_2)$ となる α がある。(j_1^*,j_2^*) は単射だから $\mathrm{d}\,\alpha=0$ であることがわかる。 ■

14　球面のドラームコホモロジー

円周 $S^1=\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}$ を $M_1=\pi((0,1))$, $M_2=\pi((-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}))$ で被覆する。$M_{12}=M_1\cap M_2$ として、マイヤー・ビエトリス完全列を書き下すと、

$$0\longrightarrow H^0_{DR}(S^1)\longrightarrow H^0_{DR}(M_1)\oplus H^0_{DR}(M_2)\longrightarrow H^0_{DR}(M_{12})\longrightarrow H^1_{DR}(S^1)\longrightarrow 0$$

は次と同型である。

$$0\longrightarrow \boldsymbol{R}\longrightarrow \boldsymbol{R}\oplus\boldsymbol{R}\longrightarrow \boldsymbol{R}\oplus\boldsymbol{R}\longrightarrow H^1_{DR}(S^1)\longrightarrow 0$$

ここで H^0_{DR} は連結成分上定数であるような関数と同一視される。この列が完全であるから、$H^1_{DR}(S^1)\cong\boldsymbol{R}$ となる。

【問題 14.1】　$\nu_1:[0,\dfrac{1}{2}]\longrightarrow[0,1]$ を $[0,\dfrac{1}{6}]$ 上で 0, $[\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{2}]$ 上で 1 であるような C^∞ 級関数, $\nu_1:[\dfrac{1}{2},1]\longrightarrow[0,1]$ を $\nu_2(t)=\nu_1(t-\dfrac{1}{2})$ と定義する。ν_1, ν_2 とその導関数を使って、$\Delta^*:H^0_{DR}(M_{12})\longrightarrow H^1_{DR}(S^1)$ を記述せよ ($\Delta^*(a,b)$ を代表する 1 形式を書け)。

【解】　$\lambda_1=\begin{cases}\nu_1 & t\in[0,\frac{1}{2}]\\ 1-\nu_2 & t\in[\frac{1}{2},1]\end{cases}$, $\lambda_2=1-\lambda_1$ は M_1, M_2 に対する 1 の分割である。$f:M_{12}\longrightarrow\boldsymbol{R}$ を $\pi((0,\dfrac{1}{2}))$ 上で a, $\pi((\dfrac{1}{2},1))$ 上で b となる関数とする。$f_1=\lambda_2 f=\begin{cases}a(1-\nu_1) & t\in[0,\frac{1}{2}]\\ 1-\nu_2 & t\in[\frac{1}{2},1]\end{cases}$ は M_1 上の C^∞ 級関数, $f_2=-\lambda_1 f=\begin{cases}-a\nu_1 & t\in[0,\frac{1}{2}]\\ -b(1-\nu_2) & t\in[\frac{1}{2},1]\end{cases}$ は M_2 上の C^∞ 級関数で、$i_1^*f_1-i_2^*f_2=f$ となる。M_{12} 上で $\mathrm{d}\,f_1=\mathrm{d}\,f_2=-a\,\mathrm{d}\,\nu_1+b\,\mathrm{d}\,\nu_2$ となる $\alpha=-a\,\mathrm{d}\,\nu_1+b\,\mathrm{d}\,\nu_2=(-a\dfrac{\mathrm{d}\,\nu_1}{\mathrm{d}\,t}+b\dfrac{\mathrm{d}\,\nu_2}{\mathrm{d}\,t})\,\mathrm{d}t$ は S^1 上の微分 1 形式であり、$\Delta^*(a,b)=[\alpha]$ である。

注意 14.2　M_{12} 上の関数 f は $a=b$ のとき、$(i_1^*-i_2^*)(a,0)$ と一致し、$\Delta^*(a,a)=0$ となる。実際、$\alpha=d(a\lambda_2)$ と書かれる。$a\neq b$ のとき、$\Delta^*(a,b)$ は $H^1_{DR}(S^1)$ の基底である。また、$\displaystyle\int_0^1(-a\frac{\mathrm{d}\,\nu_1}{\mathrm{d}\,t}+b\frac{\mathrm{d}\,\nu_2}{\mathrm{d}\,t})\,\mathrm{d}t=b-a$ となり、ν_1, ν_2 のとりかたによらない。このコホモロジー類は $(b-a)\,\mathrm{d}t$ のコホモロジー類と一致する。

2 次元以上の球面のドラームコホモロジー群 $H^*_{DR}(S^k)$ $(k>1)$ は次のように計算される。

$H^0_{DR}(S^k)$ は S^k 上の定値関数全体と同一視されるから、$H^0_{DR}(S^k)\cong\boldsymbol{R}$ である。$H^p_{DR}(S^k)\cong 0$ $(1\leqq p<k)$, $H^k_{DR}(S^k)\cong\boldsymbol{R}$ を k についての帰納法でしめす。

$M_1=S^k\setminus\{(0,\dots,0,-1)\}$, $M_2=S^k\setminus\{(0,\dots,0,1)\}$ とすると、$M_{12}=M_1\cap M_2$ は $(-1,1)\times S^{k-1}$ と微分同相である。例題 11.15 により、$H^p_{DR}(M_{12})\cong H^p_{DR}(S^{k-1})$ である。帰納法の仮定により、$H^p_{DR}(S^{k-1})\cong 0$ $(1\leqq p<k-1)$, $H^{k-1}_{DR}(S^{k-1})\cong\boldsymbol{R}$ が成立しているからマイヤー・ビエトリス完全列において

$$\longrightarrow H^{k-1}_{DR}(M_1)\oplus H^{k-1}_{DR}(M_2)\longrightarrow H^{k-1}_{DR}(M_{12})\longrightarrow H^k_{DR}(S^k)\longrightarrow 0$$

は次と同型である。

$$\longrightarrow 0\oplus 0\longrightarrow \boldsymbol{R}\longrightarrow H^k_{DR}(S^k)\longrightarrow 0$$

従って、$H^p_{DR}(S^k)\cong\boldsymbol{R}$ $(p=0,\ k)$, $H^p_{DR}(S^k)\cong 0$ $(p\neq 0,\ k)$ となる。

このとき、λ_1, λ_2 を M_1, M_2 に従属する1の分割とし、$[\omega^{k-1}]$ が $H_{DR}^{k-1}(S^{k-1})$ の基底とするとき、$H_{DR}^{k}(S^{k})$ の基底 $[\omega^k]$ は $[\omega^k]=\Delta[\omega^{k-1}]=[\mathrm{d}(\lambda_2\pi^*\omega^{k-1})]$ ととることができる。

【問題 14.3】 単位球面 $S^2\subset \boldsymbol{R}^3$ の点 $p_N=(0,0,1)$, $p_S=(0,0,-1)$ から $\boldsymbol{R}^2\times\{0\}$ へのステレオグラフ射影 $\pi_N : S^2\setminus\{p_N\}\longrightarrow \boldsymbol{R}^2$, $\pi_S : S^2\setminus\{p_S\}\longrightarrow \boldsymbol{R}^2$ は次で定義される。

$$\pi_N(x_1,x_2,x_3)=(v_1,v_2)=(\frac{x_1}{1-x_3},\frac{x_2}{1-x_3})$$
$$\pi_S(x_1,x_2,x_3)=(u_1,u_2)=(\frac{x_1}{1+x_3},\frac{x_2}{1+x_3})$$

(1) π_N, π_S の逆写像を求めよ。
(2) $\{(S^2\setminus\{p_N\},\pi_N),(S^2\setminus\{p_S\},\pi_S)\}$ を S^2 の座標近傍系とするとき、座標変換を計算せよ。
(3) $\boldsymbol{R}^3$ 上の微分形式 $\omega=x_1\,\mathrm{d}x_2\wedge\mathrm{d}x_3-x_2\,\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_3+x_3\,\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2$ に対し、$(\pi_S^{-1})^*(\omega|S^2)$ を計算せよ。
(4) $\boldsymbol{R}^3\setminus\{(0,0)\}\times\boldsymbol{R}$ 上の微分形式 $\alpha=\dfrac{x_1\,\mathrm{d}x_2-x_2\,\mathrm{d}x_1}{{x_1}^2+{x_2}^2}$ に対し、$\mathrm{d}\,\alpha=0$ を示せ。$\boldsymbol{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ 上の微分形式 $(\pi_S^{-1})^*(\alpha|S^2\setminus\{p_N,p_S\})$ を計算せよ。
(5) $\gamma:[0,1]\longrightarrow\boldsymbol{R}^3$ を $\gamma(t)=(\cos(2\pi t),\sin(2\pi t),0)$ とするとき、$\displaystyle\int_\gamma\alpha$ を計算せよ。
(6) $\alpha_1=\dfrac{1-x_3}{2}\alpha$ は $S^2\setminus\{p_S\}$ 上の C^∞ 級微分形式であることを示せ。同様に $-\alpha_2=\dfrac{1+x_3}{2}\alpha$ は $S^2\setminus\{p_N\}$ 上の C^∞ 級微分形式であり、$S^2\setminus\{p_N,p_S\}$ 上で $\alpha=\alpha_1-\alpha_2$ となる。

【問題 14.3 の解答】

(1) $(x_1,x_2,x_3)=(\dfrac{2v_1}{1+{v_1}^2+{v_2}^2},\dfrac{2v_2}{1+{v_1}^2+{v_2}^2},-\dfrac{1-{v_1}^2-{v_2}^2}{1+{v_1}^2+{v_2}^2})$, $(x_1,x_2,x_3)=(\dfrac{2u_1}{1+{u_1}^2+{u_2}^2},\dfrac{2u_2}{1+{u_1}^2+{u_2}^2},\dfrac{1-{u_1}^2-{u_2}^2}{1+{u_1}^2+{u_2}^2})$.

(2) $(u_1,u_2)=(\dfrac{v_1}{{v_1}^2+{v_2}^2},\dfrac{v_2}{{v_1}^2+{v_2}^2})$, $(v_1,v_2)=(\dfrac{u_1}{{u_1}^2+{u_2}^2},\dfrac{u_2}{{u_1}^2+{u_2}^2})$.

(3) $\mathrm{d}x_1=\mathrm{d}(\dfrac{2u_1}{1+{u_1}^2+{u_2}^2})=\dfrac{2(1-{u_1}^2+{u_2}^2)}{(1+{u_1}^2+{u_2}^2)^2}\,\mathrm{d}u_1-\dfrac{4u_1u_2}{(1+{u_1}^2+{u_2}^2)^2}\,\mathrm{d}u_2$,
$\mathrm{d}x_2=\mathrm{d}(\dfrac{2u_2}{1+{u_1}^2+{u_2}^2})=-\dfrac{4u_1u_2}{(1+{u_1}^2+{u_2}^2)^2}\,\mathrm{d}u_1+\dfrac{2(1+{u_1}^2-{u_2}^2)}{(1+{u_1}^2+{u_2}^2)^2}\,\mathrm{d}u_2$,
$\mathrm{d}x_3=\mathrm{d}(\dfrac{1-{u_1}^2-{u_2}^2}{1+{u_1}^2+{u_2}^2})=\dfrac{-4u_1}{(1+{u_1}^2+{u_2}^2)^2}\,\mathrm{d}u_1+\dfrac{-4u_2}{(1+{u_1}^2+{u_2}^2)^2}\,\mathrm{d}u_2$ だから、

$$\begin{aligned}
&(\pi_S^{-1})^*(\omega|S^2)\\
&=x_1\,\mathrm{d}x_2\wedge\mathrm{d}x_3-x_2\,\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_3+x_3\,\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2\\
&=\{(2u_1)(16u_1{u_2}^2+8u_1(1+{u_1}^2-{u_2}^2))-(2u_2)(-8u_2(1-{u_1}^2+{u_2}^2)-16{u_1}^2u_2)\\
&\quad+(1-{u_1}^2-{u_2}^2)(4(1-{u_1}^2+{u_2}^2)(1+{u_1}^2-{u_2}^2)-16{u_1}^2{u_2}^2)\}\frac{\mathrm{d}u_1\wedge\mathrm{d}u_2}{(1+{u_1}^2+{u_2}^2)^5}\\
&=\{16{u_1}^2(1+{u_1}^2+{u_2}^2)+16{u_2}^2(1+{u_1}^2+{u_2}^2)\\
&\quad+4(1-{u_1}^2-{u_2}^2)^2(1+{u_1}^2+{u_2}^2)\}\frac{\mathrm{d}u_1\wedge\mathrm{d}u_2}{(1+{u_1}^2+{u_2}^2)^5}\\
&=\frac{4\,\mathrm{d}u_1\wedge\mathrm{d}u_2}{(1+{u_1}^2+{u_2}^2)^2}
\end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned}
&\mathrm{d}(\frac{x_1\,\mathrm{d}x_2-x_2\,\mathrm{d}x_1}{{x_1}^2+{x_2}^2})\\
&=\frac{2\,\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2}{{x_1}^2+{x_2}^2}-\frac{2x_1\,\mathrm{d}x_1+2x_2\,\mathrm{d}x_2}{({x_1}^2+{x_2}^2)^2}\wedge(x_1\,\mathrm{d}x_2-x_2\,\mathrm{d}x_1)\\
&=\frac{2\,\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2}{{x_1}^2+{x_2}^2}-\frac{2\,\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2}{{x_1}^2+{x_2}^2}=0
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&(\pi_S^{-1})^*(\alpha|S^2\setminus\{p_N,p_S\})\\
&=\frac{(1+{u_1}^2+{u_2}^2)^2}{4({u_1}^2+{u_2}^2)}\Big(\frac{2u_1}{1+{u_1}^2+{u_2}^2}(-\frac{4u_1u_2}{(1+{u_1}^2+{u_2}^2)^2}\,\mathrm{d}u_1+\frac{2(1+{u_1}^2-{u_2}^2)}{(1+{u_1}^2+{u_2}^2)^2}\,\mathrm{d}u_2)\\
&\qquad-\frac{2u_2}{1+{u_1}^2+{u_2}^2}(\frac{2(1-{u_1}^2+{u_2}^2)}{(1+{u_1}^2+{u_2}^2)^2}\,\mathrm{d}u_1-\frac{4u_1u_2}{(1+{u_1}^2+{u_2}^2)^2}\,\mathrm{d}u_2)\Big)\\
&=\frac{(1+{u_1}^2+{u_2}^2)^2}{4({u_1}^2+{u_2}^2)}\Big(-\frac{4u_2}{(1+{u_1}^2+{u_2}^2)^2}\,\mathrm{d}u_1+\frac{4u_1}{(1+{u_1}^2+{u_2}^2)^2}\,\mathrm{d}u_2\Big)\\
&=\frac{u_1\,\mathrm{d}u_2-u_2\,\mathrm{d}u_1}{{u_1}^2+{u_2}^2}
\end{aligned}
$$

(5) $\displaystyle\int_\gamma \alpha=\int_0^1 2\pi(\cos(2\pi t)^2+\sin(2\pi t)^2)\,\mathrm{d}t=2\pi$

(6) $\displaystyle\alpha_1=\frac{1}{2}(1-\frac{1-{u_1}^2-{u_2}^2}{1+{u_1}^2+{u_2}^2})\frac{u_1\,\mathrm{d}u_2-u_2\,\mathrm{d}u_1}{{u_1}^2+{u_2}^2}=\frac{u_1\,\mathrm{d}u_2-u_2\,\mathrm{d}u_1}{1+{u_1}^2+{u_2}^2}$

【問題 14.4】 $M_1=S^2\setminus\{p_S\}$, $M_2=S^2\setminus\{p_N\}$ とおく。$S^2=M_1\cup M_2$, $M_1\cap M_2=M_{12}$ についてのマイヤー・ビエトリス完全列において

$$\longrightarrow H^1_{DR}(M_1)\oplus H^1_{DR}(M_2)\longrightarrow H^1_{DR}(M_{12})\longrightarrow H^2_{DR}(S^2)\longrightarrow 0$$

は次と同型である。

$$\longrightarrow \qquad 0\oplus 0 \qquad\longrightarrow\qquad \boldsymbol{R}\qquad\longrightarrow H^2_{DR}(S^2)\longrightarrow 0$$

問題 14.3 の α は問題 14.3(4) により閉形式で、問題 14.3(5) により $H^1_{DR}(M_{12})$ の生成元となる。問題 14.3 を用いて $\Delta^*[\alpha|M_{12}]$ を代表する微分 2 形式を求めよ。

【問題 14.4 の解答】

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\,\alpha_1&=\mathrm{d}(\frac{u_1\,\mathrm{d}u_2-u_2\,\mathrm{d}u_1}{1+{u_1}^2+{u_2}^2})\\
&=\frac{2\,\mathrm{d}u_1\wedge\mathrm{d}u_2}{1+{u_1}^2+{u_2}^2}-\frac{2u_1\,\mathrm{d}u_1+2u_2\,\mathrm{d}u_2}{(1+{u_1}^2+{u_2}^2)^2}\wedge(u_1\,\mathrm{d}u_2-u_2\,\mathrm{d}u_1)\\
&=\frac{2\,\mathrm{d}u_1\wedge\mathrm{d}u_2}{1+{u_1}^2+{u_2}^2}\\
&=\frac{1}{2}(\pi_S^{-1})^*(\omega|S^2)
\end{aligned}
$$

ゆえに、$\Delta^*[\alpha|M_{12}]=\dfrac{1}{2}[\omega|S^2]$.

以上の議論をまとめると、k 次元球面 S^k のドラーム・コホモロジーについて次が得られた。

命題 14.5 $k\geq 1$ に対し、$H^p_{DR}(S^k)\cong\boldsymbol{R}$ $(p=0,\ k)$, $H^p_{DR}(S^k)\cong 0$ $(0<p<k)$ である。

【問題 14.6】 n 次元コンパクト多様体 M 上のモース関数をとると、次のことがわかる。M の開部分集合 $N_1,\dots,N_k$ で $\emptyset=N_0\subset N_1\subset\cdots\subset N_k=M$, $N_j=N_{j-1}\cup B_j$ $(0<j\leqq k)$. ここで, B_j は n 次元開球体 B^n と微分同相で, $N_{j-1}\cap B_j$ は空集合または m_j 次元の球面 S^{m_j} と $n-m_j$ 次元開球体 B^{n-m_j} の直積 $B^{n-m_j}\times S^{m_j}$ に微分同相である $(0\leqq m_j\leqq n-1)$. このことから、M のドラームコホモロジー群は有限次元ベクトル空間であることを示せ。

注意 14.7 モース理論による N_j への分解は、いわゆるハンドル分解と同じものであるが、$H^p_{DR}(M)$ が有限次元というだけでなく、具体的に M のトポロジーを把握し、$H^p_{DR}(M)$ その他の多様体の不変量を計算する上でも有用である。

【問題 14.6 の解答】 j についての帰納法により示す。すなわち、$H^p_{DR}(N_{j-1})$ が有限次元ベクトル空間であることを仮定して、$H^p_{DR}(N_j)$ が有限次元ベクトル空間であることを導けばよい。$N_j=N_{j-1}\cup B_j$ についてのマイヤー・ビエトリス完全列は次のようになる。

$$
\begin{aligned}
&\cdots\xrightarrow{(j_1^*,j_2^*)}H^{p-1}_{DR}(N_{j-1})\oplus H^{p-1}_{DR}(B_j)\xrightarrow{i_1^*-i_2^*}H^{p-1}_{DR}(N_{j-1}\cap B_j)\\
&\xrightarrow{\Delta^*}H^p_{DR}(N_j)\xrightarrow{(j_1^*,j_2^*)}H^p_{DR}(N_{j-1})\oplus H^p_{DR}(B_j)\xrightarrow{i_1^*-i_2^*}H^p_{DR}(N_{j-1}\cap B_j)\\
&\xrightarrow{\Delta^*}\cdots
\end{aligned}
$$

$H^p_{DR}(N_j)$ はベクトル空間の直和 $\mathrm{im}\,\Delta^* \oplus (H^p_{DR}(N_j)/\ker(j_1^*, j_2^*))$ と同型であるが、$\mathrm{im}\,\Delta^* \cong H^{p-1}_{DR}(N_{j-1}\cap B_j)/\ker\Delta^*$ は有限次元ベクトル空間 $H^{p-1}_{DR}(N_{j-1}\cap B_j) \cong H^{p-1}_{DR}(S^{m_j})$ の商ベクトル空間で有限次元、$H^p_{DR}(N_j)/\ker(j_1^*, j_2^*) \cong \mathrm{im}\,(j_1^*, j_2^*)$ は有限次元ベクトル空間 $H^p_{DR}(N_{j-1}) \oplus H^p_{DR}(B_j) \cong H^p_{DR}(N_{j-1}) \oplus H^p_{DR}(B^n)$ の部分ベクトル空間で有限次元である。従って $H^p_{DR}(N_j)$ は有限次元ベクトル空間となる。

15　直積のドラームコホモロジー

$T^2 = S^1 \times S^1$ のドラームコホモロジー群は、$H^2_{DR}(T^2) \cong \boldsymbol{R}$, $H^1_{DR}(T^2) \cong \boldsymbol{R}^2$, $H^0_{DR}(T^2) \cong \boldsymbol{R}$ であることをみた。その計算を見るとトーラス上の 1 をとる定数関数のコホモロジー類が、$H^0_{DR}(T^2)$ の基底にとれ、閉 1 形式 $\mathrm{d}x_1$, $\mathrm{d}x_2$ のコホモロジー類が $H^1_{DR}(T^2)$ の基底にとれ、$\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2$ が $H^2_{DR}(T^2)$ の基底に取れることがわかる。

2 つの多様体 M, N の直積 $M \times N$ に対して、射影 $\pi_M : M \times N \longrightarrow M$, $\pi_N : M \times N \longrightarrow N$ を考えると M の閉 p 形式 α, N の閉 q 形式 β に対して、$M \times N$ 上の閉 $p+q$ 形式 $\pi_M^*\alpha \wedge \pi_M^*\beta$ が得られる。T^2 の場合、S^1 から導かれたこのような閉形式がコホモロジー群を生成することがわかる。

この様子を記述するために、線形空間のテンソル積を用いる。

2 つの有限次元ベクトル空間 V, W のテンソル積 $V \otimes W$ は, V の基底を $e_1, \ldots, e_k$, W の基底を $f_1, \ldots, f_\ell$ とするとき、$k \cdot \ell$ 個の記号 $e_i \otimes f_j$, $(i = 1, \ldots, k;\ j = 1, \ldots, \ell)$ を基底とするベクトル空間として定義される。V の元 $v = \sum_{i=1}^{k} a_i e_i$, W の元 $w = \sum_{j=1}^{\ell} b_j f_j$ に対し、$v \otimes w = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{\ell} a_i b_j e_i \otimes f_j \in V \otimes W$ が定まる。

2 つのコホモロジー群 $H^*_{DR}(M)$, $H^*_{DR}(N)$ のテンソル積は、$H^*_{DR}(M) \otimes H^*_{DR}(N)$ の次元 p の部分を $\bigoplus_{i=0}^{p} H^i_{DR}(M) \otimes H^{p-i}_{DR}(N)$ とすることで定まる。

このとき、M 上の閉微分 p 形式 α, N 上の閉微分 q 形式 β に対し、$[\alpha] \otimes [\beta] \in H^p_{DR}(M) \otimes H^q_{DR}(N)$ が定まる。α, β に対しては、$\pi_M : M \times N \longrightarrow M$, $\pi_N : M \times N \longrightarrow N$ を射影として、$[\pi_M^*\alpha \wedge \pi_N^*\beta] \in H^{p+q}_{DR}(M \times N)$ も定まり、準同型 $H^p_{DR}(M) \otimes H^q_{DR}(N) \longrightarrow H^{p+q}_{DR}(M \times N)$ が $[\alpha] \otimes [\beta] \longmapsto [\pi_M^*\alpha \wedge \pi_N^*\beta]$ により定まる。

次が成立している

定理 15.1 (キネットの公式) 2 つのコンパクト多様体 M, N に対し、$H^*_{DR}(M \times N) \cong H^*_{DR}(M) \otimes H^*_{DR}(N)$ である。さらに、M 上の閉微分 p 形式 α, N 上の閉微分 q 形式 β に対し、$[\alpha] \otimes [\beta] \in H^p_{DR}(M) \otimes H^q_{DR}(N)$ は $[\pi_M^*\alpha \wedge \pi_N^*\beta] \in H^{p+q}_{DR}(M \times N)$ に対応する。ここで $\pi_M : M \times N \longrightarrow M$, $\pi_N : M \times N \longrightarrow N$ は射影である。

この証明のために 2 つの補題を準備する。

補題 15.2 (5 項補題) 線形空間と準同型写像の 2 つの完全列と準同型 F_i の可換図式

$$
\begin{array}{ccccccccc}
A_1 & \longrightarrow & A_2 & \longrightarrow & A_3 & \longrightarrow & A_4 & \longrightarrow & A_5 \\
\downarrow F_1 & & \downarrow F_2 & & \downarrow F_3 & & \downarrow F_4 & & \downarrow F_5 \\
B_1 & \longrightarrow & B_2 & \longrightarrow & B_3 & \longrightarrow & B_4 & \longrightarrow & B_5
\end{array}
$$

において、F_1, F_2, F_4, F_5 が同型写像ならば、F_3 は同型写像である。

補題 15.3 (テンソル積の完全性) 線形空間と準同型写像の完全列 $\cdots \longrightarrow A_0 \longrightarrow A_1 \longrightarrow A_2 \longrightarrow \cdots$ と線形空間 B に対し、自然に引き起こされる写像について、$\cdots \longrightarrow A_0 \otimes B \longrightarrow A_1 \otimes B \longrightarrow A_2 \otimes B \longrightarrow \cdots$ は完全列である（テンソル積は左からとっても同様である）。

この 2 つの補題の証明は、（線形空間と準同型の列については、特に）容易なので省略する。

$M = S^k$ **のときのキネットの公式 15.1 の証明**　k についての帰納法で示す。$k = 0$ については $\Omega^*(S^0 \times N) \cong \Omega^*(N) \oplus \Omega^*(N)$ であり、$H^0_{DR}(S^0) \otimes H^p_{DR}(N) \cong H^p_{DR}(N) \oplus H^p_{DR}(N)$ で正しい。

S^k に対して正しいと仮定する。第 14 節でとったように球面を $S^{k+1} = M_1 \cup M_2$, $M_{12} = M_1 \cap M_2 \cong S^k \times \boldsymbol{R}$ のように表し、M_1, M_2 についてのマイヤービエトリス完全列に $H^*_{DR}(N)$ をテンソル積したものを考えると、補題 15.3 により次の図式の左の縦の列は完全列となる。ただし、M_1, M_2 はコホモロジーが等しい 1 点に置き換え、M_{12} は S^k に置き換えて表示した。

$$
\begin{array}{ccc}
\downarrow (j_1^*, j_2^*) \otimes \mathrm{id}^* & & \downarrow (j_1^*, j_2^*) \\
H^{p-1}_{DR}(N) \oplus H^{p-1}_{DR}(N) & \longrightarrow & H^{p-1}_{DR}(N) \oplus H^{p-1}_{DR}(N) \\
\downarrow (i_1^* - i_2^*) \otimes \mathrm{id}^* & & \downarrow i_1^* - i_2^* \\
\displaystyle\bigoplus_{i=0}^{p-1} H^i_{DR}(S^k) \otimes H^{p-1-i}_{DR}(N) & \longrightarrow & H^{p-1}_{DR}(S^k \times N) \\
\downarrow \Delta^* \otimes \mathrm{id}^* & & \downarrow \Delta^* \\
\displaystyle\bigoplus_{i=0}^{p} H^i_{DR}(S^{k+1}) \otimes H^{p-i}_{DR}(N) & \longrightarrow & H^p_{DR}(S^{k+1} \times N) \\
\downarrow (j_1^*, j_2^*) \otimes \mathrm{id}^* & & \downarrow (j_1^*, j_2^*) \\
H^p_{DR}(N) \oplus H^p_{DR}(N) & \longrightarrow & H^p_{DR}(N) \oplus H^p_{DR}(N) \\
\downarrow (i_1^* - i_2^*) \otimes \mathrm{id}^* & & \downarrow i_1^* - i_2^* \\
\displaystyle\bigoplus_{i=0}^{p} H^i_{DR}(S^k) \otimes H^{p-i}_{DR}(N) & \longrightarrow & H^p_{DR}(N \times S^k) \\
\downarrow \Delta^* \otimes \mathrm{id}^* & & \downarrow \Delta^*
\end{array}
$$

ここで、$S^{k+1} \times N = (M_1 \times N) \cup (M_2 \times N)$ についてのマイヤー・ビエトリス完全列が右の縦の列である。ただし、$M_1 \times N$, $M_2 \times N$ はコホモロジーが等しい N に置き換え、$M_{12} \times N$ は $S^k \times N$ に置き換えて表示した。

この図式において、横の写像は、コホモロジー群のテンソル積から直積のコホモロジー群に定義されたもので図式は可換となる。

ここで、帰納法の仮定により、$p-1$ 次元コホモロジーの間の $\displaystyle\bigoplus_{i=0}^{p-1} H^i_{DR}(S^k) \otimes H^{p-1-i}_{DR}(N) \longrightarrow H^{p-1}_{DR}(S^k \times N)$ は同型写像、p 次元コホモロジーに対しても同様である。また、$H^p_{DR}(N) \oplus H^p_{DR}(N)$ の間の写像も恒等写像で同型写像である。従って補題 15.2 により、$\displaystyle\bigoplus_{i=0}^{p} H^{p-i}_{DR}(S^{k+1}) \otimes H^i_{DR}(N) \longrightarrow H^p_{DR}(S^{k+1} \times N)$ は同型となる。

一般の M に対するキネットの公式 15.1 の証明　問題 14.6 のように、多様体 M に対して、$\emptyset = M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_k = M$, $M_j = M_{j-1} \cup B_j$ $(0 < j \leqq k)$, B_j は n 次元開球体 B^n と微分同相で, $M_{j-1} \cap B_j$ は空集合または m_j 次元の球面 S^{m_j} と $n - m_j$ 次元開球体 B^{n-m_j} の直積 $B^{n-m_j} \times S^{m_j}$ に微分同相である $(0 \leqq m_j \leqq n-1)$ という分解がとられているとする。

$N_{j-1}\times M$ に対して、定理の主張が正しいと仮定して、$N_j\times M$ に対する主張を証明する。

補題 15.3 により $M_j = M_{j-1}\cup B_j$ についてのマイヤー・ビエトリス完全列と $H^*(N)$ のテンソル積をとって得られる次の図式の左の縦の列は完全列となる。ただし、B_j はコホモロジーが等しい１点に置き換え、$M_{j-1}\cap B_j$ は S^{m_j} に置き換えて表示した。

$$
\begin{array}{ccc}
\downarrow (j_1^*, j_2^*)\otimes \mathrm{id}^* & & \downarrow (j_1^*, j_2^*) \\
\bigoplus_{i=0}^{p-1} H^i_{DR}(M_{j-1})\otimes H^{p-1-i}_{DR}(N)\oplus H^{p-1}_{DR}(N) & \longrightarrow & H^{p-1}_{DR}(M_{j-1}\times N)\oplus H^{p-1}_{DR}(B_j\times N) \\
\downarrow (i_1^*-i_2^*)\otimes \mathrm{id}^* & & \downarrow i_1^*-i_2^* \\
\bigoplus_{i=0}^{p-1} H^i_{DR}(S^{m_j})\otimes H^{p-1-i}_{DR}(N) & \longrightarrow & H^{p-1}_{DR}((M_{j-1}\cap B_j)\times N) \\
\downarrow \Delta^*\otimes \mathrm{id}^* & & \downarrow \Delta^* \\
\bigoplus_{i=0}^{p} H^i_{DR}(M_j)\otimes H^{p-i}_{DR}(N) & \longrightarrow & H^p_{DR}(M_j\times N) \\
\downarrow (j_1^*, j_2^*)\otimes \mathrm{id}^* & & \downarrow (j_1^*, j_2^*) \\
\bigoplus_{i=0}^{p} H^i_{DR}(M_{j-1})\otimes H^{p-i}_{DR}(N)\oplus H^{p}_{DR}(N) & \longrightarrow & H^{p}_{DR}(M_{j-1}\times N)\oplus H^{p}_{DR}(B_j\times N) \\
\downarrow (i_1^*-i_2^*)\otimes \mathrm{id}^* & & \downarrow i_1^*-i_2^* \\
\bigoplus_{i=0}^{p} H^i_{DR}(S^{m_j})\otimes H^{p-i}_{DR}(N) & \longrightarrow & H^{p}_{DR}((M_{j-1}\cap B_j)\times N) \\
\downarrow \Delta^*\otimes \mathrm{id}^* & & \downarrow \Delta^*
\end{array}
$$

ここで、$M_j\times N = (M_{j-1}\times N)\cup(B_j\times N)$ についてのマイヤー・ビエトリス完全列が右の縦の列である。この図式において、横の写像は、コホモロジー群のテンソル積から直積のコホモロジー群に定義されたもので図式は可換となる。

帰納法の仮定により、$p-1$ 次元において、

$$\bigoplus_{i=0}^{p-1} H^i_{DR}(M_{j-1})\otimes H^{p-1-i}_{DR}(N)\oplus H^{p-1}_{DR}(N)\longrightarrow H^{p-1}_{DR}(M_{j-1}\times N)\oplus H^{p-1}_{DR}(B_j\times N),$$

は同型写像であり、p 次元についても同様である。また、球面との直積の場合のキネットの公式から

$$\bigoplus_{i=0}^{p-1} H^i_{DR}(S^{m_j})\otimes H^{p-1-i}_{DR}(N)\longrightarrow H^{p-1}_{DR}((M_{j-1}\cap B_j)\times N)$$

も同型写像であり、p 次元についても同様である。従って補題 15.2 により、$\bigoplus_{i=0}^{p} H^i_{DR}(M_j)\otimes H^{p-i}_{DR}(N)\longrightarrow H^p_{DR}(M_j\times N)$ は同型となる。

【問題 15.4】 $H^*_{DR}(T^n) = \bigotimes^n H^*_{DR}(S^1)$ を示せ。特に $H^p_{DR}(T^n)$ の元は $a_{i_1\cdots i_p}$ を定数として、$\alpha = \sum_{i_1<\cdots<i_p} a_{i_1\cdots i_p}\,\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_p}$ により代表される。

【問題 15.4 の解答】 n についての帰納法により示される。実際, $n=1$ のときは $H^*_{DR}(T^n) = \bigotimes^n H^*_{DR}(S^1)$ は正しい。$H^*_{DR}(T^{n-1}) = \bigotimes^{n-1} H^*_{DR}(S^1)$ を仮定すると、定理 15.1 により、$H^*_{DR}(T^n) = H^*_{DR}(S^1)\otimes\bigotimes^{n-1} H^*_{DR}(S^1)$ を得る。k 番目の $H^*_{DR}(S^1)$ の生成元を $\mathrm{d}x_k$ とするとき $H^p_{DR}(T^n)$ の基底は $\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_p}$ であるから、$H^p_{DR}(T^n)$ の任意の元は基底の線形結合に書かれる。

閉多様体 M について、$M\times M$ を考えると $H^*_{DR}(M\times M)\cong H^*_{DR}(M)\otimes H^*_{DR}(M)$ である。一方、対角写像 $\mathrm{diag}: M\longrightarrow M\times M$ が $\mathrm{diag}(x)=(x,x)$ に

より定義される。従って diag* と同型写像を結合して $H^*_{DR}(M) \otimes H^*_{DR}(M) \longrightarrow H^*_{DR}(M)$ が定義される。

定義 15.5 対角写像が誘導する準同型写像 $H^*_{DR}(M) \otimes H^*_{DR}(M) \cong H^*(M \times M) \xrightarrow{\mathrm{diag}^*} H^*_{DR}(M)$ が、各 $p,\ q$ に対して定める双線形写像 $\cup : H^p_{DR}(M) \times H^q_{DR}(M) \longrightarrow H^{p+q}_{DR}(M)$ をカップ積と呼ぶ。

定理 15.6 M の閉 p 形式 $\alpha,$ 閉 q 形式 β に対し、$[\alpha \wedge \beta] = [\alpha] \cup [\beta]$ が成立する。

証明 $\pi_1^*\alpha \wedge \pi_1^*\beta$ のコホモロジー類を diag で引き戻したものを考えればよい。

$$
\begin{aligned}
\mathrm{diag}^*(\pi_1^*\alpha \wedge \pi_2^*\beta) &= \mathrm{diag}^*\, \pi_1^*\alpha \wedge \mathrm{diag}^*\, \pi_2^*\beta \\
&= (\pi_1 \circ \mathrm{diag})^*\alpha \wedge (\pi_2 \circ \mathrm{diag})^*\beta \\
&= \mathrm{id}^*\, \alpha \wedge \mathrm{id}^*\, \beta = \alpha \wedge \beta
\end{aligned}
$$

だから

$$
[\alpha] \cup [\beta] = [\mathrm{diag}^*(\pi_1^*\alpha \wedge \pi_2^*\beta)] = [\alpha \wedge \beta].
$$

■

16 チェック・ドラーム複体

$\{U_i\}_{i=1,\ldots,N}$ をコンパクト n 次元多様体 M の開被覆とする。$1 \le i_0 < i_1 < \cdots < i_k \le N$ に対し、

$$
U_{i_0 i_1 \cdots i_k} = U_{i_0} \cap U_{i_1} \cap \cdots \cap U_{i_k}
$$

とおく。 開被覆 $\{U_i\}_{1=1,\cdots N}$ は次の条件を満たすとする。

“任意の $U_{i_0 i_1 \cdots i_k}$ は $\boldsymbol{R}^n$ または空集合と微分同相である。”

次の可換図式を考える。

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & \uparrow \mathrm{d} & & \uparrow \mathrm{d} & & \uparrow \mathrm{d} & & \uparrow \mathrm{d} & \\
0 \to & \Omega^3(M) & \xrightarrow{r} & \bigoplus_i \Omega^3(U_i) & \xrightarrow{\delta} & \bigoplus_{i_0<i_1} \Omega^3(U_{i_0 i_1}) & \xrightarrow{\delta} & \bigoplus_{i_0<i_1<i_2} \Omega^3(U_{i_0 i_1 i_2}) & \xrightarrow{\delta} \\
 & \uparrow \mathrm{d} & & \uparrow \mathrm{d} & & \uparrow \mathrm{d} & & \uparrow \mathrm{d} & \\
0 \to & \Omega^2(M) & \xrightarrow{r} & \bigoplus_i \Omega^2(U_i) & \xrightarrow{\delta} & \bigoplus_{i_0<i_1} \Omega^2(U_{i_0 i_1}) & \xrightarrow{\delta} & \bigoplus_{i_0<i_1<i_2} \Omega^2(U_{i_0 i_1 i_2}) & \xrightarrow{\delta} \\
 & \uparrow \mathrm{d} & & \uparrow \mathrm{d} & & \uparrow \mathrm{d} & & \uparrow \mathrm{d} & \\
0 \to & \Omega^1(M) & \xrightarrow{r} & \bigoplus_i \Omega^1(U_i) & \xrightarrow{\delta} & \bigoplus_{i_0<i_1} \Omega^1(U_{i_0 i_1}) & \xrightarrow{\delta} & \bigoplus_{i_0<i_1<i_2} \Omega^1(U_{i_0 i_1 i_2}) & \xrightarrow{\delta} \\
 & \uparrow \mathrm{d} & & \uparrow \mathrm{d} & & \uparrow \mathrm{d} & & \uparrow \mathrm{d} & \\
0 \to & \Omega^0(M) & \xrightarrow{r} & \bigoplus_i \Omega^0(U_i) & \xrightarrow{\delta} & \bigoplus_{i_0<i_1} \Omega^0(U_{i_0 i_1}) & \xrightarrow{\delta} & \bigoplus_{i_0<i_1<i_2} \Omega^0(U_{i_0 i_1 i_2}) & \xrightarrow{\delta} \\
 & & & \uparrow \iota & & \uparrow \iota & & \uparrow \iota & \\
 & & & \bigoplus_i \boldsymbol{R}(U_i) & \xrightarrow{\delta} & \bigoplus_{i_0<i_1} \boldsymbol{R}(U_{i_0 i_1}) & \xrightarrow{\delta} & \bigoplus_{i_0<i_1<i_2} \boldsymbol{R}(U_{i_0 i_1 i_2}) & \xrightarrow{\delta} \\
 & & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\
 & & & 0 & & 0 & & 0 &
\end{array}
$$

但し、縦向きの準同型については $\Omega^p(U_{i_0\cdots i_k}) \longrightarrow \Omega^{p+1}(U_{i_0\cdots i_k})$ は外微分 d である。また、$\bigoplus_{i_0<\cdots<i_k} \boldsymbol{R}(U_{i_0\cdots i_k})$ は $\{(U_{i_0\cdots i_k})\}_{i_0<\cdots<i_k}$ を基底とする実ベ

クトル空間で、$\boldsymbol{R}(U_{i_0\cdots i_k}) \longrightarrow \Omega^0(U_{i_0\cdots i_k})$ は定数関数の埋め込み ι である。ポアンカレの補題 5.11（15 ページ）により、縦向きの列は完全列である。

また、横向きの準同型については、$\Omega^p(M) \longrightarrow \Omega^p(U_i)$ は制限 r_i であり、$r = \oplus r_i$ と定義される。また、$k+1$ 個の添え字 $i_0 < \cdots < i_k$ とそれに現れる i_s に対し、$\Omega^p(U_{i_0\cdots i_{s-1}i_{s+1}\cdots i_k}) \longrightarrow \Omega^p(U_{i_0\cdots i_k})$ は制限 $r^{i_0\cdots i_{s-1}i_{s+1}\cdots i_k}_{i_0\cdots i_k}$ の $(-1)^s$ 倍であり、$\delta = \oplus\sum(-1)^s r^{i_0\cdots i_{s-1}i_{s+1}\cdots i_k}_{i_0\cdots i_k}$ と定義される。

補題 16.1 $0 \longrightarrow \Omega^p(M)$ から始まる横の列は完全列である。

証明 開被覆 $\{U_i\}_{1=1,\cdots N}$ に従属する 1 の分割 λ_i を用いて示される。

p を固定する。$f^{(k)} \in \bigoplus_{i_0<\cdots<i_k} \Omega^p(U_{i_0\cdots i_k}) \cong \Omega^p(\bigsqcup_{i_0<\cdots<i_k} U_{i_0\cdots i_k})$ に対し、$f^{(k)}$ の $\Omega^p(U_{i_0\cdots i_k})$ 成分を $f^{(k)}|U_{i_0\cdots i_k}$ あるいは $f^{(k)}_{i_0\cdots i_k}$ と書くことにする。写像 δ の定義により、$(\delta f^{(k)})|U_{i_0\cdots i_{k+1}} = \sum_{j=0}^{k+1}(-1)^j f^{(k)}_{i_0\cdots i_{j-1}i_{j+1}\cdots i_{k+1}}|U_{i_0\cdots i_{k+1}}$ である。これから、

$$
\begin{aligned}
&(\delta(\delta f^{(k)}))|U_{i_0\cdots i_{k+2}}\\
&=\sum_{j=0}^{k+2}(-1)^j(\delta f)^{(k+1)}_{i_0\cdots i_{j-1}i_{j+1}\cdots i_{k+2}}|U_{i_0\cdots i_{k+2}}\\
&=\sum_{j=0}^{k+2}(-1)^j\sum_{m=0}^{j-1}(-1)^m f^{(k)}_{i_0\cdots i_{m-1}i_m\cdots i_{j-1}i_{j+1}\cdots i_{k+2}}|U_{i_0\cdots i_{k+2}}\\
&\quad+\sum_{j=0}^{k+2}(-1)^j\sum_{m=j+1}^{k+2}(-1)^{m-1} f^{(k)}_{i_0\cdots i_{m-1}i_m\cdots i_{j-1}i_{j+1}\cdots i_{k+2}}|U_{i_0\cdots i_{k+2}}\\
&=0
\end{aligned}
$$

$$
f^{(k+1)} \in \bigoplus_{i_0<\cdots<i_{k+1}} \Omega^p(U_{i_0\cdots i_{k+1}}) \cong \Omega^p(\bigsqcup_{i_0<\cdots<i_{k+1}} U_{i_0\cdots i_{k+1}})
$$

に対して、

$$
Sf^{(k+1)} \in \bigoplus_{i_0<\cdots<i_k} \Omega^p(U_{i_0\cdots i_k}) \cong \Omega^p(\bigsqcup_{i_0<\cdots<i_k} U_{i_0\cdots i_k})
$$

を $(Sf^{(k+1)})|U_{i_0\cdots i_k} = \sum_m \lambda_m f^{(k+1)}_{mi_0\cdots i_k}$ と定義する。ただし、m が $i_0,\ \ldots,$ i_k のどれかと一致するときは $f^{(k+1)}_{mi_0\cdots i_k} = 0$ とし、$i_{j-1} < m < i_j$ のとき、$f^{(k+1)}_{mi_0\cdots i_k} = (-1)^j f^{(k+1)}_{i_0\cdots i_{j-1}mi_j\cdots i_k}$ とする。また、$\lambda_m f_{mi_0\cdots i_k}$ は $\Omega^p(U_{i_0\cdots i_k})$ の元と考える。

$\delta(Sf^{(k)}) + S(\delta f^{(k)})$ を計算すると次のようになる。

$$
\begin{aligned}
(\delta Sf^{(k)})|U_{i_0\cdots i_k} &= \sum_{j=0}^{k}(-1)^j(Sf^{(k)})|U_{i_0\cdots i_{j-1}i_{j+1}\cdots i_k}\\
&=\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\sum_m \lambda_m f^{(k)}_{mi_0\cdots i_{j-1}i_{j+1}\cdots i_k}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(S\delta f^{(k)})|U_{i_0\cdots i_k} &= \sum_m \lambda_m(\delta f^{(k)})_{mi_0\cdots i_k}\\
&=\sum_m \lambda_m\Big(f^{(k)}_{i_0\cdots i_k} + \sum_{j=0}^{k}(-1)^{j+1} f^{(k)}_{mi_0\cdots i_{j-1}i_{j+1}\cdots i_k}\Big)\\
&= f^{(k)}_{i_0\cdots i_k} + \sum_m \lambda_m \sum_{j=0}^{k}(-1)^{j+1} f^{(k)}_{mi_0\cdots i_{j-1}i_{j+1}\cdots i_k}
\end{aligned}
$$

従って、$\delta(Sf^{(k)})+S(\delta f^{(k)})=f^{(k)}$ を得る。このことから、$\delta f^{(k)}=0$ のとき、$f^{(k)}=\delta(Sf^{(k)})$ となり、横の列の完全性がわかる。 ■

このように、第0列よりも右の縦の列が完全列、第0行よりも上の横の行が完全列であることがわかっているとき、以下のように第 -1 列と第 -1 行のコホモロジー群は同型であることが示される。第 -1 列は M のドラーム複体 $\Omega^*(M)$ だから、第 -1 列の p 次のコホモロジー群はドラームコホモロジー群 $H^p_{DR}(M)$ である。第 -1 行

$$0 \longrightarrow \bigoplus_i \boldsymbol{R}(U_i) \xrightarrow{\delta} \bigoplus_{i_0<i_1} \boldsymbol{R}(U_{i_0 i_1}) \xrightarrow{\delta} \bigoplus_{i_0<i_1<i_2} \boldsymbol{R}(U_{i_0 i_1 i_2}) \xrightarrow{\delta} \cdots$$

は、チェック複体と呼ばれ、その p 次元コホモロジー群は p 次元チェック・コホモロジー群と呼ばれ $\check{H}^p(M,\{U_i\})$ と書かれる。

示したいことは次の定理である。

定理 16.2 (チェック・ドラームの定理) コンパクト多様体 M の有限開被覆 $\{U_i\}_{i=1,\dots,N}$ について、任意の $U_{i_0 i_1 \cdots i_k}=\bigcap_{j=0}^{k} U_{i_k}$ は $\boldsymbol{R}^n$ または空集合と微分同相であるとする。このときドラーム・コホモロジー群とチェック・コホモロジー群の同型 $H^p_{DR}(M)\cong\check{H}^p(M,\{U_i\})$ が成立する。

証明　1) まず M 上の閉微分 p 形式に対し、チェック複体の p コサイクルが対応することを示す。

第 -1 列の閉 p 形式 α が与えられると、$r\alpha$ に対し、$\mathrm{d}\,r\alpha=r\,\mathrm{d}\,\alpha=0$ だから $r\alpha=\mathrm{d}\,\alpha^{(0,p-1)}$ となる $\alpha^{(0,p-1)}\in\bigoplus_i \Omega^{p-1}(U_i)$ が存在する。次の図式を参照せよ。

$$\begin{array}{ccccc}
0 & \longmapsto & 0 & & \\
\big\uparrow \mathrm{d} & & \big\uparrow \mathrm{d} & & \\
\alpha & \overset{r}{\longmapsto} & r\alpha & \overset{\delta}{\longmapsto} & 0 \\
 & & \big\uparrow \mathrm{d} & & \big\uparrow \mathrm{d} \\
 & & \alpha^{(0,p-1)} & \overset{\delta}{\longmapsto} & \delta\alpha^{(0,p-1)}
\end{array}$$

$\alpha^{(0,p-1)}$ に対し $\delta\alpha^{(0,p-1)}$ を考えると、$\mathrm{d}\,\delta\alpha^{(0,p-1)}=\delta\,\mathrm{d}\,\alpha^{(0,p-1)}=\delta r\alpha=0$ である。

帰納的に、$\alpha^{(j-1,p-j)}\in\bigoplus_{i_0<\cdots<i_{j-1}} \Omega^{p-j}(U_{i_0\cdots i_{j-1}})$ に対し、
$\mathrm{d}\,\delta\alpha^{(j-1,p-j)}=0$ と仮定すると、$\delta\alpha^{(j-1,p-j)}=\mathrm{d}\,\alpha^{(j,p-j-1)}$ となる $\alpha^{(j,p-j-1)}\in\bigoplus_{i_0<\cdots<i_j} \Omega^{p-j-1}(U_{i_0\cdots i_j})$ が存在する。次の図式を参照せよ。

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{d}\,\alpha^{(j-1,p-j)} & \longmapsto & 0 & & \\
\big\uparrow \mathrm{d} & & \big\uparrow \mathrm{d} & & \\
\alpha^{(j-1,p-j)} & \overset{\delta}{\longmapsto} & \delta\alpha^{(j-1,p-j)} & \overset{\delta}{\longmapsto} & 0 \\
 & & \big\uparrow \mathrm{d} & & \big\uparrow \mathrm{d} \\
 & & \alpha^{(j,p-j-1)} & \overset{\delta}{\longmapsto} & \delta\alpha^{(j,p-j-1)}
\end{array}$$

この $\delta\alpha^{(j,p-j-1)}$ は、$\mathrm{d}\,\delta\alpha^{(j,p-j-1)}=\delta\,\mathrm{d}\,\alpha^{(j,p-j-1)}=\delta\delta\alpha^{(j-1,p-j)}=0$ を満たす。

帰納法により、$\alpha^{(p-1,0)}\in\bigoplus_{i_0<\cdots<i_{p-1}} \Omega^0(U_{i_0\cdots i_{p-1}})$ が存在する。さらに、$\delta\alpha^{(p-1,0)}=\iota\alpha^{(p,-1)}$ となる $\alpha^{(p,0)}\in\bigoplus_{i_0<\cdots<i_{p-1}} \boldsymbol{R}(U_{i_0\cdots i_{p-1}})$ が存在する。次

の図式を参照せよ。

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{d}\,\alpha^{(p-1,0)} & \longmapsto & 0 & & \\
\uparrow \mathrm{d} & & \uparrow \mathrm{d} & & \\
\alpha^{(p-1,0)} & \overset{\delta}{\longmapsto} & \delta\alpha^{(p-1,0)} & \overset{\delta}{\longmapsto} & 0 \\
 & & \uparrow \iota & & \uparrow \iota \\
 & & \alpha^{(p,-1)} & \overset{\delta}{\longmapsto} & \delta\alpha^{(p,-1)}
\end{array}$$

ここで、$\delta\alpha^{(p,-1)}$ について $\iota\delta\alpha^{(p,-1)} = \delta\iota\alpha^{(p,-1)} = \delta\delta\alpha^{(p-1,0)} = 0$ であるが、ι は単射だから $\delta\alpha^{(p,-1)} = 0$ である。

以上で、閉微分 p 形式 α に対し、チェック複体の p コサイクル $\alpha^{(p,-1)}$ が得られることがわかった。この構成の途中の段階で、$\alpha^{(j,p-j-1)}$ のとり方は、完全形式の差の自由度があるが、その差はチェック複体のコバウンダリーの差に吸収されることが、次の議論を必要なところから繰り返すことによりわかる。

２）　１) で得られた対応が、コホモロジー群の準同型を誘導することを示す。同時に１) におけるコサイクルの構成の自由度はコバウンダリーの差に吸収され、準同型写像がきちんと定義されていることが確認される。

第 -1 列の完全 p 形式 α $(\alpha = \mathrm{d}\,\beta)$ に対して、$r\alpha = \mathrm{d}\,r\beta = \mathrm{d}\,\alpha^{(0,p-1)}$ だから、$\beta^{(0,p-2)}$ で $\mathrm{d}\,\beta^{(0,p-2)} = \alpha^{(0,p-1)} - r\beta$ となるものがある。次の図式を参照せよ。

$$\begin{array}{ccccc}
\alpha & & 0 & \overset{\delta}{\longmapsto} & 0 \\
\uparrow \mathrm{d} & & \uparrow \mathrm{d} & & \uparrow \mathrm{d} \\
\beta & & \alpha^{(0,p-1)} - r\beta & \overset{\delta}{\longmapsto} & \delta\alpha^{(0,p-1)} \\
 & & \uparrow \mathrm{d} & & \uparrow \mathrm{d} \\
 & & \beta^{(0,p-2)} & \overset{\delta}{\longmapsto} & \delta\beta^{(0,p-2)}
\end{array}$$

$\delta\beta^{(0,p-2)}$ は、

$$\mathrm{d}\,\delta\beta^{(0,p-2)} = \delta\,\mathrm{d}\,\beta^{(0,p-2)} = \delta(\alpha^{(0,p-1)} - r\beta) = \delta\alpha^{(0,p-1)}$$

を満たす。

帰納的に、$\beta^{(j-1,p-j-1)} \in \bigoplus_{i_0<\cdots<i_{j-1}} \Omega^{p-j-1}(U_{i_0\cdots i_{j-1}})$ に対し、$\mathrm{d}\,\delta\beta^{(j-1,p-j-1)} = \delta\alpha^{(j-1,p-j)} = \mathrm{d}\,\alpha^{(j,p-j-1)}$ と仮定すると、$\beta^{(j,p-j-2)}$ で $\mathrm{d}\,\beta^{(j,p-j-2)} = \alpha^{(j,p-j-1)} - \delta\beta^{(j-1,p-j-1)}$ となるものがある。次の図式を参照せよ。

$$\begin{array}{ccccc}
\alpha^{(j-1,p-j)} - \delta\,\beta^{(j-2,p-j)} & & 0 & \overset{\delta}{\longmapsto} & 0 \\
\uparrow \mathrm{d} & & \uparrow \mathrm{d} & & \uparrow \mathrm{d} \\
\beta^{(j-1,p-j-1)} & & \alpha^{(j,p-j-1)} - \delta\beta^{(j-1,p-j-1)} & \overset{\delta}{\longmapsto} & \delta\alpha^{(j,p-j-1)} \\
 & & \uparrow \mathrm{d} & & \uparrow \mathrm{d} \\
 & & \beta^{(j,p-j-2)} & \overset{\delta}{\longmapsto} & \delta\beta^{(j,p-j-2)}
\end{array}$$

$\delta\beta^{(j,p-j-2)}$ は、

$$\mathrm{d}\,\delta\beta^{(j,p-j-2)} = \delta\,\mathrm{d}\,\beta^{(j,p-j-2)} = \delta(\alpha^{(j,p-j-1)} - \delta\beta^{(j-1,p-j-1)}) = \delta\alpha^{(j,p-j-1)}$$

を満たす。

帰納法により、$\beta^{(p-2,0)} \in \bigoplus_{i_0<\cdots<i_{p-2}} \Omega^0(U_{i_0\cdots i_{p-2}})$ に対し、
$\mathrm{d}\,\delta\beta^{(p-2,0)} = \delta\alpha^{(p-2,1)} = \mathrm{d}\,\alpha^{(p-1,0)}$ と仮定すると、$\beta^{(p-1,-1)}$ で
$\iota\beta^{(p-1,-1)} = \alpha^{(p-1,0)} - \delta\beta^{(p-2,0)}$ となるものがある。次の図式を参照せよ。

$$\begin{array}{ccccc}
\alpha^{(p-2,1)} - \delta\,\beta^{(p-3,1)} & & 0 & \stackrel{\delta}{\longmapsto} & 0 \\
\uparrow \mathrm{d} & & \uparrow \mathrm{d} & & \uparrow \mathrm{d} \\
\beta^{(p-2,0)} & & \alpha^{(p-1,0)} - \delta\beta^{(p-2,0)} & \stackrel{\delta}{\longmapsto} & \delta\alpha^{(p-1,0)} \\
 & & \uparrow \iota & & \uparrow \iota \\
 & & \beta^{(p-1,-1)} & \stackrel{\delta}{\longmapsto} & \delta\beta^{(p-1,-1)}
\end{array}$$

$\delta\beta^{(p-1,-1)}$ は、

$$\iota\delta\beta^{(p-1,-1)} = \delta\iota\beta^{(p-1,-1)} = \delta(\alpha^{(p-1,0)} - \delta\beta^{(p-2,0)}) = \delta\alpha^{(p-1,0)} = \iota\alpha^{(p,-1)}$$

を満たす。ι は単射だから、$\alpha^{(p,-1)} = \delta\beta^{(p-1,-1)}$.

1) におけるコサイクルの構成の自由度は、$\alpha^{(j,p-j-1)}$ に対する完全形式の差であるが、これは、途中の $\beta^{(j,p-j-2)}$ を変更することで吸収される。

こうして準同型 $H^p_{DR}(M) \longrightarrow \check{H}^p(M,\{U_i\})$ が定義された。

3）この準同型の構成は、図式の縦の列、横の列が完全列であることだけを用いている。そこで、縦の列、横の列の役割を入れ替えれば、チェック複体の p コサイクルに対し、ドラーム複体の閉微分 p 形式を対応させ、それが準同型 $\check{H}^p(M,\{U_i\}) \longrightarrow H^p_{DR}(M)$ を引き起こすことがわかる。1）で α に $\alpha^{(p,-1)}$ を対応させたが、縦の列、横の列の役割を入れ替えた対応では $\alpha^{(p,-1)}$ に α が対応するので、2つの準同型写像 $H^p_{DR}(M) \longrightarrow \check{H}^p(M,\{U_i\})$, $\check{H}^p(M,\{U_i\}) \longrightarrow H^p_{DR}(M)$ は、お互いの逆写像である。従って $H^p_{DR}(M) \cong \check{H}^p(M,\{U_i\})$ である。 ■

【例 16.3】 2 次元球面 S^2 に内接する正 4 面体 $v_1v_2v_3v_4$ を考える。球面の中心から、正 4 面体の辺 v_iv_j を球面上に射影する。球面 3 角形 $v_2v_3v_4$, $v_1v_3v_4$, $v_1v_2v_4$, $v_1v_2v_3$ の補集合（S^2 の開集合）を U_1, U_2, U_3, U_4 とする。これに対し、$U_{12}, U_{13}, U_{14}, U_{23}, U_{24}, U_{34}, U_{123}, U_{124}, U_{134}, U_{234}$ は 2 次元開球体 B^2 と微分同相であり、$U_{1234} = \emptyset$ となる。$\Omega^*(S^2)$ のドラームコホモロジー群は $H^p_{DR}(S^2) \cong \begin{cases} \boldsymbol{R} & (p = 0, 2) \\ 0 & (p \neq 0, 2) \end{cases}$ となる。チエック複体は

$$0 \to \boldsymbol{R}^4 \xrightarrow{\delta} \boldsymbol{R}^6 \xrightarrow{\delta} \boldsymbol{R}^4 \to 0$$

である。$\chi_{i_0\cdots i_p}$ を $U_{i_0\cdots i_p}$ 上で 1 となる関数とする。

$$\delta(\sum_{i=1}^4 a_i\chi_i) = \sum_{i_0<i_1} (a_{i_0} - a_{i_1})\chi_{i_0i_1},$$
$$\delta(\sum_{i_0<i_1} b_{i_0i_1}\chi_{i_0i_1}) = \sum_{i_0<i_1<i_2} (b_{i_1i_2} - b_{i_0i_2} + b_{i_0i_1})\chi_{i_0i_1i_2}$$

を行列に書いて計算すると、基底 $(\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4)$, $(\chi_{12}, \chi_{13}, \chi_{14}, \chi_{23}, \chi_{24}, \chi_{34})$, $(\chi_{123}, \chi_{124}, \chi_{134}, \chi_{234})$ に対して、それぞれ、

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

となる。ker, im を計算して $\check{H}^p(S^2, \{U_i\}) \cong \begin{cases} \boldsymbol{R} & (p = 0, 2) \\ 0 & (p \neq 0, 2) \end{cases}$ となる。