M が３角形分割を持つとして、単体複体に対して、単体的ドラーム理論を展開し、$\Omega^*(M)$ の p 次元コホモロジー群が、単体複体のコホモロジー群と一致すること、単体複体のコホモロジー群とホモロジー群は、双対空間になっていて、次元が等しいことを示す。これにより、$H^p_{DR}(M) \cong \boldsymbol{R}^d$ のとき、M 上の p サイクル $c_1, \ldots, c_d$ が存在し、閉 p 形式 α に対して、$\alpha = \mathrm{d}\beta$ と書かれることと $\displaystyle\int_{c_i} \alpha = 0\ (i = 1, \ldots, d)$ が同値となる。

まず、有限単体複体を定義しよう。

$\boldsymbol{R}^N$ の基底を $\{e_1, \cdots, e_N\}$ とする。

頂点 $\{e_{i_0}, \cdots, e_{i_k}\}$ $(e_{i_0} < \cdots < e_{i_k})$ を頂点とする k 次元単体（これらの点の凸包）を $\langle e_{i_0} \cdots e_{i_k} \rangle$ で表すことにする。すなわち、

$$\langle e_{i_0} \cdots e_{i_k} \rangle = \{\sum_{\ell=0}^{k} t_{i_\ell} e_{i_\ell} \big| t_{i_\ell} \geq 0, \sum_{\ell=0}^{k} t_{i_\ell} = 1\}$$

この単体の点 $\displaystyle\sum_{\ell=0}^{k} t_{i_\ell} e_{i_\ell}$ に対し、$(t_{i_0}, \ldots, t_{i_k})$ をその点の重心座標という。

有限単体複体 K とはこれらの単体からなる有限集合で、一つの k 次元単体 $\langle e_{i_0} \cdots e_{i_k} \rangle$ を含めば、その面となる $k-1$ 次元単体 $\langle e_{i_0} \cdots, e_{i_{\ell-1}} e_{i_{\ell+1}} \cdots, e_{i_k} \rangle$ $(0 \leq \ell \leq k)$ を含む（従って、次元の低い面をすべて含む）ものである。$|K|$ で K に属する単体の和集合を表す。$|K|$ の点は重心座標で表されている。

有限単体複体 K の k チェインとは、K の単体の実数係数（有限）線形結合のことである。k チェイン全体の集合を $C_k(K)$ と書く。

$$C_k(K) = \{\sum a_i \sigma_i \mid a_i \in \boldsymbol{R},\ \sigma_i \text{ は } K \text{ の } k \text{ 単体 }\}$$

であり、$C_k(K)$ は、k 単体の個数と同じの次元のベクトル空間となる。k 単体 $\sigma = \langle e_{i_0} \cdots e_{i_k} \rangle$ に対し、その境界 $\partial\sigma$ を $\partial\sigma = \displaystyle\sum_{j=0}^{k} (-1)^j \langle e_{i_0} \cdots e_{i_{j-1}} e_{i_{j+1}} \cdots e_{i_k} \rangle$ により定義する。これにより、境界準同型 $\partial : C_k(K) \longrightarrow C_{k-1}(K)$ が定義されるが、$\partial \circ \partial = 0$ となる。そこで

$$C_*(K) : 0 \xleftarrow{\partial} C_0(K) \xleftarrow{\partial} C_1(K) \xleftarrow{\partial} C_2(K) \xleftarrow{\partial} \cdots$$

という複体が得られる。ここで $H_k(K) = \ker \partial / \operatorname{im} \partial$ により実係数ホモロジー群が得られる。

また、有限単体複体 K のコホモロジーは次で定義される。

$C^k(K)$ を K の k 次元単体上の実数値関数のなすベクトル空間とする。$C^k(K)$ の元 c の k 次元単体 $\langle e_{i_0} \cdots e_{i_k} \rangle$ での値を $c(i_0, \ldots, i_k)$ と書くことにする。$C^k(K)$ の元 c, $C_k(K)$ の元 $\sum a_i \sigma_i$ に対し、$c(\sum a_i \sigma_i) \in \boldsymbol{R}$ を $c(\sum a_i \sigma_i) = \sum a_i c(\sigma_i)$ と定義すると、$C^k(K)$ の元は $C_k(K)$ 上の線形形式である。これにより、$C^k(K)$ は $C_k(K)$ の双対ベクトル空間である。

$\delta : C^k(K) \longrightarrow C^{k+1}(K)$ を

$$(\delta c)(i_0, \ldots, i_{k+1}) = \sum_{\ell=0}^{k+1} (-1)^\ell c(i_0, \ldots, i_{\ell-1}, i_{\ell+1}, \ldots, i_{k+1})$$

で定義する。この定義は、$(\delta c)(\sigma) = c(\partial\sigma)$ としたものである。そうすると $\partial \circ \partial = 0$ から $\delta \circ \delta = 0$ がわかる。有限単体複体 K のコホモロジーは、K のコチェイン複体

$$C^*(K) : 0 \xrightarrow{\delta} C^0(K) \xrightarrow{\delta} C^1(K) \xrightarrow{\delta} C^2(K) \xrightarrow{\delta} \cdots$$

のコホモロジーとして $H^*(K) = \ker \delta / \operatorname{im} \delta$ で定義される。

ここで $\dim H_k(K) = \dim H^k(K)$ が容易にわかる。すなわち、$C_*(K)$ に単体から与えられる基底をとり、$C_k(K)$ は列ベクトルで表されるとする。境界準同型 ∂ を下の図のように行列

A, B で表すと、AB は零行列である。

$$\begin{array}{ccccc} C_{k-1}(K) & \longleftarrow & C_k(K) & \longleftarrow & C_{k+1}(K) \\ & A & & B & \\ C^{k-1}(K) & \longrightarrow & C^k(K) & \longrightarrow & C^{k+1}(K) \end{array}$$

$C^k(K)$ は $C_k(K)$ 上の線形形式の空間だから行ベクトルで表されると考え、同じ A, B が行ベクトルに作用すると考えたものが δ である。行ベクトルを列ベクトルに同一視し, $C^k(K)$ と $C_k(K)$ の間の積はユークリッドの内積とみる。A の行ベクトルを $a_1, \ldots, a_\ell$ とする ($A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_\ell \end{pmatrix}$) と、$\ker \partial = \langle {}^t a_1, \ldots, {}^t a_\ell \rangle^\perp$, B の列ベクトルを $b_1, \ldots, b_n$ とする ($B = \begin{pmatrix} b_1 & \cdots & b_n \end{pmatrix}$) と、$\operatorname{im} \partial = \langle b_1, \ldots, b_n \rangle$ であり、

$$\langle b_1, \ldots, b_n \rangle \subset \langle {}^t a_1, \ldots, {}^t a_\ell \rangle^\perp$$

である。一方、$\ker \delta = \langle b_1, \ldots, b_n \rangle^\perp$, $\operatorname{im} \delta = \langle {}^t a_1, \ldots, {}^t a_\ell \rangle$ であり、

$$\langle {}^t a_1, \ldots, {}^t a_\ell \rangle \subset \langle b_1, \ldots, b_n \rangle^\perp$$

である。

この書き方で、$V = \langle {}^t a_1, \ldots, {}^t a_\ell \rangle^\perp \cap \langle b_1, \ldots, b_n \rangle^\perp$ とすると、

$$\langle {}^t a_1, \ldots, {}^t a_\ell \rangle^\perp / \langle b_1, \ldots, b_n \rangle \cong V \cong \langle b_1, \ldots, b_n \rangle^\perp / \langle {}^t a_1, \ldots, {}^t a_\ell \rangle$$

すなわち、

$$\ker \partial / \operatorname{im} \partial \cong \ker \delta / \operatorname{im} \delta$$

さらに、$C^k(K)$ と $C_k(K)$ の間の積を、行ベクトルを列ベクトルに同一視のもとで, ユークリッドの内積とみたが、そのユークリッドの内積の V 上への制限が、$H^k(K)$ と $H_k(K)$ の間の積を引き起こし、これは、$C^k(K)$ と $C_k(K)$ の間の積から引き起こされたものに一致する。

有限単体複体 K のドラーム複体 $\Omega^*(K)$ を次のように定義する。

$\Omega^k(K)$ の元 ω とは K のすべての単体 σ から、その上の k 次微分形式 ω_σ への対応であり、m 次元単体 $\sigma = \langle e_{i_0} \cdots e_{i_m} \rangle$ とその面となる $m-1$ 次元単体 $\tau = \langle e_{i_0} \cdots e_{i_{\ell-1}} e_{i_{\ell+1}} \cdots e_{i_m} \rangle$ に対し、ω_σ の τ への制限が ω_τ と一致する ($\omega_\sigma | \tau = \omega_\tau$) ものである。

外微分 $\mathrm{d} : \Omega^k(K) \longrightarrow \Omega^{k+1}(K)$ について、$\mathrm{d} \circ \mathrm{d} = 0$ であり、有限単体複体 K のドラーム・コホモロジー $H^*_{DR}(K) = \ker \mathrm{d} / \operatorname{im} \mathrm{d}$ が定義される。

多様体 M の微分可能な単体分割とは、単体複体 K からの同相写像 $\varphi : K \longrightarrow M$ で、各単体の上で微分可能なものとする。

チェック・ドラーム理論により、$\Omega^*(M)$ と $C^*(K)$ のコホモロジー群が同型であることがわかる。また、これから説明する単体的ドラーム理論から、$\Omega^*(K)$ と $C^*(K)$ のコホモロジー群が同型であることがわかる。

多様体 M が微分可能な単体分割 $\varphi : K \longrightarrow M$ を持つとする。このとき、チェック・ドラーム理論が適用できる M の開被覆を次のようにとることができる。

K の各頂点 e_i に対し、U_i を e_i のまわりの開星状体 $\mathrm{star}(e_i)$ とする。$U_{i_0 \cdots i_k} = \bigcap_{\ell=0}^{k} U_{i_\ell}$ とすると、$U_{i_0 \cdots i_k}$ について、従って $\varphi(U_{i_0 \cdots i_k})$ に対してポアンカレの補題が成立する。従って、$\bigoplus_{i_1 < \cdots < i_p} \Omega^p(U_{i_0 \cdots i_k})$ についてチェック・ドラーム理論が成立する。

$U_{i_0 \cdots i_k}$ が空でないのは $\langle e_{i_0} \cdots e_{i_k} \rangle$ が K の k 次元単体であることと同値であり、開被覆 $\{U_i\} = \{\mathrm{star}(e_i)\}$ についてのチェック複体は K のコチェイン複体 $C^*(K)$ と一致する。

単体的ドラーム理論の重要なところは単体上の積分が、有限単体複体 K のドラーム複体 $\Omega^*(K)$ と K のコチェイン複体 $C^*(K)$ の関係を与えることである。

$\Delta^k = \{(x_1, \ldots, x_k) \mid 1 \geqq x_1 \geqq \cdots \geqq x_k \geqq 0\}$ から $\sigma = \langle e_{i_0} \cdots e_{i_k} \rangle$ への写像を σ と書く. σ は、

$$\sigma(x_1, \ldots, x_k) = (1 - x_1)e_{i_0} + (x_1 - x_2)e_{i_1} + \cdots + (x_{k-1} - x_k)e_{i_{k-1}} + x_k e_{i_k}$$

と定義する

$\omega \in \Omega^k(K)$ と K の k 次元単体 $\sigma = \langle e_{i_0} \cdots e_{i_k} \rangle$ に対し、$\displaystyle\int_\sigma \omega \in \boldsymbol{R}$ を対応させる対応は K の k 次コチェインを与える。この写像を $I : \Omega^*(K) \longrightarrow C^*(K)$ と書く。ストークスの定理から I はコチェイン写像 $(I \circ \mathrm{d} = \delta \circ I)$ となる。

定理 (単体的ドラームの定理) I は有限単体複体 K のドラームコホモロジー $H^*_{DR}(K)$ と K のコホモロジー $H^*(K)$ の間の同型写像を誘導する。

証明のためにコチェイン写像 $s : C^*(K) \longrightarrow \Omega^*(K)$ で、$I \circ s = \mathrm{id}_{C^*(K)}$ を構成する。チェック・ドラーム理論により、$H^*_{DR}(K)$ と $H^*(K)$ が同型であり、有限次元ベクトル空間となることがわかっているので I が同型写像を誘導することがわかる。

k 次元単体 $\langle e_{i_0}, \cdots, e_{i_k} \rangle$ に対して考える k 次微分形式は

$$\omega_{i_0 \cdots i_k} = k! \sum_{\ell=0}^{k} (-1)^\ell t_{i_\ell}\, \mathrm{d}t_{i_0} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}t_{i_{\ell-1}} \wedge \mathrm{d}t_{i_{\ell+1}} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}t_{i_k}$$

とすると良い。この微分形式は $\langle e_{i_0} \cdots e_{i_k} \rangle$ を含むすべての単体上で定義されている。係数が t_i について 1 次であることに注意する。

この $\omega_{i_0 \cdots i_k}$ に対して、$\displaystyle\int_{\langle e_{i_0}, \cdots, e_{i_k} \rangle} \omega_{i_0 \cdots i_k} = 1$ となる。

s の構成を可能にしている事実は次の通りである。

s の像を $\omega_{i_0 \cdots i_k}$ を用いてつくると、これがコチェイン写像となる $(\mathrm{d} \circ s = s \circ \delta)$ ためには、$\mathrm{d}\,\omega_{i_0 \cdots i_k} = (k+1)!\, \mathrm{d}t_{i_0} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}t_{i_k}$ （この係数は t_i について零次）が $\omega_{j_0 \cdots j_{k+1}}$ の和にかかれる必要がある。特に、$k = 0$ のとき、$\mathrm{d}\,\omega_i = \mathrm{d}t_i$ について、そうでなければならない。ところが、K の m 次元単体 $\sigma = \langle e_{j_0} \cdots e_{j_m} \rangle$ 上で、

$$\begin{aligned}
&\mathrm{d}t_{j_\ell} = (\sum_{a=0}^{m} t_{j_a})\, \mathrm{d}t_{j_\ell} = (\sum_{j_a \in \{j_0, \cdots, j_m\} - \{j_\ell\}} t_{j_a})\, \mathrm{d}t_{j_\ell} + t_{j_\ell}\, \mathrm{d}t_{j_\ell} \\
= \quad &(\sum_{j_a \in \{j_0, \cdots, j_m\} - \{j_\ell\}} t_{j_a})\, \mathrm{d}t_{j_\ell} + t_{j_\ell}\, \mathrm{d}(1 - \sum_{j_a \in \{j_0, \cdots, j_m\} - \{j_\ell\}} t_{j_a}) \\
= \quad &\sum_{j_a \in \{j_0, \cdots, j_m\} - \{j_\ell\}} (t_{j_a}\, \mathrm{d}t_{j_\ell} - t_{j_\ell}\, \mathrm{d}t_{j_a})
\end{aligned}$$

これは $\omega_{j_a j_\ell}$ $(j_a < j_\ell)$ および $\omega_{j_\ell j_a}$ $(j_\ell < j_a)$ の和である。実際

$$\mathrm{d}t_{j_\ell} = \sum_{\{i_0, i_1\} - \{i_1\} = \{j_\ell\}} \omega_{i_0 i_1} - \sum_{\{i_0, i_1\} - \{i_0\} = \{j_\ell\}} \omega_{i_0 i_1}$$

同様に $\mathrm{d}\,\omega_{i_0 \cdots i_k}$ についても K の m 次元単体 $\sigma = \langle e_{j_0} \cdots e_{j_m} \rangle$ $(\{i_0, \cdots, i_k\} \subset \{j_0, \cdots, j_m\}$, $i_0 < \cdots < i_k$, $j_0 < \cdots < j_m)$ 上で、

$$\begin{aligned}
&(k+1)!\, \mathrm{d}t_{i_0} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}t_{i_k} = (k+1)!((\sum_{a=0}^{m} t_{j_a})\, \mathrm{d}t_{i_0} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}t_{i_k}) \\
= \quad &(k+1)!(\sum_{j_a \in \{j_0, \cdots, j_m\} - \{i_0, \cdots, i_k\}} t_{j_a}\, \mathrm{d}t_{i_0} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}t_{i_k} + \sum_{\ell=0}^{k} t_{i_\ell}\, \mathrm{d}t_{i_0} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}t_{i_k})
\end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{aligned}
&t_{i_\ell}\, \mathrm{d}t_{i_0} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}t_{i_k} \\
&= t_{i_\ell}\, \mathrm{d}t_{i_0} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}t_{i_{\ell-1}} \wedge \mathrm{d}(1 - \sum_{j_a \in \{j_0, \cdots, j_m\} - \{i_\ell\}} t_{j_a}) \wedge \mathrm{d}t_{i_{\ell+1}} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}t_{i_k} \\
&= -\sum_{j_a \in \{j_0, \cdots, j_m\} - \{i_0, \cdots, i_k\}} (-1)^\ell t_{i_\ell}\, \mathrm{d}t_{j_a} \wedge \mathrm{d}t_{i_0} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}t_{i_{\ell-1}} \wedge \mathrm{d}t_{i_{\ell+1}} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}t_{i_k}
\end{aligned}$$

従って、

$$
\begin{aligned}
&(k+1)!\,\mathrm{d}t_{i_0}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}t_{i_k}\\
&=(k+1)!(\sum_{j_a\in\{j_0,\cdots,j_m\}-\{i_0,\cdots,i_k\}} t_{j_a}\,\mathrm{d}t_{i_0}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}t_{i_k}\\
&\qquad-\sum_{j_a\in\{j_0,\cdots,j_m\}-\{i_0,\cdots,i_k\}}\sum_{\ell=0}^{k}\\
&\qquad\qquad(-1)^{\ell}t_{i_\ell}\,\mathrm{d}t_{j_a}\wedge\mathrm{d}t_{i_0}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}t_{i_{\ell-1}}\wedge\mathrm{d}t_{i_{\ell+1}}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}t_{i_k})\\
&=(k+1)!\sum_{\{b_0,\cdots b_{k+1}\}-\{b_u\}=\{i_0,\cdots,i_k\}}(-1)^u\sum_{v=0}^{k+1}\\
&\qquad\qquad(-1)^v t_{b_v}\,\mathrm{d}t_{b_0}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}t_{b_{v-1}}\wedge\mathrm{d}t_{b_{v+1}}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}t_{b_{k+1}}
\end{aligned}
$$

ここで、$b_0<\cdots<b_{k+1}$ とする。結局、次の関係式が成立する。

$$
\mathrm{d}\,\omega_{i_0\cdots i_k}=\sum_{\{b_0,\cdots,b_{k+1}\}-\{b_u\}=\{i_0,\cdots,i_k\}}(-1)^u\omega_{b_0\cdots b_{k+1}}
$$

定理の証明　$s:C^*(K)\longrightarrow\Omega^*(K)$ で、$I\circ s=\mathrm{id}_{C^*(K)}$ を定義する。

$c\in C^0(K)$ に対しては、対応する $\Omega^0(K)$ の元は $|K|$ 上の関数であり、リーゾナブルな取り方は、頂点 e_i で $c(i)$ をとる関数を線形に拡張したものである。すなわち、K の m 次元単体 $\sigma=\langle e_{j_0},\cdots,e_{j_m}\rangle$ 上で、

$$
s(c)_\sigma=\sum_{\ell=0}^{m}c(j_\ell)t_{j_\ell}
$$

これについて、外微分をとると

$$
\begin{aligned}
ds(c)_\sigma&=\sum_{\ell=0}^{m}c(j_\ell)\,\mathrm{d}t_{j_\ell}=\sum_{\ell=0}^{m}c(j_\ell)(\sum_{\{i_0,i_1\}-\{i_1\}=\{j_\ell\}}\omega_{i_0i_1}-\sum_{\{i_0,i_1\}-\{i_0\}=\{j_\ell\}}\omega_{i_0i_1})\\
=&\sum_{\{i_0,i_1\}\subset\{j_0,\cdots,j_m\}}(c(i_0)\omega_{i_0i_1}-c(i_1)\omega_{i_0i_1})=\sum_{\{i_0,i_1\}\subset\{j_0,\cdots,j_m\}}(c(i_0)-c(i_1))\omega_{i_0i_1}
\end{aligned}
$$

ここで $i_0<i_1$ とする。これを δc の像にする必要があるが、それは $\delta c(i_0,i_1)=c(i_0)-c(i_1)$ であるから、$c^1\in C^1(K)$ に対し、

$$
s(c^1)_\sigma=\sum_{\{i_0,i_1\}\subset\{j_0,\cdots,j_m\}}c^1(i_0,i_1)\omega_{i_0i_1}
$$

とすればよい。

一般に $c\in C^k(K)$ に対し、次のように s を定義する。K の m 次元単体 $\sigma=\langle e_{j_0}\cdots e_{j_m}\rangle$ $(m\geq k)$ 上で、

$$
s(c)_\sigma=\sum_{\{i_0,\cdots,i_k\}\subset\{j_0,\cdots,j_m\}}c(i_0,\cdots,i_k)\omega_{i_0\cdots i_k}
$$

これは $\Omega^k(K)$ の元となる。

s がコチェイン写像であること $(\mathrm{d}\circ s=s\circ\delta)$ が次のように確かめられる

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\,s(c)_\sigma&=\sum_{\{i_0,\cdots,i_k\}\subset\{j_0,\cdots,j_m\}}c(i_0,\cdots,i_k)\,\mathrm{d}\,\omega_{i_0\cdots i_k}\\
&=\sum_{\{i_0,\cdots,i_k\}\subset\{j_0,\cdots,j_m\}}c(i_0,\cdots,i_k)\sum_{\{b_0,\cdots b_{k+1}\}-\{b_u\}=\{i_0,\cdots,i_k\}}(-1)^u\omega_{b_0\cdots b_{k+1}}\\
&=\sum_{\{b_0,\cdots b_{k+1}\}\subset\{j_0,\cdots,j_m\}}(\sum_{u=0}^{k+1}(-1)^u c(b_0,\cdots,b_{u-1},b_{u+1},\cdots b_{k+1}))\omega_{b_0\cdots b_{k+1}}\\
&=\sum_{\{b_0,\cdots b_{k+1}\}\subset\{j_0,\cdots,j_m\}}(\delta c)(b_0,\cdots b_{k+1})\omega_{b_0\cdots b_{k+1}}=s(\delta(c))_\sigma
\end{aligned}
$$

■