２００６年度 幾何学 III　　演習問題　　１１月２１日

復習問題. 単位球面 $S^2 \subset \mathbf{R}^3$ の点 $p_N = (0,0,1)$, $p_S = (0,0,-1)$ から $\mathbf{R}^2 \times \{0\}$ へのステレオグラフィック・プロジェクション $\pi_N : S^2 \setminus \{p_N\} \longrightarrow \mathbf{R}^2$, $\pi_S : S^2 \setminus \{p_S\} \longrightarrow \mathbf{R}^2$ は次で定義される。

$$\pi_N(x_1,x_2,x_3) = (v_1,v_2) = (\frac{x_1}{1-x_3}, \frac{x_2}{1-x_3})$$
$$\pi_S(x_1,x_2,x_3) = (u_1,u_2) = (\frac{x_1}{1+x_3}, \frac{x_2}{1+x_3})$$

(1) π_N, π_S の逆写像を求めよ。

(2) $\{(S^2 \setminus \{p_N\}, \pi_N), (S^2 \setminus \{p_S\}, \pi_S)\}$ を S^2 の座標近傍系とするとき、座標変換を計算せよ。

問題１. (1) $\mathbf{R}^3$ 上の微分形式 $\omega = x_1 \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 - x_2 \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_3 + x_3 \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2$ に対し、$(\pi_S^{-1})^*(\omega|S^2)$ を計算せよ。

(2) $\mathbf{R}^3 \setminus \{(0,0)\} \times \mathbf{R}$ 上の微分形式 $\alpha = \dfrac{x_1 \mathrm{d}x_2 - x_2 \mathrm{d}x_1}{{x_1}^2 + {x_2}^2}$ に対し、$\mathrm{d}\alpha = 0$ を示せ。$\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ 上の微分形式 $(\pi_S^{-1})^*(\alpha|S^2 \setminus \{p_N, p_S\})$ を計算せよ。

(3) $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbf{R}^3$ を $\gamma(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t), 0)$ とするとき、$\displaystyle\int_\gamma \alpha$ を計算せよ。

(4) $\alpha_1 = \dfrac{1-x_3}{2}\alpha$ は $S^2 \setminus \{p_S\}$ 上の C^∞ 級微分形式であることを示せ。同様に $-\alpha_2 = \dfrac{1+x_3}{2}\alpha$ は $S^2 \setminus \{p_N\}$ 上の C^∞ 級微分形式であり、$S^2 \setminus \{p_N, p_S\}$ 上で $\alpha = \alpha_1 - \alpha_2$ となる。

問題２. $M_1 = S^2 \setminus \{p_S\}$, $M_2 = S^2 \setminus \{p_N\}$ とおく。マイヤー・ビエトリス完全列

$$\begin{array}{ccccccc} & & & \cdots & \xrightarrow{i_1^*-i_2^*} & H^{p-1}(M_{12}) \\ \xrightarrow{\Delta^*} & H^p(S^2) & \xrightarrow{(j_1^*,j_2^*)} & H^p(M_1) \oplus H^p(M_2) & \xrightarrow{i_1^*-i_2^*} & H^p(M_{12}) \\ \xrightarrow{\Delta^*} & H^{p+1}(S^2) & \xrightarrow{(j_1^*,j_2^*)} & \cdots & & \end{array}$$

において

$$\longrightarrow H^1_{DR}(M_1) \oplus H^1_{DR}(M_2) \longrightarrow H^1_{DR}(M_{12}) \longrightarrow H^2_{DR}(S^2) \longrightarrow 0$$
は次と同型である。
$$\longrightarrow \quad 0 \oplus 0 \quad \longrightarrow \quad \mathbf{R} \quad \longrightarrow H^2_{DR}(S^2) \longrightarrow 0$$

問題１の α は問題１ (2) により閉形式で、問題１ (3) により $H^1_{DR}(M_{12})$ の生成元となる。問題１を用いて $\Delta^*[\alpha|M_{12}]$ を代表する微分２形式を求めよ。

問題３. n 次元コンパクト多様体 M 上のモース関数をとると、次のことがわかる。M の開部分集合 $N_1, \ldots, N_k$ で $\emptyset = N_0 \subset N_1 \subset \cdots \subset N_k = M$, $N_j = N_{j-1} \cup B_j$ $(0 < j \leqq k)$. ここで, B_j は n 次元開球体 B^n と微分同相で, $N_{j-1} \cap B_j$ は空集合または m_j 次元の球面 S^{m_j} と $n - m_j$ 次元開球体 B^{n-m_j} の直積 $B^{n-m_j} \times S^{m_j}$ に微分同相である $(0 \leqq m_j \leqq n-1)$. このことから、M のドラームコホモロジー群は有限次元ベクトル空間であることを示せ。