

問題1 . 2次元単位球面  $S^2$  に対してステレオグラフ射影  $\pi_N : S^2 \setminus \{p_N\} \rightarrow \mathbf{R}^2$ ,  $\pi_S : S^2 \setminus \{p_S\} \rightarrow \mathbf{R}^2$  を考える。

$$\begin{aligned}\pi_N(x_1, x_2, x_3) &= (v_1, v_2) = \left( \frac{x_1}{1-x_3}, \frac{x_2}{1-x_3} \right) \\ \pi_S(x_1, x_2, x_3) &= (u_1, u_2) = \left( \frac{x_1}{1+x_3}, \frac{x_2}{1+x_3} \right)\end{aligned}$$

(1)  $\mathbf{R}^2$  上の多項式係数のベクトル場の  $\xi = P(v_1, v_2) \frac{\partial}{\partial v_1} + Q(v_1, v_2) \frac{\partial}{\partial v_2}$  について  $(\pi_N^{-1})_* \xi$  が  $S^2$  上の微分可能ベクトル場に拡張するためには  $P, Q$  の次数は2次以下であることを示せ。

(2)  $\mathbf{R}^2$  上の多項式係数の微分1形式  $\alpha = P(v_1, v_2)dv_1 + Q(v_1, v_2)dv_2$  について  $\pi_N^* \alpha$  は  $S^2$  上の微分可能微分形式に拡張しないことを示せ。

ヒント:(1)  $\pi_{S^*}(\pi_N^{-1})_* \xi$  を書き下し、原点に拡張するかどうか考える。(2)  $\pi_S^{-1*}(\pi_N)^* \alpha$  を書き下し、原点に拡張するかどうか考える。

定義 [リー微分] ベクトル場  $\xi$  がフロー  $\varphi_t$  を生成しているとする。微分  $p$  形式  $\alpha$  に対し、微分  $p$  形式  $(\frac{d}{dt})_{t=0} \varphi_t^* \alpha$  は、 $\alpha$  の  $\xi$  によるリー微分と呼ばれ、 $L_\xi \alpha$  と書かれる。

問題2 . (1) 微分  $p$  形式  $\alpha$ , 微分  $q$  形式  $\beta$ , ベクトル場  $\xi$  に対して、 $L_\xi(\alpha \wedge \beta) = (L_\xi \alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge (L_\xi \beta)$  を示せ。

(2) 微分  $p$  形式  $\alpha$ , ベクトル場  $\xi$  に対して、 $d(L_\xi \alpha) = L_\xi d\alpha$  を示せ。

問題3 . 微分  $p$  形式  $\alpha$ , ベクトル場  $\xi, \eta$  に対して  $(L_\xi L_\eta - L_\eta L_\xi)\alpha = L_{[\xi, \eta]}\alpha$  が成立することを次の順で示せ。

(1) 微分0形式、微分1形式に対して示す。(2) 微分  $p$  形式  $\alpha$ , 微分  $q$  形式  $\beta$  に対して成立していることを仮定して、外積  $\alpha \wedge \beta$  に対して成立することを示す(問題2 (1)を使う)。

(3) 題意を示す。

問題4 . 内部積が多様体上で定義されることは以下により示される。

(1) 微分  $p$  形式  $\alpha$ , 微分  $q$  形式  $\beta$  の外積  $\alpha \wedge \beta$  に対し、 $i_\xi(\alpha \wedge \beta) = (i_\xi \alpha) \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge (i_\xi \beta)$  が成立することを示せ。

(2)  $F : U \rightarrow V$  をユークリッド空間の開集合  $U, V$  の間の微分同相写像とする。 $V$  上の微分1形式  $\alpha$ ,  $V$  上のベクトル場  $\xi$  に対し、 $F^*(i_\xi \alpha) = i_{F^{-1}*} F^* \alpha$  を示せ。

(3)  $F : U \rightarrow V$  をユークリッド空間の開集合  $U, V$  の間の微分同相写像とする。 $V$  上の微分  $p$  形式  $\alpha$ ,  $V$  上のベクトル場  $\xi$  に対し、 $F^*(i_\xi \alpha) = i_{F^{-1}*} F^* \alpha$  を示せ(問題3と同様の議論で(1)を使う)。

問題5 . 微分  $p$  形式  $\alpha$ , ベクトル場  $\xi, \eta$  に対して  $i_\xi L_\eta \alpha - L_\eta i_\xi \alpha = i_{[\xi, \eta]}\alpha$  が成立することを問題3と同様に示せ。

問題6 .  $\mathbf{R}^3$  上の微分1形式  $\alpha = x_1 dx_1 + x_2 dx_2 + x_3 dx_3$ , 微分2形式  $\omega = x_1 dx_2 \wedge dx_3 - x_2 dx_1 \wedge dx_3 + x_3 dx_1 \wedge dx_2$ , 微分3形式  $\Omega = dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$  を考える。

行列  $A = (A_{ij})_{i,j=1,2,3}$  が定める、線形写像  $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  について次に答えよ。

- (1)  $A^*\alpha = \alpha$  となるための行列  $A$  の条件を求めよ。
- (2)  $A^*\omega = \omega$  となるための行列  $A$  の条件を求めよ。
- (3)  $A^*\Omega = \Omega$  となるための行列  $A$  の条件を求めよ。

問題 7 . 問題 6 の微分形式  $\alpha, \omega, \Omega, \mathbb{R}^3$  上の線形ベクトル場  $\xi = \sum_{i,j=1}^3 a_{ij}x_j \frac{\partial}{\partial x_i}$  を考える。

- (1)  $L_\xi\alpha = 0$  となるための  $\xi$  の条件を求めよ。
- (2)  $L_\xi\omega = 0$  となるための  $\xi$  の条件を求めよ。
- (3)  $L_\xi\Omega = 0$  となるための  $\xi$  の条件を求めよ。

定義 [微分形式のベクトル場における値] 微分  $p$  形式  $\alpha$ , ベクトル場  $\xi_1, \dots, \xi_p$  に対し、 $\alpha(\xi_1, \dots, \xi_p) = i_{\xi_p} \cdots i_{\xi_1} \alpha$  と定義する (関数  $f$  に対し  $i_\xi df = \xi(f)$  である)

注意 :  $\alpha(\xi_1, \dots, \xi_p) = \frac{1}{p!} i_{\xi_p} \cdots i_{\xi_1} \alpha$  とする定義もある。

問題 8 . 問題 5 を用いて、次を示せ (これらを外微分、リー微分の定義とすることもある)。

- (1) 微分 1 形式  $\alpha$  に対し、 $(d\alpha)(\xi_1, \xi_2) = \xi_1(\alpha(\xi_2)) - \xi_2(\alpha(\xi_1)) - \alpha([\xi_1, \xi_2])$ 。
- (2) 微分  $p$  形式  $\alpha$  に対し、

$$(d\alpha)(\xi_1, \dots, \xi_{p+1}) = \sum_{i=1}^{p+1} (-1)^{i-1} \xi_i(\alpha(\xi_1, \dots, \xi_{i-1}, \xi_{i+1}, \dots, \xi_{p+1})) \\ + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \alpha([\xi_i, \xi_j], \xi_1, \dots, \xi_{i-1}, \xi_{i+1}, \dots, \xi_{j-1}, \xi_{j+1}, \dots, \xi_{p+1})$$

- (3)  $(L_\xi\alpha)(\xi_1, \dots, \xi_p) = \xi\alpha(\xi_1, \dots, \xi_p) - \sum_{i=1}^p \alpha(\xi_1, \dots, \xi_{i-1}, [\xi, \xi_i], \xi_{i+1}, \dots, \xi_p)$

定義 [リー群] 群  $G$  が多様体の構造をもち、群演算  $G \times G \rightarrow G$  が  $C^\infty$  級写像となるとき、 $G$  はリー群と呼ばれる (このとき、陰関数定理を用いると、逆元をとる演算  $G \rightarrow G$  は  $C^\infty$  級写像となることがわかる)。  $G$  の元  $g$  による左移動  $L_g : G \rightarrow G$  は  $L_g(h) = gh$  で定義される。左移動で不変なベクトル場、微分形式を左不変ベクトル場、微分形式とよぶ。

これらは単位元  $1$  における値で定まる。左不変ベクトル場  $\xi, \eta$  のブラケット積  $[\xi, \eta]$  は、左不変ベクトル場となる。また、左不変形式  $\alpha$  の外微分  $d\alpha$  は左不変形式となる。

行列で表されるリー群上の左不変ベクトル場  $A$  で生成されるフローは  $\varphi_t^A(B) = Be^{tA}$  と書かれる。

問題 9 . (1)  $SO(3)$  のリー代数  $\mathfrak{so}(3) \cong T_1SO(3)$  は  $3 \times 3$  交代行列 ( ${}^tA + A = 0$ ) で表さ

れる。基底  $e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $e_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  に対し、 $[e_i, e_j]$

を計算せよ。左不変微分 1 形式の基底を双対基底  $e_1^*, e_2^*, e_3^*$  とするとき、 $de_i^*$  を求めよ。

(2)  $SL(2; \mathbb{R})$  のリー代数  $\mathfrak{sl}(2; \mathbb{R}) \cong T_1SL(2; \mathbb{R})$  はトレースが 0 の  $2 \times 2$  行列 ( $\text{Tr}A = 0$ )

で表される。基底  $H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ,  $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $U = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  に対し、これらのブラケッ

ト積を計算せよ。左不変微分 1 形式の基底を双対基底  $H^*, S^*, U^*$  とするとき、それらの外微分を求めよ。