２００６年度 幾何学 III　　演習問題　　１０月３日

復習問題１． 微積分学の基本定理とは何か。

復習問題２． n 次元ユークリッド空間の開集合 U 上の実数値関数 f が C^r 級 $(r=1,\ldots,\infty)$ であることの定義を述べよ。

復習問題３． 平面の開集合 U 上の C^2 級実数値関数 f は $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}$ を満たすこと示せ。

定義 [微分１形式, 線積分] ユークリッド空間の開集合 U 上の連続関数 $f_1(\boldsymbol{x}),\ldots,f_n(\boldsymbol{x})$ に対して、$f_1 \mathrm{d}x_1 + \cdots + f_n \mathrm{d}x_n$ を、U 上の微分１形式（あるいは１次微分形式）と呼ぶ。微分１形式 $f_1 \mathrm{d}x_1 + \cdots + f_n \mathrm{d}x_n$ の連続微分可能曲線 $\gamma : [a,b] \longrightarrow U$ $(\gamma(t) = (\gamma_1(t),\ldots,\gamma_n(t)))$ 上の積分（線積分）を次で定義する。

$$\int_\gamma \big(f_1 \mathrm{d}x_1 + \cdots + f_n \mathrm{d}x_n\big) = \int_a^b \left(f_1(\gamma(t)) \frac{\mathrm{d}\gamma_1}{\mathrm{d}t}(t) + \cdots + f_n(\gamma(t)) \frac{\mathrm{d}\gamma_n}{\mathrm{d}t}(t) \right) \mathrm{d}t$$

定義 [全微分] ユークリッド空間の開集合 U 上の連続微分可能な関数 f に対し、$\mathrm{d}f = \dfrac{\partial f}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1 + \cdots + \dfrac{\partial f}{\partial x_n}\mathrm{d}x_n$ を f の全微分と呼ぶ。

問題１． ユークリッド空間の開集合 U 上の連続微分可能な関数 f, 連続微分可能曲線 $\gamma : [a,b] \longrightarrow U$ について、$\displaystyle\int_\gamma \mathrm{d}f = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$ を示せ。

問題２． $f_1,\ f_2$ が平面上で定義された連続微分可能な関数で、$\dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} = \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}$ を満たすとする。$\mathrm{d}f = f_1 \mathrm{d}x_1 + f_2 \mathrm{d}x_2$ を満たす f は、
$f(x_1,x_2) = \displaystyle\int_0^{x_1} f_1(s,0)\mathrm{d}s + \int_0^{x_2} f_2(x_1,t)\mathrm{d}t$ で与えられることを示せ。

問題３． 原点を除いた平面上で定義された

$$f_1 \mathrm{d}x_1 + f_2 \mathrm{d}x_2 = -\frac{x_2}{{x_1}^2 + {x_2}^2}\mathrm{d}x_1 + \frac{x_1}{{x_1}^2 + {x_2}^2}\mathrm{d}x_2$$

を考える。

(1) $\dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} = \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}$ を満たしていることを示せ。

(2) $\mathrm{d}f = f_1 \mathrm{d}x_1 + f_2 \mathrm{d}x_2$ となる $\mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$ 上で定義された関数 f は存在しないことを示せ。