多様体上に微分形式が定義され、外微分、ドラーム複体、積分の理論が出来上がった。

多様体上では、アイソトピーによる変形を考えることが自然である。アイソトピーの微分であるベクトル場と微分形式の関係を見ていこう。

22　多様体上のフローとベクトル場

M をコンパクト多様体とする。加法群 $\boldsymbol{R}$ の M 上への作用、すなわち微分可能写像 $\varphi : \boldsymbol{R} \times M \longrightarrow M$ で、$\varphi(t,x) = \varphi_t(x)$ と書くとき、$\varphi_s\varphi_t = \varphi_{s+t}$, $\varphi_0 = \mathrm{id}_M$ を満たすものを M 上のフローと呼ぶ。フロー φ_t は M 上のベクトル場 ξ で生成される。ベクトル場 ξ に対し、φ_t は $\dfrac{\mathrm{d}\,\varphi_t(x)}{\mathrm{d}\,t} = \xi(\varphi_t(x))$ を満たす多様体上の常微分方程式の解として定義される。座標近傍 $(U,(x_1,\dots,x_n))$ をとって書くと、$\varphi_t(x) = (\varphi_t^{(1)}(x),\dots,\varphi_t^{(n)}(x))$, $\xi(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \xi_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}$ に対して、$\dfrac{\mathrm{d}\,\varphi_t^{(i)}(x)}{\mathrm{d}\,t} = \xi_i(\varphi_t(x))$ となっている。

M 上の関数 f に対し、$({\varphi_t}^*f)(x) = (f\circ\varphi_t)(x) = f(\varphi_t(x))$ をみると、f のフローに沿う変化がわかる。その t についての微分が f のフローに沿う変化率であるが、これは座標近傍 $(U,(x_1,\dots,x_n))$ 上では、

$$\frac{\mathrm{d}({\varphi_t}^*f)(x)}{\mathrm{d}\,t} = \big(\frac{\partial f}{\partial x_i}\big)_{(\varphi_t(x))}\frac{\mathrm{d}\,\varphi_t^{(i)}(x)}{\mathrm{d}\,t} = \big(\frac{\partial f}{\partial x_i}\big)_{(\varphi_t(x))}\xi_i(\varphi_t(x))$$

と書かれる。ξ を方向微分として f に作用させたものを $\xi(f)$ と書くが、これは $\big(\dfrac{\mathrm{d}({\varphi_t}^*f)(x)}{\mathrm{d}\,t}\big)_{t=0}$ に他ならないから、

$$\xi(f) = \big(\frac{\mathrm{d}({\varphi_t}^*f)(x)}{\mathrm{d}\,t}\big)_{t=0} = \big(\frac{\partial f}{\partial x_i}\big)_{(x)}\xi_i(x)$$

となる。

接空間 $T_x(M)$ の基底 $\dfrac{\partial}{\partial x_1}$, $\dots$, $\dfrac{\partial}{\partial x_n}$ については、$\dfrac{\partial}{\partial x_i}$ は、曲線 $t \longmapsto (x_1,\dots,x_{i-1},x_i+t,x_{i+1},\dots,x_n)$ に沿う微分である。一方、余接空間 $T_x^*(M)$ の基底 $\mathrm{d}x_1$, $\dots$, $\mathrm{d}x_n$ については、$\mathrm{d}\,x_j$ は x の近傍で x_j であるような関数の同値類である。x_j の曲線 $t \longmapsto (x_1,\dots,x_{i-1},x_i+t,x_{i+1},\dots,x_n)$ に沿う微分は δ_{ij}, すなわち $i=j$ のとき 1 で $i \neq j$ のとき 0 である。従って、接空間 $T_x(M)$, 余接空間 $T_x^*(M)$ は双対ベクトル空間であり、接空間 $T_x(M)$ の基底 $\dfrac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \dfrac{\partial}{\partial x_n}$, 余接空間 $T_x^*(M)$ の基底 $\mathrm{d}x_1$, $\dots$, $\mathrm{d}x_n$ は双対基底である。$\mathrm{d}x_j(\dfrac{\partial}{\partial x_i}) = \delta_{ij}$ のように書くことにする。

関数 f の全微分 $\mathrm{d}\,f$ は, $\mathrm{d}\,f = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x_i$ であったから、前ページの $\xi(f)$ は

$$\xi(f) = \big(\frac{\partial f}{\partial x_i}\big)_{(x)}\xi_i(x) = (\mathrm{d}\,f)(\xi)$$

と書かれる。

微分１形式のフローに沿う変化率は次のように考えられる。座標近傍 $(U,(x_1,\dots,x_n))$ において、$\alpha = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} f_i\,\mathrm{d}x_i$ に対し、${\varphi_t}^*\alpha = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} f_i(\varphi_t(x))\,\mathrm{d}\varphi_t^{(i)}$ である。ここで、

$$\big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\big)_{t=0} f_i(\varphi_t(x)) = \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\xi_j$$

である。一方、$\mathrm{d}\,\varphi_t^{(i)}=\displaystyle\sum_{j=1}^n\frac{\partial\varphi_t^{(i)}}{\partial x_j}\,\mathrm{d}x_j$ だから、

$$\begin{aligned}\Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\Big)_{t=0}\mathrm{d}\,\varphi_t^{(i)}&=\sum_{j=1}^n\Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\Big)_{t=0}\frac{\partial\varphi_t^{(i)}}{\partial x_j}\,\mathrm{d}x_j\\&=\sum_{j=1}^n\frac{\partial}{\partial x_j}\Big(\frac{\mathrm{d}\,\varphi_t^{(i)}}{\mathrm{d}\,t}\Big)_{t=0}\mathrm{d}x_j=\sum_{j=1}^n\frac{\partial\xi_i}{\partial x_j}\,\mathrm{d}x_j\end{aligned}$$

従って、次が得られる。

$$\Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\Big)_{t=0}{\varphi_t}^*\alpha=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\xi_j\,\mathrm{d}x_i+\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n f_i\frac{\partial\xi_i}{\partial x_j}\,\mathrm{d}x_j$$

$\Big(\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\Big)_{t=0}{\varphi_t}^*\alpha$ を α の ξ によるリー微分と呼び、$L_\xi\alpha$ と書く。

ベクトル場 $\xi=\displaystyle\sum_{i=1}^n\xi_i\frac{\partial}{\partial x_i}$, $\eta=\displaystyle\sum_{i=1}^n\eta_i\frac{\partial}{\partial x_i}$ に対し、括弧積（ブラケット積）$[\xi,\eta]$ は $[\xi,\eta]=\displaystyle\sum_{j=1}^n\sum_{i=1}^n\Big(\xi_i\frac{\partial\eta_j}{\partial x_i}-\eta_i\frac{\partial\xi_j}{\partial x_i}\Big)\frac{\partial}{\partial x_j}$ のように書かれる

【問題 22.1】 微分１形式 α, ベクトル場 ξ, η に対し、$L_\xi L_\eta\alpha-L_\eta L_\xi\alpha=L_{[\xi,\eta]}\alpha$ を示せ。

【問題 22.1 の解答】 $\alpha=\displaystyle\sum_{i=1}^n f_i\,\mathrm{d}x_i$ に対し、$L_\xi\alpha=\displaystyle\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\Big(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\xi_j+f_j\frac{\partial\xi_j}{\partial x_i}\Big)\,\mathrm{d}x_i$ だから、

$$\begin{aligned}L_\xi L_\eta\alpha&=\sum_{i=1}^n\sum_{k=1}^n\sum_{j=1}^n\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\Big(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\eta_j+f_j\frac{\partial\eta_j}{\partial x_i}\Big)\xi_k+\Big(\frac{\partial f_j}{\partial x_k}\eta_k+f_k\frac{\partial\eta_k}{\partial x_j}\Big)\frac{\partial\xi_j}{\partial x_i}\right)\mathrm{d}x_i\\&=\sum_{i=1}^n\sum_{k=1}^n\sum_{j=1}^n\left(\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j\partial x_k}\eta_j\xi_k+\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\frac{\partial\eta_j}{\partial x_k}\xi_k+\frac{\partial f_j}{\partial x_k}\frac{\partial\eta_j}{\partial x_i}\xi_k+f_j\frac{\partial^2\eta_j}{\partial x_i\partial x_k}\xi_k\right.\\&\qquad\left.+\frac{\partial f_j}{\partial x_k}\eta_k\frac{\partial\xi_j}{\partial x_i}+f_k\frac{\partial\eta_k}{\partial x_j}\frac{\partial\xi_j}{\partial x_i}\right)\mathrm{d}x_i\\L_\eta L_\xi\alpha&=\sum_{i=1}^n\sum_{k=1}^n\sum_{j=1}^n\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\Big(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\xi_j+f_j\frac{\partial\xi_j}{\partial x_i}\Big)\eta_k+\Big(\frac{\partial f_j}{\partial x_k}\xi_k+f_k\frac{\partial\xi_k}{\partial x_j}\Big)\frac{\partial\eta_j}{\partial x_i}\right)\mathrm{d}x_i\\&=\sum_{i=1}^n\sum_{k=1}^n\sum_{j=1}^n\left(\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j\partial x_k}\xi_j\eta_k+\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\frac{\partial\xi_j}{\partial x_k}\eta_k+\frac{\partial f_j}{\partial x_k}\frac{\partial\xi_j}{\partial x_i}\eta_k+f_j\frac{\partial^2\xi_j}{\partial x_i\partial x_k}\eta_k\right.\\&\qquad\left.+\frac{\partial f_j}{\partial x_k}\xi_k\frac{\partial\eta_j}{\partial x_i}+f_k\frac{\partial\xi_k}{\partial x_j}\frac{\partial\eta_j}{\partial x_i}\right)\mathrm{d}x_i\end{aligned}$$

であるが、それぞれの第１項は等しい。$L_\xi L_\eta\alpha$ の第３項、第５項は $L_\eta L_\xi\alpha$ の第５項、第３項に等しい。従って、

$$\begin{aligned}&L_\xi L_\eta\alpha-L_\eta L_\xi\alpha\\&=\sum_{i=1}^n\sum_{k=1}^n\sum_{j=1}^n\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\Big(\frac{\partial\eta_j}{\partial x_k}\xi_k-\frac{\partial\xi_j}{\partial x_k}\eta_k\Big)+f_j\Big(\frac{\partial^2\eta_j}{\partial x_i\partial x_k}\xi_k-\frac{\partial^2\xi_j}{\partial x_i\partial x_k}\eta_k\Big)\right.\\&\qquad\left.+f_k\Big(\frac{\partial\eta_k}{\partial x_j}\frac{\partial\xi_j}{\partial x_i}-\frac{\partial\xi_k}{\partial x_j}\frac{\partial\eta_j}{\partial x_i}\Big)\right)\mathrm{d}x_i\\&=\sum_{i=1}^n\sum_{k=1}^n\sum_{j=1}^n\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\Big(\frac{\partial\eta_j}{\partial x_k}\xi_k-\frac{\partial\xi_j}{\partial x_k}\eta_k\Big)+f_j\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\frac{\partial\eta_j}{\partial x_k}\xi_k-\frac{\partial\xi_j}{\partial x_k}\eta_k\Big)\right)\mathrm{d}x_i\\&=L_{[\xi,\eta]}\alpha\end{aligned}$$

$L_\xi\alpha=\displaystyle\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\xi_j\,\mathrm{d}x_i+\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n f_i\frac{\partial\xi_i}{\partial x_j}\,\mathrm{d}x_j$ を書き換えることを考える。

$T_x(M)$ に値をとる ξ と $T_x^*(M)$ に値をとる α に対して、M 上の関数 $\alpha(\xi)=$

$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} f_i\xi_i$ が考えられるが、これの全微分 $\mathrm{d}(\alpha(\xi))$ は、

$$\mathrm{d}(\alpha(\xi)) = \mathrm{d}\sum_{i=1}^{n} f_i\xi_i = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} f_i\frac{\partial\xi_i}{\partial x_j}\,\mathrm{d}x_j + \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\xi_i\,\mathrm{d}x_j$$

と計算される。この和のうち $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} f_i\frac{\partial\xi_i}{\partial x_j}\,\mathrm{d}x_j$ は、$\left(\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\right)_{t=0}{\varphi_t}^*\alpha$ に現れたものと同じである。そこで、

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\right)_{t=0}{\varphi_t}^*\alpha - \mathrm{d}(\alpha(\xi)) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\xi_j\,\mathrm{d}x_i - \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\xi_i\,\mathrm{d}x_j$$

をみると、これは $\alpha = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} f_i\,\mathrm{d}x_i$ の外微分

$$\mathrm{d}\,\alpha = \sum_{i=1}^{n}\mathrm{d}\,f_i\wedge\mathrm{d}x_i = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\,\mathrm{d}x_j\wedge\mathrm{d}x_i$$

と $\xi = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\xi_i\frac{\partial}{\partial x_i}$ の成分から得られた “積” であるとみることができる。$\bigwedge^2 T_x^*M$ の元と T_xM の元の間の積を

$$(\mathrm{d}x_i\wedge\mathrm{d}x_j, \frac{\partial}{\partial x_k}) \longmapsto \sum_{k=1}^{n}\delta_{ki}\,\mathrm{d}x_j - \sum_{k=1}^{n}\delta_{kj}\,\mathrm{d}x_i$$

と考えると、$\mathrm{d}\,\alpha$ と ξ から上の項が得られる。この積は、外積 $\mathrm{d}x_i\wedge\mathrm{d}x_j$ について、先頭の $\mathrm{d}x_i$ と $\dfrac{\partial}{\partial x_k}$ の積を取り、外積の 2 番目以降の項は、先頭に移動させて積を取るものである。後に述べるようにこれを $i_\xi(\mathrm{d}\,\alpha)$ と書くと、

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\right)_{t=0}{\varphi_t}^*\alpha = \mathrm{d}(\alpha(\xi)) + i_\xi(\mathrm{d}\,\alpha)$$

となる。

定義 22.2 (内部積) $T_x^*(M)$ の p 次外積 $\bigwedge^p T_x^*(M)$ の基底 $\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_p}$ と $T_x(M)$ の基底 $\dfrac{\partial}{\partial x_k}$ の内部積を $\bigwedge^{p-1} T_x^*(M)$ の元として次で定義する。

$$i_{\frac{\partial}{\partial x_k}}(\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_p}) = \sum_{j=1}^{p}(-1)^{j-1}\sum_{k=1}^{n}\delta_{ki_j}\,\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_{j-1}}\wedge\mathrm{d}x_{i_{j+1}}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_p}$$

内部積は微分 p 形式 $\alpha = \displaystyle\sum_{i_1<\cdots<i_p} f_{i_1\cdots i_p}\,\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_p}$, ベクトル場 $\xi = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\xi_i\frac{\partial}{\partial x_i}$ に対し、次のように計算される。

$$i_\xi\alpha = \sum_{i_1<\cdots<i_p}\sum_{j=1}^{p}(-1)^{j-1}f_{i_1\cdots i_p}\xi_{i_j}\,\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_{j-1}}\wedge\mathrm{d}x_{i_{j+1}}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_p}$$

注意 22.3 定義 22.2 は座標近傍から定まる基底を用いているので、座標近傍のとり方によらないことを確かめなければならない。これは、次の問題で確かめる。

【問題 22.4】 (1) 微分 p 形式 α, 微分 q 形式 β の外積 $\alpha\wedge\beta$ に対し, $i_\xi(\alpha\wedge\beta) = (i_\xi\alpha)\wedge\beta + (-1)^p\alpha\wedge(i_\xi\beta)$ が成立することを示せ。

(2) $F : U \longrightarrow V$ をユークリッド空間の開集合 U, V の間の微分同相写像とする。V 上の微分 1 形式 α, V 上のベクトル場 ξ に対し、$F^*(i_\xi \alpha) = i_{F^{-1}{}_*\xi} F^* \alpha$ を示せ。

(3) $F : U \longrightarrow V$ をユークリッド空間の開集合 U, V の間の微分同相写像とする。V 上の微分 p 形式 α, V 上のベクトル場 ξ に対し、$F^*(i_\xi \alpha) = i_{F^{-1}{}_*\xi} F^* \alpha$ を示せ。

【問題 22.4 の解答】 (1) $\alpha = \displaystyle\sum_{i_1<\cdots<i_p} f_{i_1\cdots i_p}\,\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_p}$, $\beta = \displaystyle\sum_{j_1<\cdots<j_q} g_{j_1\cdots j_q}\,\mathrm{d}x_{j_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{j_q}$, $\xi = \displaystyle\sum_{i=1}^n \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ に対し、

$$
\begin{aligned}
& i_\xi(\alpha\wedge\beta) \\
&= i_\xi\Big(\sum_{i_1<\cdots<i_p}\sum_{j_1<\cdots<j_q} f_{i_1\cdots i_p} g_{j_1\cdots j_q}\,\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_p}\wedge\mathrm{d}x_{j_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{j_q}\Big) \\
&= \sum_{k=1}^{p}\sum_{i_1<\cdots<i_p}\sum_{j_1<\cdots<j_q} (-1)^k f_{i_1\cdots i_p} g_{j_1\cdots j_q}\xi_{i_k} \\
&\qquad \mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_{k-1}}\wedge\mathrm{d}x_{i_{k+1}}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_p}\wedge\mathrm{d}x_{j_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{j_q} \\
&\quad + \sum_{k=1}^{q}\sum_{i_1<\cdots<i_p}\sum_{j_1<\cdots<j_q} (-1)^{p+k} f_{i_1\cdots i_p} g_{j_1\cdots j_q}\xi_{j_k} \\
&\qquad \mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_p}\wedge\mathrm{d}x_{j_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{j_{k-1}}\wedge\mathrm{d}x_{j_{k+1}}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{j_q} \\
&= (i_\xi\alpha)\wedge\beta + (-1)^p\alpha\wedge(i_\xi\beta)
\end{aligned}
$$

(2) $F(y_1,\dots,y_n) = (x_1,\dots,x_n)$ とし、$\alpha = \displaystyle\sum_{i=1}^n f_i\,\mathrm{d}x_i$, $\xi = \displaystyle\sum_{i=1}^n \xi_i\frac{\partial}{\partial x_i}$ とするとき、$i_\xi\alpha = \displaystyle\sum_{i=1}^n f_i\xi_i$ である。一方、$F^*\alpha = \displaystyle\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n (f_i\circ F)\frac{\partial x_i}{\partial y_j}\,\mathrm{d}y_j$, $F^{-1}{}_*\xi = \displaystyle\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n(\xi_i\circ F)\frac{\partial y_j}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial y_j}$ だから、

$$
i_{F^{-1}{}_*\xi}F^*\alpha = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n (f_i\circ F)\frac{\partial x_i}{\partial y_j}(\xi_i\circ F)\frac{\partial y_j}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^n (f_i\circ F)(\xi_i\circ F) = F^*(i_\xi\alpha)
$$

となる。

(3) 微分 0 形式に対しては両辺 0 で正しい。V 上の微分 p 形式 α, 微分 q 形式 β, V 上のベクトル場 ξ に対し、$F^*(i_\xi\alpha) = i_{F^{-1}{}_*\xi}F^*\alpha$, $F^*(i_\xi\beta) = i_{F^{-1}{}_*\xi}F^*\beta$ を仮定すると,

$$
\begin{aligned}
F^*(i_\xi(\alpha\wedge\beta)) &= F^*((i_\xi\alpha)\wedge\beta + (-1)^p\alpha\wedge(i_\xi\beta)) \\
&= F^*(i_\xi\alpha)\wedge F^*\beta + (-1)^p F^*\alpha\wedge F^*(i_\xi\beta) \\
&= i_{F^{-1}{}_*\xi}F^*\alpha\wedge F^*\beta + (-1)^p F^*\alpha\wedge i_{F^{-1}{}_*\xi}F^*\beta \\
&= i_{F^{-1}{}_*\xi}(F^*\alpha\wedge F^*\beta) \\
&= i_{F^{-1}{}_*\xi}F^*(\alpha\wedge\beta)
\end{aligned}
$$

(2) により、微分 1 形式に対して正しいから、帰納法により、$f_{i_1\cdots i_p}\,\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_p}$ の形の単項式に対して正しい。単項式に対して正しいならば、単項式の線形和に対して正しいこともわかるから任意の微分 p 形式に対して正しい。

一般の微分 p 形式 α に対し、${\varphi_t}^*\alpha$ を考えることができる。これは、t に対し各点 x 上で余接空間 $T_x^*(M)$ の p 次外積 $\bigwedge^p T_x^*(M)$ の点を与えるものであるから、その微分 $\Big(\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\Big)_{t=0}{\varphi_t}^*\alpha$ が微分 p 形式として得られる。

定義 22.5 微分 p 形式 α に対し、微分 p 形式 $\Big(\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\Big)_{t=0}{\varphi_t}^*\alpha$ は、α の ξ によるリー微分と呼ばれ、$L_\xi\alpha$ と書かれる。

【問題 22.6】 微分 p 形式 α, 微分 q 形式 β, ベクトル場 ξ に対して、$L_\xi(\alpha\wedge\beta) =$

$(L_\xi\alpha)\wedge\beta+\alpha\wedge(L_\xi\beta)$ を示せ。

【問題 22.6 の解答】

$$
\begin{aligned}
&L_\xi(\alpha\wedge\beta)\\
&\qquad=\Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\Big)_{t=0}{\varphi_t}^*(\alpha\wedge\beta)\\
&\qquad=\Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\Big)_{t=0}({\varphi_t}^*\alpha\wedge{\varphi_t}^*\beta)\\
&\qquad=\big(\Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\Big)_{t=0}{\varphi_t}^*\alpha\big)\wedge\beta+\alpha\wedge\big(\Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\Big)_{t=0}{\varphi_t}^*\beta\big)\\
&\qquad=(L_\xi\alpha)\wedge\beta+\alpha\wedge(L_\xi\beta)
\end{aligned}
$$

【問題 22.7】　微分 p 形式 α, ベクトル場 ξ に対して次が成立することを示せ。

$$\mathrm{d}(L_\xi\alpha)=L_\xi\,\mathrm{d}\,\alpha$$

【問題 22.7 の解答】

$$\mathrm{d}(L_\xi\alpha)=\mathrm{d}\big(\Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\Big)_{t=0}{\varphi_t}^*\alpha\big)=\Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\Big)_{t=0}{\varphi_t}^*(\mathrm{d}\,\alpha)=L_\xi(\mathrm{d}\,\alpha)$$

微分０形式（関数）f, 微分１形式 α に対しすでに計算したように次が成立する。

$$
\begin{aligned}
L_\xi f&=\xi(f)=\mathrm{d}\,f(\xi)=i_\xi(\mathrm{d}\,f)\\
L_\xi\alpha&=\mathrm{d}(\alpha(\xi))+i_\xi(\mathrm{d}\,\alpha)=\mathrm{d}(i_\xi\alpha)+i_\xi(\mathrm{d}\,\alpha)
\end{aligned}
$$

一般の微分形式に対して次が成立する。

命題 22.8 (カルタンの公式) 微分 p 形式 α, ベクトル場 ξ に対して次が成立する。

$$L_\xi\alpha=\mathrm{d}(i_\xi\alpha)+i_\xi(\mathrm{d}\,\alpha)$$

証明　微分 p 形式、微分 q 形式に対して公式が成立していると仮定する。微分 p 形式 α、微分 q 形式 β の外積に対して

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{d}(i_\xi(\alpha\wedge\beta))+i_\xi(\mathrm{d}(\alpha\wedge\beta))\\
&=\mathrm{d}((i_\xi\alpha)\wedge\beta+(-1)^p\alpha\wedge(i_\xi\beta))+i_\xi((\mathrm{d}\,\alpha)\wedge\beta+(-1)^p\alpha\wedge(\mathrm{d}\,\beta))\\
&=\mathrm{d}(i_\xi\alpha)\wedge\beta+(-1)^{p-1}(i_\xi\alpha)\wedge\mathrm{d}\,\beta+(-1)^p(\mathrm{d}\,\alpha)\wedge(i_\xi\beta)+\alpha\wedge\mathrm{d}(i_\xi\beta)\\
&\quad+(i_\xi(\mathrm{d}\,\alpha))\wedge\beta+(-1)^{p+1}(\mathrm{d}\,\alpha)\wedge(i_\xi\beta)+(-1)^p(i_\xi\alpha)\wedge(\mathrm{d}\,\beta)+\alpha\wedge(i_\xi(\mathrm{d}\,\beta))\\
&=\mathrm{d}(i_\xi\alpha)\wedge\beta+\alpha\wedge\mathrm{d}(i_\xi\beta)+(i_\xi(\mathrm{d}\,\alpha))\wedge\beta+\alpha\wedge(i_\xi(\mathrm{d}\,\beta))\\
&=(\mathrm{d}(i_\xi\alpha)+i_\xi(\mathrm{d}\,\alpha))\wedge\beta+\alpha\wedge(\mathrm{d}(i_\xi\beta)+i_\xi(\mathrm{d}\,\beta))\\
&=(L_\xi\alpha)\wedge\beta+\alpha\wedge(L_\xi\beta)=L_\xi(\alpha\wedge\beta)
\end{aligned}
$$

微分１形式に対して公式は正しいから、帰納法により、$f_{i_1\cdots i_p}\,\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_p}$ の形の単項式に対して正しい。単項式に対して正しいならば、単項式の線形和に対して正しいこともわかるから任意の微分 p 形式に対して正しい。　■

【問題 22.9】　微分 p 形式 α, ベクトル場 ξ, η に対して次が成立することを示せ。

$$(L_\xi L_\eta-L_\eta L_\xi)\alpha=L_{[\xi,\eta]}\alpha$$

【問題 22.9 の解答】 微分０形式 f に対しては、$L_\xi L_\eta f-L_\eta L_\xi f=\xi(\eta(f))-\eta(\xi(f))=[\xi,\eta](f)=L_{[\xi,\eta]}f$ が成立する。微分１形式に対しては問題 22.1 により正しい。

微分 p 形式 α, 微分 q 形式 β に対して、$(L_\xi L_\eta - L_\eta L_\xi)\alpha = L_{[\xi,\eta]}\alpha$, $(L_\xi L_\eta - L_\eta L_\xi)\beta = L_{[\xi,\eta]}\beta$ が成立するとする。外積 $\alpha\wedge\beta$ に対して、

$$
\begin{aligned}
&(L_\xi L_\eta - L_\eta L_\xi)(\alpha\wedge\beta)\\
&= L_\xi(L_\eta(\alpha\wedge\beta)) - L_\eta(L_\xi(\alpha\wedge\beta))\\
&= L_\xi((L_\eta\alpha)\wedge\beta + \alpha\wedge(L_\eta\beta)) - L_\eta((L_\xi\alpha)\wedge\beta + \alpha\wedge(L_\xi\beta))\\
&= (L_\xi(L_\eta\alpha))\wedge\beta + (L_\eta\alpha)\wedge(L_\xi\beta) + (L_\xi\alpha)\wedge(L_\eta\beta) + \alpha\wedge(L_\xi(L_\eta\beta))\\
&\quad -(L_\eta(L_\xi\alpha))\wedge\beta - (L_\xi\alpha)\wedge(L_\eta\beta) - (L_\eta\alpha)\wedge(L_\xi\beta) - \alpha\wedge(L_\eta(L_\xi\beta))\\
&= (L_\xi(L_\eta\alpha) - L_\eta(L_\xi\alpha))\wedge\beta + \alpha\wedge(L_\xi(L_\eta\beta) - L_\eta(L_\xi\beta))\\
&= (L_{[\xi,\eta]}\alpha)\wedge\beta + \alpha\wedge(L_{[\xi,\eta]}\beta)\\
&= L_{[\xi,\eta]}(\alpha\wedge\beta)
\end{aligned}
$$

が成立する。従って、帰納法により、単項式に対して、成立し、その線形和に対して成立する。

【問題 22.10】 $i_\xi L_\eta\alpha - L_\eta i_\xi\alpha = i_{[\xi,\eta]}\alpha$ を示せ。

【問題 22.10 の解答】 微分 1 形式 $\alpha = \sum_{i=1}^n f_i\,\mathrm{d}x_i$ に対して、

$$
\begin{aligned}
&i_\xi L_\eta\alpha - L_\eta i_\xi\alpha\\
&= i_\xi\Big(\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\Big(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\eta_j + f_j\frac{\partial \eta_j}{\partial x_i}\Big)\,\mathrm{d}x_i\Big) - \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n \eta_i\frac{\partial}{\partial x_i}(f_j\xi_j)\\
&= \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\Big(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\eta_j\xi_i + f_j\frac{\partial \eta_j}{\partial x_i}\xi_i\Big) - \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n \eta_i\Big(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\xi_j + f_j\frac{\partial \xi_j}{\partial x_i}\Big)\\
&= \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\Big(f_j\Big(\xi_i\frac{\partial \eta_j}{\partial x_i} - \eta_i\frac{\partial \xi_j}{\partial x_i}\Big)\Big)\\
&= i_{[\xi,\eta]}\alpha
\end{aligned}
$$

微分 p 形式 α, 微分 q 形式 β に対して、$(i_\xi L_\eta - L_\eta i_\xi)\alpha = i_{[\xi,\eta]}\alpha$, $(i_\xi L_\eta - L_\eta i_\xi)\beta = i_{[\xi,\eta]}\beta$ が成立するとする。外積 $\alpha\wedge\beta$ に対して、

$$
\begin{aligned}
&(i_\xi L_\eta - L_\eta i_\xi)(\alpha\wedge\beta)\\
&= i_\xi(L_\eta(\alpha\wedge\beta)) - L_\eta(i_\xi(\alpha\wedge\beta))\\
&= i_\xi((L_\eta\alpha)\wedge\beta + \alpha\wedge(L_\eta\beta)) - L_\eta((i_\xi\alpha)\wedge\beta + (-1)^p\alpha\wedge(i_\xi\beta))\\
&= (i_\xi(L_\eta\alpha))\wedge\beta + (-1)^p(L_\eta\alpha)\wedge(i_\xi\beta) + (i_\xi\alpha)\wedge(L_\eta\beta) + (-1)^p\alpha\wedge(i_\xi(L_\eta\beta))\\
&\quad -(L_\eta(i_\xi\alpha))\wedge\beta - (i_\xi\alpha)\wedge(L_\eta\beta) - (-1)^p(L_\eta\alpha)\wedge(i_\xi\beta) - (-1)^p\alpha\wedge(L_\eta(i_\xi\beta))\\
&= (i_\xi(L_\eta\alpha) - L_\eta(i_\xi\alpha))\wedge\beta + (-1)^p\alpha\wedge(i_\xi(L_\eta\beta) - L_\eta(i_\xi\beta))\\
&= (i_{[\xi,\eta]}\alpha)\wedge\beta + (-1)^p\alpha\wedge(i_{[\xi,\eta]}\beta)\\
&= i_{[\xi,\eta]}(\alpha\wedge\beta)
\end{aligned}
$$

が成立する。従って、帰納法により、単項式に対して、成立し、その線形和に対して成立する。

【問題 22.11】 (1) $\boldsymbol{R}^3$ 上の微分 3 形式 $\omega = \mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2\wedge\mathrm{d}x_3$ を考える。線形ベクトル場 $\xi = \sum_{i,j=1}^3 a_{ij}x_j\frac{\partial}{\partial x_i}$ が $L_\xi\omega = 0$ を満たすための条件を求めよ。

(2) $\boldsymbol{R}^3$ 上の微分 2 形式 $\alpha = x_1\,\mathrm{d}x_2\wedge\mathrm{d}x_3 - x_2\,\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_3 + x_3\,\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2$ を考える。線形ベクトル場 $\xi = \sum_{i,j=1}^3 a_{ij}x_j\frac{\partial}{\partial x_i}$ が $L_\xi\alpha = 0$ を満たすための条件を求めよ。

【問題 22.11 の解答】 (1)

$$
\begin{aligned}
L_\xi\omega &= \mathrm{d}(i_\xi\omega) + i_\xi(\mathrm{d}\,\omega) = \mathrm{d}(i_\xi\omega)\\
&= \mathrm{d}(\xi_1\,\mathrm{d}x_2\wedge\mathrm{d}x_3 - \xi_2\,\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_3 + \xi_3\,\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2)\\
&= \sum_{i=1}^3\frac{\partial \xi_i}{\partial x_i}\omega = \sum_{i=1}^3 a_{ii}\omega
\end{aligned}
$$

だから、$\sum_{i=1}^3 a_{ii} = 0$ が条件である。

(2)

$$
\begin{aligned}
&L_\xi\alpha = \mathrm{d}(i_\xi\alpha) + i_\xi(\mathrm{d}\,\alpha)\\
&= \mathrm{d}(x_1\xi_2\,\mathrm{d}x_3 - x_1\xi_3\,\mathrm{d}x_2 - x_2\xi_1\,\mathrm{d}x_3 + x_2\xi_3\,\mathrm{d}x_1 + x_3\xi_1\,\mathrm{d}x_2 - x_3\xi_2\,\mathrm{d}x_1) + 3i_\xi\omega\\
&= \xi_2\,\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_3 + x_1\,\mathrm{d}\,\xi_2\wedge\mathrm{d}x_3 - \xi_3\,\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2 - x_1\,\mathrm{d}\,\xi_3\wedge\mathrm{d}x_2\\
&\quad -\xi_1\,\mathrm{d}x_2\wedge\mathrm{d}x_3 - x_2\,\mathrm{d}\,\xi_1\wedge\mathrm{d}x_3 + \xi_3\,\mathrm{d}x_2\wedge\mathrm{d}x_1 + x_2\,\mathrm{d}\,\xi_3\wedge\mathrm{d}x_1\\
&\quad +\xi_1\,\mathrm{d}x_3\wedge\mathrm{d}x_2 + x_3\,\mathrm{d}\,\xi_1\wedge\mathrm{d}x_2 - \xi_2\,\mathrm{d}x_3\wedge\mathrm{d}x_1 - x_3\,\mathrm{d}\,\xi_2\wedge\mathrm{d}x_1)\\
&\quad +3\xi_1\,\mathrm{d}x_2\wedge\mathrm{d}x_3 - 3\xi_2\,\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_3 + 3\xi_3\,\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2\\
&= \xi_1\,\mathrm{d}x_2\wedge\mathrm{d}x_3 - \xi_2\,\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_3 + \xi_3\,\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2\\
&\quad x_1(a_{21}\,\mathrm{d}x_1 + a_{22}\,\mathrm{d}x_2)\wedge\mathrm{d}x_3 - x_1(a_{31}\,\mathrm{d}x_1 + a_{33}\,\mathrm{d}x_3)\wedge\mathrm{d}x_2\\
&\quad -x_2(a_{11}\,\mathrm{d}x_1 + a_{12}\,\mathrm{d}x_2)\wedge\mathrm{d}x_3 + x_2(a_{32}\,\mathrm{d}x_2 + a_{33}\,\mathrm{d}x_3)\wedge\mathrm{d}x_1\\
&\quad +x_3\,\mathrm{d}(a_{11}\,\mathrm{d}x_1 + a_{13}\,\mathrm{d}x_3)\wedge\mathrm{d}x_2 - x_3(a_{22}\,\mathrm{d}x_2 + a_{23}\,\mathrm{d}x_3)\wedge\mathrm{d}x_1\\
&= (a_{11} + a_{22} + a_{33})(x_1\,\mathrm{d}x_2\wedge\mathrm{d}x_3 - x_2\,\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_3 + x_3\,\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2)
\end{aligned}
$$

だから、$\displaystyle\sum_{i=1}^{3} a_{ii} = 0$ が条件である。

(2) は次のようにして (1) から導くこともできる。$L_\xi\omega = \mathrm{d}(i_\xi\omega) = 0$ とする。$\displaystyle\varepsilon = \sum_{i,j=1}^{3}\delta_{ij}x_j\frac{\partial}{\partial x_i}$ とする。$[\varepsilon,\xi] = 0$ であるから、

$$
0 = i_{[\varepsilon,\xi]}\omega = i_\varepsilon L_\xi\omega - L_\xi i_\varepsilon\omega = -L_\xi i_\varepsilon\omega = -L_\xi\alpha
$$

従って、$L_\xi\alpha = 0$ となる。逆に、$L_\xi\alpha = 0$ ならば、$0 = \mathrm{d}(L_\xi\alpha) = L_\xi(\mathrm{d}\,\alpha) = 3L_\xi\omega$ で $L_\xi\omega = 0$ となる。

この計算を見ると、n 次元ユークリッド空間上の n 形式 $\mathrm{d}x_1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_n$, ベクトル場 $\displaystyle\varepsilon = \sum_{i,j=1}^{n}\delta_{ij}x_j\frac{\partial}{\partial x_i}$ に対して

$$
\alpha = i_\varepsilon\omega = \sum_{i=1}^{n}(-1)^i x_i\,\mathrm{d}x_1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i-1}\wedge\mathrm{d}x_{i+1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_n
$$

とおくと、$\displaystyle\xi = \sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_j\frac{\partial}{\partial x_i}$ について、$L_\xi\omega = 0$ となる条件と $L_\xi\alpha = 0$ となる条件はともに $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}a_{ii} = 0$ であることがわかる。

【問題 22.12】 2 次元球面 S^2 に対して問題 13.3（34 ページ）ののステレオグラフ射影 $\pi_N : S^2\setminus\{p_N\}\longrightarrow \boldsymbol{R}^2$, $\pi_S : S^2\setminus\{p_S\}\longrightarrow \boldsymbol{R}^2$ を考える。

(1) $\boldsymbol{R}^2$ 上の多項式係数のベクトル場の $\displaystyle\xi = P(v_1,v_2)\frac{\partial}{\partial v_1} + Q(v_1,v_2)\frac{\partial}{\partial v_2}$ について $({\pi_N}^{-1})_*\xi$ が S^2 上の微分可能ベクトル場に拡張するための条件を求めよ。

(2) $\boldsymbol{R}^2$ 上の多項式係数の微分 1 形式 $\alpha = P(v_1,v_2)\,\mathrm{d}\,v_1 + Q(v_1,v_2)\,\mathrm{d}\,v_2$ について ${\pi_N}^*\alpha$ が S^2 上の微分可能微分形式に拡張するための条件を求めよ。

【問題 22.12 の解答】 $\displaystyle(u_1,u_2) = (\frac{v_1}{{v_1}^2+{v_2}^2},\frac{v_2}{{v_1}^2+{v_2}^2})$, $\displaystyle(v_1,v_2) = (\frac{u_1}{{u_1}^2+{u_2}^2},\frac{u_2}{{u_1}^2+{u_2}^2})$ となっている。

(1)

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u_1}{\partial v_1}\frac{\partial}{\partial u_1} + \frac{\partial u_2}{\partial v_1}\frac{\partial}{\partial u_2} &= \frac{\partial}{\partial v_1}(\frac{v_1}{{v_1}^2+{v_2}^2})\frac{\partial}{\partial u_1} + \frac{\partial}{\partial v_1}(\frac{v_2}{{v_1}^2+{v_2}^2})\frac{\partial}{\partial u_2}\\
&= \frac{{v_2}^2-{v_1}^2}{({v_1}^2+{v_2}^2)^2}\frac{\partial}{\partial u_1} + \frac{-2v_1v_2}{({v_1}^2+{v_2}^2)^2}\frac{\partial}{\partial u_2}\\
&= ({u_2}^2-{u_1}^2)\frac{\partial}{\partial u_1} - 2u_1u_2\frac{\partial}{\partial u_2}\\
\frac{\partial u_1}{\partial v_2}\frac{\partial}{\partial u_1} + \frac{\partial u_2}{\partial v_2}\frac{\partial}{\partial u_2} &= \frac{\partial}{\partial v_2}(\frac{v_1}{{v_1}^2+{v_2}^2})\frac{\partial}{\partial u_1} + \frac{\partial}{\partial v_2}(\frac{v_2}{{v_1}^2+{v_2}^2})\frac{\partial}{\partial u_2}\\
&= \frac{-2v_1v_2}{({v_1}^2+{v_2}^2)^2}\frac{\partial}{\partial u_1} + \frac{{v_1}^2-{v_2}^2}{({v_1}^2+{v_2}^2)^2}\frac{\partial}{\partial u_2}\\
&= -2u_1u_2\frac{\partial}{\partial u_1} + ({u_1}^2-{u_2}^2)\frac{\partial}{\partial u_2}
\end{aligned}
$$

だから

$$\begin{aligned}\pi_{S*}({\pi_N}^{-1})_*\xi = &P(\frac{u_1}{{u_1}^2+{u_2}^2},\frac{u_2}{{u_1}^2+{u_2}^2})(({u_2}^2-{u_1}^2)\frac{\partial}{\partial u_1}-2u_1u_2\frac{\partial}{\partial u_2})\\ &+Q(\frac{u_1}{{u_1}^2+{u_2}^2},\frac{u_2}{{u_1}^2+{u_2}^2})(-2u_1u_2\frac{\partial}{\partial u_1}+({u_1}^2-{u_2}^2)\frac{\partial}{\partial u_2})\end{aligned}$$

P, Q の次数の大きい方を k とし, k 次の部分を P_k, Q_k とすると、$\pi_{S*}({\pi_N}^{-1})_*\xi$ の $-k+2$ 次の項が次で計算される。

$$\begin{aligned}&\frac{({u_2}^2-{u_1}^2)P_k(u_1,u_2)-2u_1u_2Q_k(u_1,u_2)}{({u_1}^2+{u_2}^2)^k}\frac{\partial}{\partial u_1}\\ &+\frac{-2u_1u_2P_k(u_1,u_2)+({u_1}^2-{u_2}^2)Q_k(u_1,u_2)}{({u_1}^2+{u_2}^2)^k}\frac{\partial}{\partial u_2}\end{aligned}$$

$k>2$ とすると、係数の分母は $2k$ 次だから、係数が $(u_1,u_2)=(0,0)$ に連続に拡張するためには、分子（$k+2$ 次）がともに 0 であることが必要であるが、これは $P_k=Q_k=0$ でなければ不可能である。（次の $k=2$ の計算を参照。）

$k=2$ とすると、

$$\begin{aligned}&({u_2}^2-{u_1}^2)P_2(u_1,u_2)-2u_1u_2Q_2(u_1,u_2)=A({u_1}^2+{u_2}^2)^2\\ &-2u_1u_2P_2(u_1,u_2)+({u_1}^2-{u_2}^2)Q_2(u_1,u_2)=B({u_1}^2+{u_2}^2)^2\end{aligned}$$

から、

$$\begin{aligned}P_2(u_1,u_2)&=({u_2}^2-{u_1}^2)A-2u_1u_2B\\ Q_2(u_1,u_2)&=-2u_1u_2A-({u_2}^2-{u_1}^2)B\end{aligned}$$

のときに拡張する。P, Q の 2 次の項は上の形に限るから、これを引き去った 1 次同次の項を考える。$P_1(u_1,u_2)=a_1u_1+a_2u_2$, $Q_1(u_1,u_2)=b_1u_1+b_2u_2$ とすると、

$$\begin{aligned}&({u_2}^2-{u_1}^2)P_1(u_1,u_2)-2u_1u_2Q_1(u_1,u_2)\\ &\quad=({u_2}^2-{u_1}^2)(a_1u_1+a_2u_2)-2u_1u_2(b_1u_1+b_2u_2)\\ &\quad=-a_1{u_1}^3-(a_2+2b_1){u_1}^2u_2+(a_1-2b_2)u_1{u_2}^2+a_2{u_2}^3\\ &\quad=-a_1u_1({u_1}^2+{u_2}^2)-(a_2+2b_1)({u_1}^2+{u_2}^2)u_2\\ &\qquad\quad+(2a_1-2b_2)u_1{u_2}^2+(2a_2+2b_1){u_2}^3\\ &-2u_1u_2P_1(u_1,u_2)+({u_1}^2-{u_2}^2)Q_1(u_1,u_2)\\ &\quad=-2u_1u_2(a_1u_1+a_2u_2)+({u_1}^2-{u_2}^2)(b_1u_1+b_2u_2)\\ &\quad=b_1{u_1}^3+(-2a_1+b_2){u_1}^2u_2+(-2a_2-b_1)u_1{u_2}^2-b_2{u_2}^3\\ &\quad=b_1u_1({u_1}^2+{u_1}^2)+(-2a_1+b_2)({u_1}^2+{u_2}^2)u_2\\ &\qquad\quad+(-2a_2-2b_1)u_1{u_2}^2+(2a_1-2b_2){u_2}^3\end{aligned}$$

従って $P_1(u_1,u_2)=a_1u_1+a_2u_2$, $Q_1(u_1,u_2)=-a_2u_1+a_1u_2$ となればよい。0 次のベクトル場は拡張する。

従って、求めるベクトル場の一般形は

$$\begin{aligned}&\{({v_2}^2-{v_1}^2)A-2v_1v_2B+a_1v_1+a_2v_2+c_1\}\frac{\partial}{\partial v_1}\\ &+\{-2v_1v_2A-({v_2}^2-{v_1}^2)B-a_2v_1+a_1v_2+c_2\}\frac{\partial}{\partial v_2}\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\mathrm{d}v_1&=\frac{\partial v_1}{\partial u_1}\mathrm{d}u_1+\frac{\partial v_1}{\partial u_2}\mathrm{d}u_2=\frac{\partial}{\partial u_1}(\frac{u_1}{{u_1}^2+{u_2}^2})\mathrm{d}u_1+\frac{\partial}{\partial u_2}(\frac{u_1}{{u_1}^2+{u_2}^2})\mathrm{d}u_2\\ &=\frac{{u_2}^2-{u_1}^2}{({u_1}^2+{u_2}^2)^2}\mathrm{d}u_1+\frac{-2u_1u_2}{({u_1}^2+{u_2}^2)^2}\mathrm{d}u_2\\ \mathrm{d}v_2&=\frac{\partial v_2}{\partial u_1}\mathrm{d}u_1+\frac{\partial v_2}{\partial u_2}\mathrm{d}u_2=\frac{\partial}{\partial u_1}(\frac{u_2}{{u_1}^2+{u_2}^2})\mathrm{d}u_1+\frac{\partial}{\partial u_2}(\frac{u_2}{{u_1}^2+{u_2}^2})\mathrm{d}u_2\\ &=\frac{-2u_1u_2}{({u_1}^2+{u_2}^2)^2}\mathrm{d}u_1+\frac{{u_1}^2-{u_2}^2}{({u_1}^2+{u_2}^2)^2}\mathrm{d}u_2\end{aligned}$$

だから

$$\begin{aligned}&{\pi_S}^{-1*}(\pi_N)^*\alpha\\ &=P(\frac{u_1}{{u_1}^2+{u_2}^2},\frac{u_2}{{u_1}^2+{u_2}^2})(\frac{{u_2}^2-{u_1}^2}{({u_1}^2+{u_2}^2)^2}\mathrm{d}u_1+\frac{-2u_1u_2}{({u_1}^2+{u_2}^2)^2}\mathrm{d}u_2)\\ &\quad+Q(\frac{u_1}{{u_1}^2+{u_2}^2},\frac{u_2}{{u_1}^2+{u_2}^2})(\frac{-2u_1u_2}{({u_1}^2+{u_2}^2)^2}\mathrm{d}u_1+\frac{{u_1}^2-{u_2}^2}{({u_1}^2+{u_2}^2)^2}\mathrm{d}u_2)\end{aligned}$$

P_k, Q_k を最高次の部分として、$\pi_S{}^{-1*}(\pi_N)^*\alpha$ の $-k-2$ 次の項が次で計算される。

$$\frac{(u_2{}^2-u_1{}^2)P_k(u_1,u_2)-2u_1u_2Q_k(u_1,u_2)}{(u_1{}^2+u_2{}^2)^{2+k}}\,\mathrm{d}u_1 \\ +\frac{-2u_1u_2P_k(u_1,u_2)+(u_1{}^2-u_2{}^2)Q_k(u_1,u_2)}{(u_1{}^2+u_2{}^2)^{2+k}}\,\mathrm{d}u_2$$

$k \geqq 0$ とすると、係数の分母は $2k+4$ 次だから、係数が $(u_1,u_2)=(0,0)$ に連続に拡張するためには、分子（$k+2$ 次）がともに 0 であることが必要であるが、これは $P_k=Q_k=0$ でなければ不可能である。従って、多項式係数の微分形式は S^2 に拡張しない。

定義 22.13 (微分形式のベクトル場における値) 微分 p 形式 α, ベクトル場 $\xi_1, \ldots, \xi_p$ に対し、$\alpha(\xi_1,\ldots,\xi_p)=i_{\xi_p}\cdots i_{\xi_1}\alpha$ と定義する（関数 f に対し $i_\xi\,\mathrm{d}f=\xi(f)$ である)。

注意 22.14 $\alpha(\xi_1,\ldots,\xi_p)=\dfrac{1}{p!}i_{\xi_p}\cdots i_{\xi_1}\alpha$ とする定義もある。

【問題 22.15】 命題 22.8, 問題 22.10 を用いて、次を示せ（これらを外微分、リー微分の定義とすることもある)。

(1) 微分 1 形式 α に対し、$(\mathrm{d}\alpha)(\xi_1,\xi_2)=\xi_1(\alpha(\xi_2))-\xi_2(\alpha(\xi_1))-\alpha([\xi_1,\xi_2])$.

(2) 微分 p 形式 α に対し、

$$(\mathrm{d}\alpha)(\xi_1,\ldots,\xi_{p+1}) \\ =\sum_{i=1}^{p+1}(-1)^{i-1}\xi_i(\alpha(\xi_1,\ldots,\xi_{i-1},\xi_{i+1},\ldots,\xi_{p+1})) \\ +\sum_{i<j}(-1)^{i+j}\alpha([\xi_i,\xi_j],\xi_1,\ldots,\xi_{i-1},\xi_{i+1},\ldots,\xi_{j-1},\xi_{j+1},\ldots,\xi_{p+1})$$

(3)

$$(L_\xi\alpha)(\xi_1,\ldots,\xi_p) \\ =\xi\alpha(\xi_1,\ldots,\xi_p)-\sum_{i=1}^{p}\alpha(\xi_1,\ldots,\xi_{i-1},[\xi,\xi_i],\xi_{i+1},\ldots,\xi_p)$$

【問題 22.15 の解答】

(1) 問題 22.10 の式 $i_{\xi_1}L_{\xi_2}\alpha-L_{\xi_2}i_{\xi_1}\alpha=i_{[\xi_1,\xi_2]}\alpha$ について命題 22.8 を用いると、$i_{\xi_1}i_{\xi_2}\,\mathrm{d}\alpha+i_{\xi_1}\,\mathrm{d}\,i_{\xi_2}\alpha-i_{\xi_2}\,\mathrm{d}\,i_{\xi_1}\alpha-\mathrm{d}\,i_{\xi_2}i_{\xi_1}\alpha=i_{[\xi_1,\xi_2]}\alpha$ が得られる。

α が微分 1 形式のとき、定義 22.13 により書き換えると $(\mathrm{d}\alpha)(\xi_2,\xi_1)+\xi_1(\alpha(\xi_2))-\xi_2(\alpha(\xi_1))=i_{[\xi_1,\xi_2]}\alpha$ となるが、ξ_1, ξ_2 を入れ替えて、$(\mathrm{d}\alpha)(\xi_1,\xi_2)=\xi_1(\alpha(\xi_2))-\xi_2(\alpha(\xi_1))-\alpha([\xi_1,\xi_2])$ を得る。

(2) 問題 22.10 の式 $i_{\xi_2}i_{\xi_1}\,\mathrm{d}\alpha=i_{\xi_1}\,\mathrm{d}\,i_{\xi_2}\alpha-i_{\xi_2}\,\mathrm{d}\,i_{\xi_1}\alpha+\mathrm{d}\,i_{\xi_1}i_{\xi_2}\alpha-i_{[\xi_1,\xi_2]}\alpha$ を用いて、

$$i_{\xi_{p+1}}\cdots i_{\xi_1}\,\mathrm{d}\alpha \\ =\sum_{i=1}^{p+1}(-1)^{i-1}i_{\xi_i}\,\mathrm{d}(i_{\xi_{p+1}}\cdots i_{\xi_{i+1}}i_{\xi_{i-1}}\cdots i_{\xi_1}\alpha) \\ +\sum_{i<j}(-1)^{i+j}i_{\xi_{p+1}}\cdots i_{\xi_{j+1}}i_{\xi_{j-1}}\cdots i_{\xi_{i+1}}i_{\xi_{i-1}}\cdots i_{\xi_1}i_{[\xi_i,\xi_j]}\alpha$$

を p についての帰納法で示す。$p-1$ 次以下の微分形式に対して正しいと仮定する。α を微分 p 形式とする。

微分 $p-1$ 形式 $i_{\xi_1}\alpha$ について、

$$i_{\xi_{p+1}}\cdots i_{\xi_2}\,\mathrm{d}\,i_{\xi_1}\alpha \\ =\sum_{i=2}^{p+1}(-1)^{i}i_{\xi_i}\,\mathrm{d}(i_{\xi_{p+1}}\cdots i_{\xi_{i+1}}i_{\xi_{i-1}}\cdots i_{\xi_2}i_{\xi_1}\alpha) \\ +\sum_{1<i<j}(-1)^{i+j}i_{\xi_{p+1}}\cdots i_{\xi_{j+1}}i_{\xi_{j-1}}\cdots i_{\xi_{i+1}}i_{\xi_{i-1}}\cdots i_{\xi_2}i_{[\xi_i,\xi_j]}i_{\xi_1}\alpha$$

また、微分 $p-1$ 形式 $i_{\xi_2}\alpha$ について、

$$\begin{aligned}
&-i_{\xi_{p+1}}\cdots i_{\xi_3} i_{\xi_1}\,\mathrm{d}\,i_{\xi_2}\alpha\\
=&-i_{\xi_1}\,\mathrm{d}(i_{\xi_{p+1}}\cdots i_{\xi_3} i_{\xi_2}\alpha)-\sum_{i=3}^{p+1}(-1)^i i_{\xi_i}\,\mathrm{d}(i_{\xi_{p+1}}\cdots i_{\xi_{i+1}} i_{\xi_{i-1}}\cdots i_{\xi_3} i_{\xi_1} i_{\xi_2}\alpha)\\
&-\sum_{2<j}(-1)^j i_{\xi_{p+1}}\cdots i_{\xi_{j+1}} i_{\xi_{j-1}}\cdots i_{\xi_3} i_{[\xi_1,\xi_j]} i_{\xi_2}\alpha\\
&-\sum_{2<i<j}(-1)^{i+j} i_{\xi_{p+1}}\cdots i_{\xi_{j+1}} i_{\xi_{j-1}}\cdots i_{\xi_{i+1}} i_{\xi_{i-1}}\cdots i_{\xi_3} i_{\xi_1} i_{[\xi_i,\xi_j]} i_{\xi_2}\alpha
\end{aligned}$$

微分 $p-1$ 形式 $i_{\xi_1} i_{\xi_2}\alpha$ について、

$$\begin{aligned}
&i_{\xi_{p+1}}\cdots i_{\xi_3}\,\mathrm{d}\,i_{\xi_1} i_{\xi_2}\alpha\\
=&-i_{\xi_{p+1}}\cdots i_{\xi_3}\,\mathrm{d}\,i_{\xi_2} i_{\xi_1}\alpha\\
=&-\sum_{i=3}^{p+1}(-1^{i-1} i_{\xi_i}\,\mathrm{d}(i_{\xi_{p+1}}\cdots i_{\xi_{i+1}} i_{\xi_{i-1}}\cdots i_{\xi_3} i_{\xi_2} i_{\xi_1}\alpha)\\
&-\sum_{2<i<j}(-1)^{i+j} i_{\xi_{p+1}}\cdots i_{\xi_{j+1}} i_{\xi_{j-1}}\cdots i_{\xi_{i+1}} i_{\xi_{i-1}}\cdots i_{\xi_3} i_{[\xi_i,\xi_j]} i_{\xi_2} i_{\xi_1}\alpha
\end{aligned}$$

従って、

$$\begin{aligned}
&i_{\xi_{p+1}}\cdots i_{\xi_3}(i_{\xi_2} i_{\xi_1}\,\mathrm{d}\,\alpha)\\
=&\,i_{\xi_{p+1}}\cdots i_{\xi_3}(i_{\xi_1}\,\mathrm{d}\,i_{\xi_2}\alpha - i_{\xi_2}\,\mathrm{d}\,i_{\xi_1}\alpha + \mathrm{d}\,i_{\xi_1} i_{\xi_2}\alpha - i_{[\xi_1,\xi_2]}\alpha)\\
=&\sum_{i=1}^{p+1}(-1)^{i-1} i_{\xi_i}\,\mathrm{d}(i_{\xi_{p+1}}\cdots i_{\xi_{i+1}} i_{\xi_{i-1}}\cdots i_{\xi_1}\alpha)\\
&+\sum_{i<j}(-1)^{i+j} i_{\xi_{p+1}}\cdots i_{\xi_{j+1}} i_{\xi_{j-1}}\cdots i_{\xi_{i+1}} i_{\xi_{i-1}}\cdots i_{\xi_1} i_{[\xi_i,\xi_j]}\alpha
\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}
&i_{\xi_p}\cdots i_{\xi_1} L_\xi\alpha\\
=&\,i_{\xi_p}\cdots i_{\xi_2} i_{[\xi_1,\xi]}\alpha + i_{\xi_p}\cdots i_{\xi_2} L_\xi i_{\xi_1}\alpha\\
=&\,i_{\xi_p}\cdots i_{[\xi_1,\xi]}\alpha + i_{\xi_p}\cdots i_{\xi_3} i_{[\xi_2,\xi]} i_{\xi_1}\alpha + i_{\xi_p}\cdots i_{\xi_3} L_\xi i_{\xi_2} i_{\xi_1}\alpha\\
=&\,\ldots\\
=&\sum_{i=1}^{n} i_{\xi_p}\cdots i_{\xi_{i+1}} i_{[\xi_i,\xi]} i_{\xi_{i-1}}\cdots i_{\xi_1}\alpha + L_\xi i_{\xi_p}\cdots i_{\xi_1}\alpha\\
=&\,\xi\alpha(\xi_1,\ldots,\xi_p)-\sum_{i=1}^{p}\alpha(\xi_1,\ldots,\xi_{i-1},[\xi,\xi_i],\xi_{i+1},\ldots,\xi_p)
\end{aligned}$$

23　リー群

群 G が多様体の構造をもち、群演算 $G\times G\longrightarrow G$ が C^∞ 級写像となるとき、G はリー群と呼ばれる。このとき、陰関数定理を用いると、逆元をとる演算 $G\longrightarrow G$ は C^∞ 級写像となることがわかる（多様体入門・問題 4.3.3 参照)。

G の元 g による左移動 $L_g : G\longrightarrow G$ は $L_g(h)=gh$ で定義される。

リー群 G の単位元 $\mathbf{1}$ における接ベクトル $v\in T_{\mathbf{1}}G$ に対し、各点 $h\in G$ において接ベクトル $(L_h)_*v\in T_hG$ を与える対応は左不変ベクトル場 ξ $((L_g)_*\xi=\xi)$ を定める。左不変ベクトル場の全体 $\mathfrak{g}$ と $T_{\mathbf{1}}G$ は同型なベクトル空間である。左不変ベクトル場 ξ,η のブラケット積 $[\xi,\eta]$ は、左不変ベクトル場となる（多様体入門・問題 8.2.6 参照)。

単位元 $\mathbf{1}$ における余接空間 $T^*_{\mathbf{1}}G$ の p 次外積 $\bigwedge^p T^*_{\mathbf{1}}G$ の元 a に対し、$(L_h)^*a$ は $\bigwedge^p T^*_{h^{-1}}G$ の元である。各点 $h^{-1}\in G$ において $(L_h)^*a$ を与える対応は左不変 p 形式 α $((L_g)^*\alpha=\alpha)$ を定める。

【問題 23.1】　左不変形式 α と左不変ベクトル場 ξ の内部積 $i_\xi\alpha$ は左不変形式となることを示せ。

【問題 23.1 の解答】 問題 22.4(3) により,

$$(L_g)^*(i_\xi\alpha)=i_{(L_g{}^{-1})_*\xi}(L_g)^*\alpha=i_\xi\alpha$$

左不変形式 α の外微分 $\mathrm{d}\,\alpha$ は左不変形式であるが、このような計算には前節の計算が役に立つ。

便利な事情は、次の事柄である。

$\mathfrak{g} \cong T_{\mathbf{1}}G$ の基底 $\{e_1, \dots, e_n\}$ を１つとる。ブラケット積 $[e_i, e_j]$ はそれぞれ $[e_i, e_j] = \sum_k c_{ij}^k e_k$ の形で計算されているとする。余接空間 $T_{\mathbf{1}}G$ には、$\{e_1, \dots, e_n\}$ の双対基底 $\{e_1^*, \dots, e_n^*\}$ を考えることができる。これに対して $\mathrm{d}(e_k^*)$ を問題 22.15(1) により計算すると次のようになる。

$$(\mathrm{d}(e_k^*))(e_i, e_j) = e_i(e_k^*(e_j)) - e_j(e_k^*(e_i)) - e_k^*([e_i, e_j])$$

ここで、$e_k^*(e_j) = \delta_{kj}, e_k^*(e_i) = \delta_{ki}$ は定数関数だから、その方向微分 $e_i(e_k^*(e_j))$, $e_j(e_k^*(e_i))$ は 0 である。従って

$$(\mathrm{d}(e_k^*))(e_i, e_j) = -e_k^*([e_i, e_j]) = -e_k^*(\sum_k c_{ij}^k e_k) = -c_{ij}^k$$

となる。

$GL(N; \boldsymbol{R})$ の部分群として行列で表されるリー群 G に対して、行列 $A \in T_{\mathbf{1}}(G) \subset T_{\mathbf{1}}(GL(N; \boldsymbol{R}) \cong \boldsymbol{R}^{N^2}$ で表される左不変ベクトル場 $A \in \mathfrak{g}$ が G 上に生成するフローは $\varphi_t^A(B) = Be^{tA}$ と書かれる。従って、左不変ベクトル場 $A \in \mathfrak{g}$ の $B \in G$ における値は、$A_{(B)} = \left(\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\right)_{t=0} Be^{tA} = BA \in T_BG \subset T_B(GL(N; \boldsymbol{R}) \cong \boldsymbol{R}^{N^2}$ と書かれる。ここで、左不変ベクトル場 A_1, A_2 のブラケット積は次のように計算される。

$$\begin{aligned}
[A_1, A_2]_{(B)} &= \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\right)_{t=0} (\varphi_{-t}^{A_1})_* A_{2(\varphi_t^{A_1}(B))} \\
&= \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\right)_{t=0} (\varphi_{-t}^{A_1})_* A_{2(Be^{tA_1})} \\
&= \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\right)_{t=0} (Be^{tA_1} A_2 e^{-tA_1}) = B(A_1A_2 - A_2A_1)
\end{aligned}$$

従って、左不変ベクトル場 A_1, A_2 のブラケット積は行列の交換子 $[A_1, A_2] = A_1A_2 - A_2A_1$ と一致する。

【問題 23.2】　(1) $SO(3)$ のリー代数 $\mathfrak{so}(3) \cong T_{\mathbf{1}}SO(3)$ は 3×3 交代行列 $({}^tA + A = 0)$ で表される。基底 $e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ に対し、$[e_i, e_j]$ を計算せよ。左不変微分１形式の基底を双対基底 e_1^*, e_2^*, e_3^* とするとき、$\mathrm{d}\,e_i^*$ を求めよ。

(2) $SL(2; \boldsymbol{R})$ のリー代数 $\mathfrak{sl}(2; \boldsymbol{R}) \cong T_{\mathbf{1}}SL(2; \boldsymbol{R})$ はトレースが 0 の 2×2 行列 $(\mathrm{Tr}\,A = 0)$ で表される。基底 $H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $S = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ に対し、これらのブラケット積を計算せよ。左不変微分１形式の基底を双対基底 H^*, S^*, U^* とするとき、それらの外微分を求めよ。

【問題 23.2 の解答】 (1) $[e_1, e_2] = e_3$, $[e_1, e_3] = -e_2$, $[e_2, e_3] = e_1$.
$\mathrm{d}\,e_1^* = -e_2^* \wedge e_3^*$, $\mathrm{d}\,e_2^* = e_1^* \wedge e_3^*$, $\mathrm{d}\,e_3^* = -e_1^* \wedge e_2^*$.
(2) $[H, S] = -S$, $[H, U] = U$, $[S, U] = -H$.
$\mathrm{d}\,H^* = S^* \wedge U^*$, $\mathrm{d}\,S^* = H^* \wedge S^*$, $\mathrm{d}\,U^* = -H^* \wedge U^*$.

G がコンパクトリー群とすると、G 自体の作用で G 上の微分形式を平均することができる。

一般に m 次元多様体 M に n 次元コンパクトリー群 G が滑らかに作用しているとする．すなわち、写像 $\mathrm{ev} : G \times M \ni (g,x) \longmapsto L_g x \in M$ で、$L_{g_1}(L_{g_2}x) = L_{g_1 g_2}x$, $L_{\mathbf{1}}x = x$ を満たすものが与えられているとする。

左不変微分形式を考えたのと同様に G 上の右不変微分形式を考えることができる。G 上には右不変 n 形式 ($n = \dim G$ がある（右不変 1 形式の基底 $e_1^*, \dots, e_n^*$ に対して、$\mu = e_1^* \wedge \cdots \wedge e_n^*$ をとればよい)。μ を定数倍して、$\displaystyle\int_G \mu = 1$ と仮定する。μ は任意の $h \in G$ に対して ${R_h}^*\mu = \mu$ を満たす。

M 上の微分 p 形式 α に対し、$\mathrm{ev}^*\alpha$ は $G \times M$ 上の微分 p 形式である。平均するために、$p+n$ 形式 $({\pi_G}^*\mu) \wedge (\mathrm{ev}^*\alpha)$ を考える。さらに直積 $G \times M$ 上で G についてだけ積分し、微分 p 形式 α の平均 $m(\alpha)$ を

$$m(\alpha)(x) = \int_{G\times\{x\}} ({\pi_G}^*\mu) \wedge (\mathrm{ev}^*\alpha)$$

で定義する。ここで、G の $G \times M$ 上の作用を $L_h(g,x) = (gh^{-1}, h\cdot x)$ と定義すると、$\mathrm{ev} \circ L_h = \mathrm{ev}$ を満たす。従って、

$$\begin{aligned}
{L_h}^*(({\pi_G}^*\mu) \wedge (\mathrm{ev}^*\alpha)) &= ({L_h}^*{\pi_G}^*\mu) \wedge ({L_h}^*\mathrm{ev}^*\alpha) \\
&= ({\pi_G}^*{R_{h^{-1}}}^*\mu) \wedge (\mathrm{ev}^*\alpha) \\
&= ({\pi_G}^*\mu) \wedge (\mathrm{ev}^*\alpha)
\end{aligned}$$

従って、

$$\begin{aligned}
({L_h}^*(m(\alpha)))(x) &= (L_h)^*(\int_{G\times\{L_h x\}} ({\pi_G}^*\mu) \wedge (\mathrm{ev}^*\alpha)) \\
&= \int_{G\times\{x\}} {L_h}^*(({\pi_G}^*\mu) \wedge (\mathrm{ev}^*\alpha)) \\
&= \int_{G\times\{x\}} ({\pi_G}^*\mu) \wedge (\mathrm{ev}^*\alpha) \\
&= m(\alpha)(x)
\end{aligned}$$

さて、α が閉 p 形式、G は弧状連結とする。p サイクル c に対して、$\displaystyle\int_c m(\alpha) = \int_{G\times c} ({\pi_G}^*\mu) \wedge (\mathrm{ev}^*\alpha) = \int_G \int_{\{g\}\times c} ({\pi_G}^*\mu) \wedge (\mathrm{ev}^*\alpha)$. ここで、$G$ が連結だから、$\displaystyle\int_{L_g(c)} \alpha = \int_c \alpha$ である。よって、

$$\begin{aligned}
\int_{\{g\}\times c} ({\pi_G}^*\mu) \wedge (\mathrm{ev}^*\alpha) &= ({\pi_G}^*\mu) \wedge \int_{\{g\}\times c} (\mathrm{ev}^*\alpha) \\
&= ({\pi_G}^*\mu) \wedge \int_{L_g(c)} \alpha = ({\pi_G}^*\mu) \wedge \int_c \alpha
\end{aligned}$$

であり、$\displaystyle\int_c m(\alpha) = \int_c \alpha$ を得る。ドラームの定理により、$m(\alpha)$ のコホモロジー類は α のコホモロジー類と一致する。

この議論により、コンパクト多様体 M にコンパクト群 G が作用しているとき、M のドラームコホモロジー群は、M の G 不変微分形式のドラーム・コホモロジー群に等しい。

さて、コンパクト連結リー群に対し、G の左不変微分形式は有限次元であり、G 不変微分形式のドラーム・コホモロジー群が、有限次元ベクトル空間のコチェイン複体上の外微分の計算から求まることになる。

【例 23.3】 問題 23.2(1) で述べた $SO(3)$ の左不変微分形式のなすコチェイン複体は

$$\begin{aligned}
0 &\xrightarrow{\mathrm{d}} \boldsymbol{R}[1] \xrightarrow{\mathrm{d}} \boldsymbol{R}[e_1^*] \oplus \boldsymbol{R}[e_2^*] \oplus \boldsymbol{R}[e_3^*] \\
&\xrightarrow{\mathrm{d}} \boldsymbol{R}[e_2^* \wedge e_3^*] \oplus \boldsymbol{R}[e_1^* \wedge e_3^*] \oplus \boldsymbol{R}[e_1^* \wedge e_2^*] \xrightarrow{\mathrm{d}} \boldsymbol{R}[e_1^* \wedge e_2^* \wedge e_3^*] \xrightarrow{\mathrm{d}} 0
\end{aligned}$$

となり、問題23.2(1)の計算から、$H^k_{DR}(SO(3)) \cong \boldsymbol{R}\ (k=0,3)$, $H^k_{DR}(SO(3)) \cong 0\ (k \neq 0,3)$ がわかる。

24　平面場

多様体 M 上の微分 1 形式 α は、各点 x に対し、余接空間 $T_x^*(M)$ の元を定める。余接空間 $T_x^*(M)$ は接空間 $T_x(M)$ の双対空間であるから、α の $x \in M$ での値が 0 でなければ $\ker\alpha$ は接空間 $T_x(M)$ の $n-1$ 次元部分空間である。

多様体 M 上の関数 f の全微分 $\mathrm{d}\,f$ が x_0 で 0 でないとする。陰関数定理により、x の近傍で $\{x \mid f(x)=f(x_0)\}$ は $n-1$ 次元の部分多様体となる。実際には、x_0 の近傍は $n-1$ 次元の等位面で埋め尽くされ、$\ker\mathrm{d}\,f$ はこの等位面の接空間と一致する。

関数の全微分でなくてもその関数倍の形の微分 1 形式 $g\,\mathrm{d}\,f$ は、$g(x_0) \neq 0$ ならば、同じ $n-1$ 次元部分多様体の族を定める。

$\alpha = g\,\mathrm{d}\,f$ が x_0 の近傍で 0 でないとする。$\alpha \wedge \mathrm{d}\,\alpha = 0$ となる。実際、

$$\alpha \wedge \mathrm{d}\,\alpha = g\,\mathrm{d}\,f \wedge (\mathrm{d}\,g \wedge \mathrm{d}\,f) = 0$$

逆に次が成立する。

定理 24.1 多様体 M 上の微分 1 形式 α が x_0 の近傍で 0 にならないとする。$\alpha \wedge \mathrm{d}\,\alpha = 0$ と仮定すると、x_0 の近傍上の関数 $f,\ g$ で $g\,\mathrm{d}\,f \neq 0$ となるものがあり、$\alpha = g\,\mathrm{d}\,f$ と書かれる。

証明　α に対して x_0 のまわりの座標近傍 $(U, \varphi=(x_1,\dots,x_n))$ で $\alpha = \displaystyle\sum_{i=1}^n f_i\,\mathrm{d}x_i$ について、$f_n = 1$ とするものがとれる。この座標近傍上で $n-1$ 枠場 $(\xi_1,\dots,\xi_{n-1})$ を次のように作る。

$$\xi_i = \frac{\partial}{\partial x_i} - f_i\frac{\partial}{\partial x_n} \quad (i=1,\ \dots,\ n-1)$$

仮定から $\alpha \wedge \mathrm{d}\,\alpha = 0$ であるが、これは

$$(\sum_{i=1}^n f_i\,\mathrm{d}x_i) \wedge \mathrm{d}(\sum_{k=1}^n f_k\,\mathrm{d}x_k) = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\sum_{k=1}^n f_i\frac{\partial f_k}{\partial x_j}\,\mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j \wedge \mathrm{d}x_k$$

と計算される。一方、

$$\begin{aligned}[\xi_i,\xi_j] &= [\frac{\partial}{\partial x_i} - f_i\frac{\partial}{\partial x_n}, \frac{\partial}{\partial x_j} - f_j\frac{\partial}{\partial x_n}] \\ &= \big(-\frac{\partial f_j}{\partial x_i} + \frac{\partial f_i}{\partial x_j} + f_i\frac{\partial f_j}{\partial x_n} - f_j\frac{\partial f_i}{\partial x_n}\big)\frac{\partial}{\partial x_n}\end{aligned}$$

$\alpha \wedge \mathrm{d}\,\alpha$ の $\mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j \wedge \mathrm{d}x_n$ の係数は $-\dfrac{\partial f_j}{\partial x_i} + \dfrac{\partial f_i}{\partial x_j} + f_i\dfrac{\partial f_j}{\partial x_n} - f_j\dfrac{\partial f_i}{\partial x_n}$ である。従って、$[\xi_i,\xi_j]=0$ となる。

$\xi_1,\ \dots,\ \xi_{n-1}$ は $\boldsymbol{R}^{n-1}$ の局所的な作用を生成し、x を通る $\boldsymbol{R}^{n-1}$ の局所的な作用の局所的軌道と x_0 を通る $\dfrac{\partial}{\partial x_n}$ の軌道との交点を $\varphi^{-1}(0,\dots,0,f(x))$ とすると、$\xi_1,\ \dots,\ \xi_{n-1}$ は $\ker\mathrm{d}\,f$ を張るベクトル場（$n-1$ 枠場）となる。各点で α は $\mathrm{d}\,f$ の非零関数倍であるからある 0 にならない関数 g があって $\alpha = g\,\mathrm{d}\,f$ と書かれる。 ■

$\alpha = g\,\mathrm{d}\,f$ が x_0 の近傍で 0 にならないならば、

$$\mathrm{d}\,\alpha = \mathrm{d}\,g \wedge \mathrm{d}\,f = \frac{\mathrm{d}\,g}{g} \wedge \alpha$$

と書かれる。従って、$\alpha \wedge \mathrm{d}\,\alpha = 0$ ならば, ある微分 1 形式 β が存在して $\mathrm{d}\,\alpha = \beta \wedge \alpha$ と書かれる。

一般に次が成立する。

命題 24.2 多様体 M 上の微分 1 形式 α, 微分 p 形式 β を考える。α は 0 にならないとする。$\alpha \wedge \beta = 0$ ならば、微分 $p-1$ 形式 γ で $\beta = \gamma \wedge \alpha$ を満たすものが存在する。

証明 $T^*_x(M)$ で通常の基底 $\mathrm{d}x_1, \ldots, \mathrm{d}x_n$ を取り替えることを考える。この場合 e_1 を α の x における値とするような、基底 $e_1, \ldots, e_n$ をとることが出来る。微分 p 形式は $\bigwedge^p T^*_x(M)$ に値を持つが、$\bigwedge^p T^*_x(M)$ の通常の基底 $\{\mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_p}\}_{i_1 < \cdots < i_p}$ は、基底 $\{e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_p}\}_{j_1 < \cdots < j_p}$ に置き換えられる。このような取替えは、x のまわりの座標近傍上で $e_2, \ldots, e_n$ が T^*M への C^∞ 写像となるように定義できる。このような基底の下で $\alpha = e_1$, $\beta = \displaystyle\sum_{j_1 < \cdots < j_p} g_{j_1 \cdots j_p} e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_p}$ と表示されるが、$\alpha \wedge \beta = 0$ であれば、$1 < j_1$ となる $g_{j_1 \cdots j_p}$ は 0 である。従って、$\beta = e_1 \wedge (\displaystyle\sum_{j_2 < \cdots < j_p} g_{1 j_2 \cdots j_p} e_{j_2} \wedge \cdots \wedge e_{j_p})$ となる。

M の上のような近傍による被覆 U_i を考え、それに従属した 1 の分割 λ_i をとる。各 U_i 上で $\beta = \alpha \wedge \gamma_i$ となる微分 $p-1$ 形式 γ_i が与えられている。$\gamma = \displaystyle\sum_i \lambda_i \gamma_i$ とおく。

$$\alpha \wedge \gamma = \alpha \wedge \sum_i \lambda_i \gamma_i = \sum_i \lambda_i \alpha \wedge \gamma_i = \sum_i \lambda_i \beta = \beta$$

となる。 ■

定理 24.1 の条件は $\alpha \wedge \mathrm{d}\,\alpha = 0$ はある微分 1 形式 β が存在して $\mathrm{d}\,\alpha = \beta \wedge \alpha$ と書かれることがわかった。

多様体の点 x の近傍で定義された関数 $F : U \longrightarrow \boldsymbol{R}$ の等位面となることを一般化して多様体の点 x の近傍で定義された写像 $F : U \longrightarrow \boldsymbol{R}^q$ によって定義される部分多様体の族になる場合を考える。

このとき、F のランクが q であるとする。このとき $\varphi : U \longrightarrow \boldsymbol{R}^n$ で近傍 F が $\boldsymbol{R}^n = \boldsymbol{R}^p \times \boldsymbol{R}^q$ $(p+q=n)$ の射影 $\boldsymbol{R}^n \longrightarrow \boldsymbol{R}^q$ に一致するものが取れる。$\boldsymbol{R}^p$ の座標を $(x_1, \ldots, x_p)$, $\boldsymbol{R}^q$ の座標を $(y_1, \ldots, y_q)$ として、部分多様体の接空間は $\ker \mathrm{d}y_1 \cap \cdots \cap \ker \mathrm{d}y_q$ で表される。

$(a_{ij})_{i,j=1,\ldots,q}$ を U から $GL(q; \boldsymbol{R})$ への写像として、$\mathrm{d}y_1, \ldots, \mathrm{d}y_q$ の 1 次結合 $\alpha_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{q} a_{ij}\,\mathrm{d}y_j$ $(j = 1, \ldots, q)$ を考えても同じように部分多様体の族の接空間は $\ker \alpha_1 \cap \cdots \cap \ker \alpha_q$ と書かれる。ここで、

$$\mathrm{d}y_j = \sum_{k=1}^{q} \sum_{k=1}^{q} (a^{-1})_{jk} a_{k\ell}\,\mathrm{d}y_\ell = \sum_{k=1}^{q} (a^{-1})_{jk} \alpha_k$$

であるから

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\,\alpha_i &= \sum_{j=1}^{q} \mathrm{d}\,a_{ij} \wedge \mathrm{d}y_j \\
&= \sum_{j=1}^{q} \mathrm{d}\,a_{ij} \wedge (\sum_{k=1}^{q} (a^{-1})_{jk}\alpha_k) \\
&= \sum_{k=1}^{q} (\sum_{j=1}^{q} (a^{-1})_{jk}\,\mathrm{d}\,a_{ij}) \wedge \alpha_k
\end{aligned}
$$

すなわち $\mathrm{d}\,\alpha_i = \displaystyle\sum_{k=1}^{q} \beta_{ik} \wedge \alpha_k$ となる微分 1 形式 β_{ik} が存在する。

また、$\ker\alpha_1 \cap \cdots \cap \ker\alpha_q = \ker\gamma_1 \cap \cdots \cap \ker\gamma_q$ と書かれるとき、$\gamma_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{q} c_{ij}\alpha_j$ となるような $GL(q;\boldsymbol{R})$ 値の関数 c_{ij} が存在するが、次のようにして $\mathrm{d}\,\gamma_i = \displaystyle\sum_{k=1}^{q} \delta_{ik} \wedge \gamma_j$ となるようなとなる微分 1 形式 δ_{ik} が存在することがわかる。

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\,\gamma_i &= \sum_{j=1}^{q} \mathrm{d}\,c_{ij} \wedge \alpha_j \\
&= \sum_{j=1}^{q} \mathrm{d}\,c_{ij} \wedge \alpha_j + \sum_{j=1}^{q} c_{ij}\,\mathrm{d}\,\alpha_j \\
&= \sum_{j=1}^{q} \mathrm{d}\,c_{ij} \wedge (\sum_{k=1}^{q} (c^{-1})_{jk}\gamma_k) + \sum_{j=1}^{q} c_{ij} \sum_{k=1}^{q} \beta_{jk} \wedge \alpha_k \\
&= \sum_{k=1}^{q} (\sum_{j=1}^{q} (c^{-1})_{jk}\,\mathrm{d}\,c_{ij} + \sum_{j=1}^{q} c_{ij}\beta_{jk}) \wedge \alpha_k
\end{aligned}
$$

すなわち、p 次元の接平面場を $\ker\alpha_1 \cap \cdots \cap \ker\alpha_q$ として局所的に記述する微分 1 形式 $\alpha_1, \dots, \alpha_q$ について、$\mathrm{d}\,\alpha_i = \displaystyle\sum_{k=1}^{q} \beta_{ik} \wedge \alpha_k$ となる微分 1 形式 β_{ik} が存在するという条件は、q 個の微分 1 形式 $\alpha_1, \dots, \alpha_q$ のとり方に依存しないことがわかった。

定理 24.3 (フロベニウスの定理) *多様体 M^{p+q} 上の p 次元接平面場が、$x \in M$ の近傍 U の各点で 1 次独立な微分 1 形式 $\alpha_1, \dots, \alpha_q$ により、$\ker\alpha_1 \cap \cdots \cap \ker\alpha_q$ と表示されているとする。この接平面場が、x の近傍 V で定義されたランク q の写像 $F : V \longrightarrow \boldsymbol{R}^q$ により定義される p 次元部分多様体の族の接平面場となるための必要十分条件は $\mathrm{d}\,\alpha_i = \displaystyle\sum_{k=1}^{q} \beta_{ik} \wedge \alpha_k$ となる微分 1 形式 β_{ik} が存在することである。*

証明 前の議論で、必要条件であることは述べた。十分条件であることを示す。座標近傍 $(U,(x_1,\dots,x_p;y_1,\dots,y_q))$ において、p 次元接平面場は $(y_1,\dots,y_q)$ への射影に横断的であるとする。このとき、接平面場は $\dfrac{\partial}{\partial x_i} + \displaystyle\sum_{\ell=1}^{q} b_{\ell i}\dfrac{\partial}{\partial y_\ell}$ $(i = 1, \dots, p)$ により張られる。このとき、$\alpha_1, \dots, \alpha_q$ を、$\ker\alpha_1 \cap \cdots \cap \ker\alpha_q$ を変えないようにとりかえて、$\alpha_\ell = \mathrm{d}y_\ell - \displaystyle\sum_{i=1}^{p} b_{\ell i}\,\mathrm{d}x_i$ $(\ell = 1, \dots, q)$ と置くことができる。

p 次元部分多様体の族の接平面場となるとき、ベクトル場 $\xi_i = \dfrac{\partial}{\partial x_i} + \displaystyle\sum_{\ell=1}^{q} b_{\ell i}\dfrac{\partial}{\partial y_\ell}$ $(i = 1, \dots, p)$ は可換となる。なぜなら、ベクトル場 ξ は p 次

元部分多様体の接空間に接しているので、ブラケット積 $[\xi_i, \xi_j]$ は、各点で p 次元部分多様体の接空間に値を持つ。従って $[\xi_i, \xi_j]$ は ξ_i $(i = 1, \ldots, p)$ の 1 次結合とならなければいけない。一方、$[\xi_i, \xi_j]$ の $\frac{\partial}{\partial x_k}$ $(k = 1, \ldots, p)$ の成分は 0 であるから、この 1 次結合は 0 である。

ベクトル場 $\xi_i = \dfrac{\partial}{\partial x_i} + \displaystyle\sum_{\ell=1}^{q} b_{\ell i} \frac{\partial}{\partial y_\ell}$ $(i = 1, \ldots, p)$ が可換である条件を求めると次のようになる。

$$
\begin{aligned}
&[\frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{\ell=1}^{q} b_{\ell i} \frac{\partial}{\partial y_\ell}, \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{m=1}^{q} b_{mj} \frac{\partial}{\partial y_m}] \\
&= \sum_{m=1}^{q} \frac{\partial b_{mj}}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial y_m} - \sum_{\ell=1}^{q} \frac{\partial b_{\ell i}}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial y_\ell} + \sum_{\ell, m=1}^{q} b_{\ell i} \frac{\partial b_{mj}}{\partial y_\ell} \frac{\partial}{\partial y_m} - \sum_{\ell, m=1}^{q} b_{mj} \frac{\partial b_{\ell i}}{\partial y_m} \frac{\partial}{\partial y_\ell} \\
&= \sum_{m=1}^{q} (\frac{\partial b_{mj}}{\partial x_i} - \frac{\partial b_{mi}}{\partial x_j} + \sum_{\ell=1}^{q} b_{\ell i} \frac{\partial b_{mj}}{\partial y_\ell} - \sum_{\ell=1}^{q} b_{\ell j} \frac{\partial b_{mi}}{\partial y_\ell}) \frac{\partial}{\partial y_m}
\end{aligned}
$$

$\alpha_\ell = \mathrm{d}y_\ell - \displaystyle\sum_{i=1}^{p} b_{\ell i} \, \mathrm{d}x_i$ $(\ell = 1, \ldots, q)$ について，$\beta_{\ell i} = \displaystyle\sum_{j=1}^{p} f_{\ell i j} \, \mathrm{d}x_j + \sum_{j=1}^{q} g_{\ell i j} \, \mathrm{d}y_j$ が、定理の条件を満たすとすると、

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{d}(\mathrm{d}y_\ell - \sum_{i=1}^{p} b_{\ell i} \, \mathrm{d}x_i) \\
&= -\sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial b_{\ell i}}{\partial x_j} \, \mathrm{d}x_j \wedge \mathrm{d}x_i - \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} \frac{\partial b_{\ell i}}{\partial y_j} \, \mathrm{d}y_j \wedge \mathrm{d}x_i \\
&= \sum_{i=1}^{q} (\sum_{j=1}^{p} f_{\ell i j} \, \mathrm{d}x_j + \sum_{j=1}^{q} g_{\ell i j} \, \mathrm{d}y_j) \wedge (\mathrm{d}y_i - \sum_{k=1}^{p} b_{ik} \, \mathrm{d}x_k)
\end{aligned}
$$

であるから、係数は次を満たす。

$$
\begin{aligned}
g_{\ell i j} &= g_{\ell j i} \\
\frac{\partial b_{\ell i}}{\partial y_j} &= f_{\ell j i} + \sum_{k=1}^{q} g_{\ell k j} b_{k i} \\
\frac{\partial b_{\ell i}}{\partial x_j} - \frac{\partial b_{\ell j}}{\partial x_i} &= \sum_{k=1}^{q} f_{\ell k j} b_{k i} - f_{\ell k i} b_{k j}
\end{aligned}
$$

このとき、

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial b_{mj}}{\partial x_i} - \frac{\partial b_{mi}}{\partial x_j} + \sum_{\ell=1}^{q} b_{\ell i} \frac{\partial b_{mj}}{\partial y_\ell} - \sum_{\ell=1}^{q} b_{\ell j} \frac{\partial b_{mi}}{\partial y_\ell} \\
&= -\sum_{k=1}^{q} (f_{mkj} b_{ki} - f_{mki} b_{kj}) \\
&\quad + \sum_{\ell=1}^{q} b_{\ell i} (f_{m\ell j} + \sum_{k=1}^{q} g_{mk\ell} b_{kj}) - \sum_{\ell=1}^{q} b_{\ell j} (f_{m\ell i} + \sum_{k=1}^{q} g_{mk\ell} b_{ki}) \\
&= \sum_{\ell=1}^{q} \sum_{k=1}^{q} g_{mk\ell} b_{\ell i} b_{kj} - \sum_{\ell=1}^{q} \sum_{k=1}^{q} g_{mk\ell} b_{ki} b_{\ell j} \\
&= \sum_{\ell=1}^{q} \sum_{k=1}^{q} g_{m\ell k} b_{\ell i} b_{kj} - \sum_{\ell=1}^{q} \sum_{k=1}^{q} g_{mk\ell} b_{ki} b_{\ell j} = 0
\end{aligned}
$$

最後の行は、$g_{mk\ell} = g_{m\ell k}$ を用いた。 ■

微分 p 形式 α に対してもその x における零化空間 $\ker \alpha$ を

$$
\ker \alpha = \{ v \in T_x(M) \mid i_v \alpha = 0 \in \bigwedge^{p-1} T_x^*(M) \}
$$

により定義できる。

$\ker\alpha$ は線形空間である。$\alpha = \displaystyle\sum_{i_1<\cdots<i_p} f_{i_1\cdots i_p}\,\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_p}$ は線形空間である。実際 $\xi = \displaystyle\sum_{i=1}^n \xi_i\frac{\partial}{\partial x_i}$, $\eta = \displaystyle\sum_{i=1}^n \eta_i\frac{\partial}{\partial x_i}$ に対し、$i_\xi\alpha = \displaystyle\sum_{j=1}^p f_{i_1\cdots i_p}\xi_{i_j}\,\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_{j-1}}\wedge\mathrm{d}x_{i_{j+1}}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_p} = 0$, $i_\eta\alpha = \displaystyle\sum_{j=1}^p f_{i_1\cdots i_p}\eta_{i_j}\,\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_{j-1}}\wedge\mathrm{d}x_{i_{j+1}}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_p} = 0$ とすると、$a, b\in\boldsymbol{R}$ に対し、

$$
\begin{aligned}
&i_{a\xi+b\eta}\alpha\\
&=\sum_{j=1}^p f_{i_1\cdots i_p}(a\xi_{i_j}+b\eta_{i_j})\,\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_{j-1}}\wedge\mathrm{d}x_{i_{j+1}}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_p}\\
&=a\sum_{j=1}^p f_{i_1\cdots i_p}\xi_{i_j}\,\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_{j-1}}\wedge\mathrm{d}x_{i_{j+1}}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_p}\\
&\quad+b\sum_{j=1}^p f_{i_1\cdots i_p}\eta_{i_j}\,\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_{j-1}}\wedge\mathrm{d}x_{i_{j+1}}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_p}=0
\end{aligned}
$$

【例 24.4】 (1) n 次元多様体の 0 とならない微分 n 形式 Ω に対し、$\ker\Omega = 0$ である。

(2) $T_0\boldsymbol{R}^4$ において $\ker(\mathrm{d}\,x_1\wedge\mathrm{d}\,x_2+\mathrm{d}\,x_3\wedge\mathrm{d}\,x_4) = 0$. $T_0\boldsymbol{R}^6$ において $\ker(\mathrm{d}\,x_1\wedge\mathrm{d}\,x_2\wedge\mathrm{d}\,x_3+\mathrm{d}\,x_4\wedge\mathrm{d}\,x_5\wedge\mathrm{d}\,x_6) = 0$.

n 次元多様体 M が各点で 0 とならない微分形式 Ω を持つとする（向き付けを持つことと同値である）。ベクトル場 ξ の Ω に対するダイバージェンス $\operatorname{div}\xi$ とは、次を満たす関数である。$L_\xi\Omega = (\operatorname{div}\xi)\Omega$.

$\boldsymbol{R}^n$ の微分 n 形式、$\mathrm{d}\,x_1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}\,x_n$, ベクトル場 $\xi = \displaystyle\sum_{i=1}^n \xi_i\frac{\partial}{\partial x_i}$ に対し、$\operatorname{div}\xi = \displaystyle\sum_{i=1}^n \frac{\partial\xi_i}{\partial x_i}$ となる。

注意 24.5 モーザーにより、コンパクト向き付け可能多様体 M 上の 2 つの各点で 0 とならない微分 n 形式 Ω_0, Ω_1 に対し、F_0 が恒等写像であるようなアイソトピー $F_t : M \longrightarrow M$ で、${F_1}^*\Omega_0 = \Omega_1$ とするものが存在することが示されている。

【問題 24.6】 $\boldsymbol{R}^n$ 上の微分 2 形式 ω が、$\ker\omega = 0$ を満たすなら、n は偶数 $(n = 2m)$ で、$T_0\boldsymbol{R}^n$ の基底 $e_1, \ldots, e_{2m}$ で $\omega(0) = e_1\wedge e_2+\cdots+e_{2m-1}\wedge e_{2m}$ と書かれる。

注意 24.7 ダルブーの定理により、多様体上の閉 2 形式 ω が、$\ker\omega = 0$ を満たすなら、多様体の次元は上の問により偶数 $(n = 2m)$ となるが、さらに各点のまわりの座標近傍 $(U, \varphi = (x_1, \ldots, x_{2m}))$ で、$\omega = \mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2+\cdots+\mathrm{d}x_{2m-1}\wedge\mathrm{d}x_{2m}$ となるものが存在する。

定義 24.8 多様体上の閉 2 形式 ω で $\ker\omega = 0$ を満たすものをシンプレクティク形式と呼ぶ。シンプレクティク形式を指定した多様体をシンプレクティク多様体と呼ぶ。

ベクトル場 ξ がシンプレクティク形式 ω を保つとすると、$L_\xi\omega = 0$ となるが、カルタンの公式により $L_\xi\omega = \mathrm{d}\,i_\xi\omega + i_\xi\,\mathrm{d}\,\omega = \mathrm{d}\,i_\xi\omega$ であるから、$i_\xi\omega$ は閉 1 形式となる。$\boldsymbol{R}^{2m}$ 上のシンプレクティク形式 ω に対しては、$i_\xi\omega = \mathrm{d}\,f$ となる関数 f が存在する。これを ξ のハミルトン関数と呼ぶ。

$\xi(f) = (\mathrm{d}\,f)(\xi) = i_\xi i_\xi\omega = 0$ だから、ξ の生成するフローに沿って f の値は不変である。すなわちフローの軌道は f の等位面上にある。

閉微分 1 形式 α に対し、$i_\xi \omega = \alpha$ となる ξ は一意的に定まる。このような ξ は $L_\xi \omega = 0$ を満たす。

$\boldsymbol{R}^{2m}$ 上のシンプレクティク形式 $\omega = \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 + \cdots + \mathrm{d}x_{2m-1} \wedge \mathrm{d}x_{2m}$ に対し、$f(x_1, \ldots, x_{2m})$ の（全微分 $\mathrm{d}\,f$ の）定める ω を保つベクトル場は、$\dfrac{\partial f}{\partial x_2}\dfrac{\partial}{\partial x_1} - \dfrac{\partial f}{\partial x_1}\dfrac{\partial}{\partial x_2} + \cdots + \dfrac{\partial f}{\partial x_{2m}}\dfrac{\partial}{\partial x_{2m-1}} - \dfrac{\partial f}{\partial x_{2m-1}}\dfrac{\partial}{\partial x_{2m}}$ である。