6　ポアンカレの補題の証明

ポアンカレの補題は、ユークリッド空間の星型の開集合 U 上の閉微分 $p+1$ 形式に対して、d で写ってくる微分 p 形式の存在を主張するものであるから、微分 $p+1$ 形式に対して微分 p 形式を作る操作を考えなければいけない。そのための方法のひとつは、１つの座標についての原始関数を考えることである。

まず、n 次元ユークリッド空間の開集合 U に対し、$n+1$ 次元ユークリッド空間の部分集合 $[0,1]\times U$ を考える。ここで、座標は $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ で与えられているとする。$p>0$ として、$[0,1]\times U$ 上の微分 p 形式

$$\alpha = \sum_{i_1<\cdots<i_p} f_{i_1\cdots i_p}\,\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_p}$$

に対し、

$$I(\alpha) = \sum_{0<i_2<\cdots<i_p}\left(\int_0^{x_0} f_{0i_2\cdots i_p}\,\mathrm{d}x_0\right)\mathrm{d}x_{i_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_p}$$

とおく。$I(\alpha)$ は $[0,1]\times U$ 上の微分 $p-1$ 形式であり、$i_1=0$ の項だけに対しての和であることに注意する。このとき、$\mathrm{d}\,I(\alpha)+I(\mathrm{d}\,\alpha)=\alpha-\alpha_0$ となる。ただし、$\alpha_0 = \displaystyle\sum_{0<i_1<\cdots<i_p} f_{i_1\cdots i_p}(0,x_1,\ldots,x_n)\,\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_p}$ である。

実際、$\mathrm{d}\,I(\alpha)$ は次のように計算される。

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\,I(\alpha) = &\sum_{i_1=0,i_2<\cdots<i_p} f_{i_1i_2\cdots i_p}\,\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\mathrm{d}x_{i_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_p}\\ &+\sum_{j=1}^{n}\sum_{i_2<\cdots<i_p}\left(\int_0^{x_0}\frac{\partial f_{0i_2\cdots i_p}}{\partial x_j}\,\mathrm{d}x_0\right)\mathrm{d}x_j\wedge\mathrm{d}x_{i_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_p}\end{aligned}$$

一方、$I(\mathrm{d}\,\alpha)$ の計算は、次のようになる。

$$\begin{aligned}I(\mathrm{d}\,\alpha) &= I\left(\sum_{j=0}^{n}\sum_{i_1<\cdots<i_p}\frac{\partial f_{i_1\cdots i_p}}{\partial x_j}\,\mathrm{d}x_j\wedge\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_p}\right)\\ &= I\Bigg(\sum_{0<i_1<\cdots<i_p}\frac{\partial f_{i_1\cdots i_p}}{\partial x_0}\,\mathrm{d}x_0\wedge\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_p}\\ &\qquad+\sum_{j=1}^{n}\sum_{0<i_2<\cdots<i_p}\frac{\partial f_{0i_2\cdots i_p}}{\partial x_j}\,\mathrm{d}x_j\wedge\mathrm{d}x_0\wedge\mathrm{d}x_{i_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_p}\Bigg)\\ &= \sum_{0<i_1<\cdots<i_p}\left(\int_0^{x_0}\frac{\partial f_{i_1\cdots i_p}}{\partial x_0}\,\mathrm{d}x_0\right)\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_p}\\ &\quad-\sum_{j=1}^{n}\sum_{0<i_2<\cdots<i_p}\left(\int_0^{x_0}\frac{\partial f_{0i_2\cdots i_p}}{\partial x_j}\,\mathrm{d}x_0\right)\mathrm{d}x_j\wedge\mathrm{d}x_{i_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_p}\end{aligned}$$

２番目の等号は、I を計算したときに 0 となる $\mathrm{d}x_0$ を含まない項を省いたものである。$\displaystyle\int_0^{x_0}\frac{\partial f_{i_1\cdots i_p}}{\partial x_0}\,\mathrm{d}x_0 = f_{i_1\cdots i_p}(x_0,x_1,\ldots,x_n)-f_{i_1\cdots i_p}(0,x_1,\ldots,x_n)$ であるから、$\mathrm{d}\,I(\alpha)+I(\mathrm{d}\,\alpha)=\alpha-\alpha_0$ となる。

ここで得られた α_0 は、$[0,1]\times U$ 上の微分 p 形式で、値が x_0 方向に一定のものである。

$\iota_0 : U \longrightarrow [0,1]\times U$, $\pi : [0,1]\times U \longrightarrow U$ を $\iota_0(\boldsymbol{x}) = (0,\boldsymbol{x})$, $\pi(x_0,\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$ で定義すると、$\alpha_0 = \pi^*(\iota_0{}^*\alpha)$ と書かれる。例 5.4 参照。従って、次の命題が示された。

命題 6.1 n 次元ユークリッド空間の開集合 U に対し、$n+1$ 次元ユークリッド空間の部分集合 $[0,1]\times U$ を考える。$[0,1]\times U$ 上の微分 p 形式 α に対し、次が成立する。

$$\mathrm{d}\,I(\alpha)+I(\mathrm{d}\,\alpha) = \alpha-\pi^*(\iota_0{}^*\alpha)$$

注意 6.2　この命題において、$a \in [0,1]$ に対し、

$$I_a(\alpha) = \sum_{0<i_2<\cdots<i_p} \left(\int_a^{x_0} f_{0i_2\cdots i_p} \, \mathrm{d}x_0 \right) \mathrm{d}x_{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_p}$$

とし、$\iota_a(\boldsymbol{x}) = (a, \boldsymbol{x})$ と定義すると、次が得られる。

$$\mathrm{d}(I_a(\alpha)) + I_a(\mathrm{d}\,\alpha) = \alpha - \pi^*({\iota_a}^*\alpha)$$

ポアンカレの補題 4.11 の証明　$p > 0$ として、$\boldsymbol{R}^n$ の開集合 U 上の微分 p 形式

$$\alpha = \sum_{i_1<\cdots<i_p} f_{i_1\cdots i_p} \, \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_p}$$

に対し、新しい座標 x_0 を導入し、$[0,1] \times U$ 上の微分 p 形式

$$\beta = \sum_{i_1<\cdots<i_p} f_{i_1\cdots i_p}(x_0(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) + \boldsymbol{y}) \\ (x_0 \, \mathrm{d}x_{i_1} + (x_{i_1} - y_{i_1}) \, \mathrm{d}x_0) \wedge \cdots \wedge (x_0 \, \mathrm{d}x_{i_p} + (x_{i_p} - y_{i_p}) \, \mathrm{d}x_0)$$

を考える。これは写像 $\varphi(x_0, \boldsymbol{x}) = x_0(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) + \boldsymbol{y}$ により定義される写像 $\varphi : [0,1] \times U \longrightarrow U$ による α の引き戻しである：

$$\beta = \varphi^*\alpha$$

$\mathrm{d}\,\alpha = 0$ とすると、定理 5.11 により、

$$\mathrm{d}\,\beta = \mathrm{d}(\varphi^*\alpha) = \varphi^*(\mathrm{d}\,\alpha) = 0$$

である。命題 6.1 により、$\mathrm{d}\,I(\beta) = \beta - \beta_0$ となる。ここで、$p > 0$ だから $\beta_0 = 0$ で、$\mathrm{d}\,I(\beta) = \beta$ となる。ここで $x_0 = 1$ として生き残る成分を見る。すなわち、$\iota_1 : U \longrightarrow [0,1] \times U$ による引き戻しを考えると、

$$\alpha = \iota_1^*\beta = \iota_1^* \, \mathrm{d}(I(\beta)) = \mathrm{d}(\iota_1^* I(\beta))$$

となる。■

第１章でユークリッド空間の開集合上で定義された微分形式を、ユークリッド空間内の多様体上では、その制限を考えることができる。ユークリッド空間内の多様体のパラメータ表示に対して、その表示による引き戻しにより、微分形式が表示されていると考えるのは自然である。さらに自然なのは、一般の多様体上に微分形式を定義し、その積分を考察することである。ドラーム理論という美しい理論が構築される。

7　多様体

定義 7.1 (多様体の定義) M が n 次元（微分可能）多様体であるとは，M がハウスドルフ空間であり，次のような開近傍 U_i（の集合）と U_i から n 次元ユークリッド空間の開集合への同相写像 $\varphi_i : U_i \longrightarrow \varphi_i(U_i) \subset \boldsymbol{R}^n$ （の集合）が存在することである．

- $\displaystyle\bigcup_i U_i = M,$
- $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ のとき，

  $$\varphi_i \circ (\varphi_j | U_i \cap U_j)^{-1} : \varphi_j(U_i \cap U_j) \longrightarrow \varphi_i(U_i \cap U_j)$$

  が C^∞ 級である．

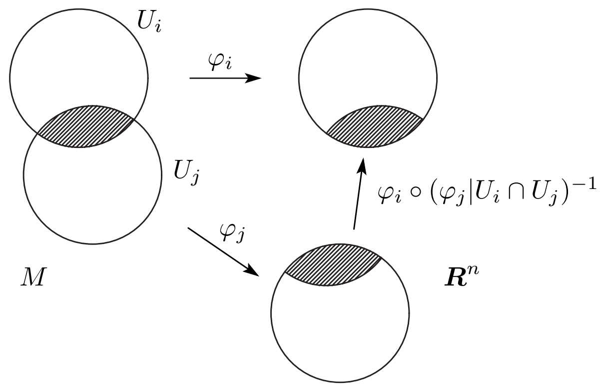

図 1: 多様体の座標変換

(U_i,φ_i) を**局所座標**あるいは**座標近傍**，その集まり $\{(U_i,\varphi_i)\}$ を**局所座標系**あるいは**座標近傍系**，$\varphi_{ij}=\varphi_i\circ(\varphi_j|U_i\cap U_j)^{-1}$ を**座標変換**と呼ぶ.

注意 7.2　本書では，M は上に定義した多様体の上で同値となる次の条件の 1 つを満たすとする（これはパラコンパクトと呼ばれる性質とも同値となる．パラコンパクトの定義については，[松島] を参照のこと）.

- M は第 2 可算公理を満たす．すなわち，可算個の開集合があってどのような開集合もその部分族の和集合となる．
- M に対して，稠密な可算集合が存在する（可分である）.
- M は σ コンパクトである．すなわち，M はコンパクト部分集合の可算増大列の和集合である．

多様体の定義の座標近傍を用いて、多様体の間の C^∞ 級写像が定義される。

定義 7.3 (多様体の間の写像) C^r 級多様体 M_1, M_2 を考える．$s\leqq r$ に対し，写像 $F:M_1\longrightarrow M_2$ が C^s 級であるとは，$F(x)\in M_2$ のまわりの座標近傍 (V,ψ), $F^{-1}(V)$ に含まれる $x\in M_1$ のまわりの座標近傍 (U,φ) に対して，$\psi\circ F\circ\varphi^{-1}:\varphi(U)\longrightarrow\psi(V)$ が C^s 級となることである．

特に、$\boldsymbol{R}$ への C^∞ 級写像 $M\longrightarrow\boldsymbol{R}$ を M 上の C^∞ 級関数と呼ぶ。

多様体上に C^∞ 級関数が沢山存在することは、自明なことではないが、重要な事実である。[多様体入門] では、それを示すときに、次の定理を示した。

定理 7.4 (多様体入門・定理 5.1.3) 多様体 M のコンパクト部分集合 K と K を含む開集合 U が与えられているとする．M 上の C^∞ 級関数 $\nu:M\longrightarrow\boldsymbol{R}$ で，M 上で $0\leqq\nu(x)\leqq 1$, $\nu|K=1$ かつ $\operatorname{supp}\nu$ は U のコンパクト部分集合となるものが存在する．

ここで、C^∞ 級多様体 M 上の関数 f に対し，f の**台** (サポート，support) $\operatorname{supp} f$ は

$$\operatorname{supp} f=\overline{\{x\in M \mid f(x)\neq 0\}}$$

で定義される。

この定理 7.4 は、開被覆に従属する 1 の分割の存在に一般化される。このことは、後に、チェック・ドラーム複体の議論、向き付けられた多様体上の積分の定義に用いられる。

命題 7.5 (多様体入門・例題 5.3.6) M をコンパクト多様体とする．M の座標近傍系 $\{(U_i,\varphi_i)\}$ に対し，C^∞ 級関数 $\lambda_i:M\longrightarrow\boldsymbol{R}$ で次を満たすものが存在する．$0\leqq\lambda_i(x)\leqq 1$, $\operatorname{supp}\lambda_i\subset U_i$, 有限個の i を除いて $\lambda_i=0$, $\displaystyle\sum_i\lambda_i=1$.

C^∞ 級多様体 M 上の C^∞ 写像 f は、座標近傍系 $\{(U_i, \varphi_i)\}$ を用いて $f \circ {\varphi_i}^{-1}$ が $\varphi_i(U_i)$ 上の C^∞ 級となるものとして定義されている。このとき、$\varphi_j(U_i \cap U_j)$ 上の関数 $(f \circ {\varphi_i}^{-1}) \circ \varphi_{ij}$ は、$f \circ {\varphi_j}^{-1} | \varphi_j(U_i \cap U_j)$ と一致している。

$V_i = \varphi_i(U_i)$, $V_{ij} = \varphi_j(U_i \cap U_j)$ として、$\varphi_{ij} = \varphi_i \circ (\varphi_j | U_i \cap U_j)^{-1} : V_{ij} \longrightarrow V_{ji}$ とする．各 V_i 上に C^∞ 級関数 $f^{(i)}$ が与えられたとき、$f^{(j)} | V_{ij} = f^{(i)} \circ \varphi_{ij} = \varphi_{ij}^* f^{(i)}$ であれば、M 上の C^∞ 級関数 f が $M \cong \big(\bigsqcup_{i \in I} V_i\big)/\!\sim$ 上に定まる。ここで、$\sim$ は、直和 $\bigsqcup_{i \in I} V_i$ 上の

$$V_{ji} \ni \boldsymbol{x}_i \sim \boldsymbol{x}_j \in V_{ij} \Longleftrightarrow \boldsymbol{x}_i = \varphi_{ij}(\boldsymbol{x}_j)$$

で定義される同値関係である（多様体入門・例題 3.5.2 参照)。

これと同じように、C^∞ 級多様体 M 上の微分形式 α を次のように定義できる。

定義 7.6 (多様体上の微分形式の定義１) M 上の p 形式 α とは、各 V_i 上の C^∞ 級微分 p 形式 $\alpha^{(i)}$ で次を満たす物のことである。

$$\alpha^{(j)} | V_{ij} = \varphi_{ij}^* \alpha^{(i)}$$

8　余接空間

多様体上の微分形式の定義 7.6 は、多様体上で微分形式の計算をするうえでは、実際的なものである。一方、多様体 M 上の対象という位置づけが間接的である。もう少し、概念的な定義を、多様体の接空間を多様体上の曲線の同値類として定義したのと同じように、多様体上の関数の同値類として与えることができる。

n 次元多様体 M の点 x において、M 上の関数 f_1, f_2 が同値であることを、x のまわりの座標近傍 (U, φ) を用いて、

$$f_1 \sim f_2 \Longleftrightarrow \mathrm{d}(f_1 \circ \varphi^{-1})_{(\varphi(x))} = \mathrm{d}(f_2 \circ \varphi^{-1})_{(\varphi(x))}$$

により定義する。$\mathrm{d}(f_k \circ \varphi^{-1})_{(\varphi(x))}$ $(k = 1, 2)$ は $\varphi(x)$ における全微分の値である。

座標近傍 (U, φ) の代わりに (V, ψ) を用いると、$\mathrm{d}(f_1 \circ \varphi^{-1})_{(\varphi(x))} = \mathrm{d}(f_2 \circ \varphi^{-1})_{(\varphi(x))}$ ならば、$\mathrm{d}(f_1 \circ \psi^{-1})_{(\psi(x))} = \mathrm{d}(f_2 \circ \psi^{-1})_{(\psi(x))}$ である。実際、$\psi(p)$ の近傍で $f_k \circ \psi^{-1} = f_k \circ \varphi^{-1} \circ (\varphi \circ \psi^{-1})$ $(k = 1, 2)$ だから、

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(f_1 \circ \psi^{-1})_{(\psi(x))} &= \mathrm{d}(f_1 \circ \varphi^{-1} \circ (\varphi \circ \psi^{-1}))_{(\psi(x))} \\
&= (\varphi \circ \psi^{-1})^* \, \mathrm{d}(f_1 \circ \varphi^{-1})_{(\varphi(x))} \\
&= (\varphi \circ \psi^{-1})^* \, \mathrm{d}(f_2 \circ \varphi^{-1})_{(\varphi(x))} \\
&= \mathrm{d}(f_2 \circ \varphi^{-1} \circ (\varphi \circ \psi^{-1}))_{(\psi(x))} = \mathrm{d}(f_2 \circ \psi^{-1})_{(\psi(x))}
\end{aligned}$$

ここで、ここで、３番目と５番目の等号は、命題 5.2 （14 ページ）による。全微分 $\mathrm{d}(f_k \circ \psi^{-1})$ の $\psi(x)$ における値が、全微分 $\mathrm{d}(f_k \circ \varphi^{-1})$ の $\varphi(x)$ における値で定まることが重要である。

定義 8.1 (余接空間) 同値類 $C^\infty(M)/\sim$ を $T_x^* M$ と書き、x における M の余接空間と呼ぶ。

【問題 8.2】 n 次元多様体 M の点 x における余接空間 T_x^*M は $C^\infty(M)$ の実ベクトル空間の構造から定まる n 次元ベクトル空間の構造を持つことを示せ。

【解】 点 x のまわりの座標近傍 $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_n))$ をとることにより、$\mathrm{d}(f \circ \varphi)_{\varphi(x)} = \sum_{i=1}^n \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\varphi(x))(\mathrm{d}x_i)_{\varphi(x)}$ と書かれる。$[f] \in C^\infty(M)/\sim$ に対し、$\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(\varphi(x)), \dots, \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(\varphi(x))\right) \in \boldsymbol{R}^n$ を対応させる対応を考える。$f_1,\ f_2 \in C^\infty(M),\ a_1,\ a_2 \in \boldsymbol{R}$ に対し、第 i 成分について

$$\frac{\partial(a_1 f_1 + a_2 f_2)}{\partial x_i}(\varphi(x)) = a_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_i}(\varphi(x)) + a_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_i}(\varphi(x))$$

だから、この対応はベクトル空間の準同型である。同値類の定義から、この対応は、単射である。全射であることも容易に示される。$\boldsymbol{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \boldsymbol{R}^n$ に対し、U 上の関数 $f_{\boldsymbol{a}} = \sum_{i=1}^n a_i x_i$ をとる。x の近傍で 1 であり、U に台を持つ関数 ν をとり、$\nu f_{\boldsymbol{a}}$ を考えると U の補集合上では 0 であるように拡張して M 上の関数と考えることができる。$\mathrm{d}(\nu f_{\boldsymbol{a}})_{\varphi(x)} = \sum_{i=1}^n a_i (\mathrm{d}x_i)_{\varphi(x)}$ であり、上の対応が全射であることがわかる。

点 x のまわりの座標近傍 $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_n))$, に対し、$T_x^*M$ の基底を単に $\mathrm{d}x_1, \dots, \mathrm{d}x_n$ (または点 x を明示して $(\mathrm{d}x_1)_x, \dots, (\mathrm{d}x_n)_x$) と書く。点 x のまわりの座標近傍 $(V, \psi = (y_1, \dots, y_n))$ に対し、T_x^*M の基底 $\mathrm{d}x_1, \dots, \mathrm{d}x_n$ と $\mathrm{d}y_1, \dots, \mathrm{d}y_n$ の間には次の関係がある。

$$\mathrm{d}y_i = \sum_{j=1}^n \Big(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\Big)_{(\varphi(x))} \mathrm{d}x_j$$

これは座標変換したときの微分１形式の引き戻しの式

$$(\varphi \circ \psi^{-1})^* (\mathrm{d}y_i)_{\psi(x)} = \sum_{j=1}^n \Big(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\Big)_{(\varphi(x))} (\mathrm{d}x_j)_{\varphi(x)}$$

と同じものである。

M の各点 x に余接空間 T_x^*M の元を各座標近傍 $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_n))$ 上で $\mathrm{d}x_i$ の係数が C^∞ 級関数となるように対応させる対応を、M 上の C^∞ 級微分１形式と呼ぶ。

M 上の C^∞ 級関数 f に対して, 各座標近傍 $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_n))$ 上で $\sum_{i=1}^n \dfrac{\partial f}{\partial x_i} \mathrm{d}x_i$ を対応させると、これは、C^∞ 級微分１形式であり、f の全微分と呼ぶ。

【問題 8.3】 $F : M \longrightarrow N$ を C^∞ 級写像とする。N 上の C^∞ 級写像 f に対し、$F^* f = f \circ F$ を対応させる写像は準同型写像 $F^* : T_{F(x)}^* N \longrightarrow T_x^* M$ を引き起こすことを示せ。

【解】 $F(x) \in N$ のまわりの座標近傍 (V, ψ) に対して, $\mathrm{d}(f_1 \circ \psi^{-1})_{\psi(F(x))} = \mathrm{d}(f_2 \circ \psi^{-1})_{\psi(F(x))}$ とする。$x \in M$ のまわりの座標近傍 (U, φ) で $F(U) \subset V$ となるものをとる。このとき、

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(f_1 \circ F \circ \varphi^{-1})_{\varphi(x)} &= \mathrm{d}(f_1 \circ \psi^{-1} \circ (\psi \circ F \circ \varphi^{-1}))_{\varphi(x)} \\
&= (\psi \circ F \circ \varphi^{-1})^* \, \mathrm{d}(f_1 \circ \psi^{-1})_{\psi(F(x))} \\
&= (\psi \circ F \circ \varphi^{-1})^* \, \mathrm{d}(f_2 \circ \psi^{-1})_{\psi(F(x))} \\
&= \mathrm{d}(f_1 \circ \psi^{-1} \circ (\psi \circ F \circ \varphi^{-1}))_{\varphi(x)} = \mathrm{d}(f_1 \circ F \circ \varphi^{-1})_{\varphi(x)}
\end{aligned}$$

ここで、３番目と５番目の等号は、命題 5.2 （14 ページ）による。

9　p 次外積の空間

微分 1 形式の点 x における値は、余接空間 T_x^*M であったが、微分 p 形式の値は、その p 次外積の空間にある。定義 4.1（9 ページ）と同様に次の定義をする。

定義 9.1 (p 次外積の空間) $\mathrm{d}x_1, \dots, \mathrm{d}x_n$ を基底とする余接空間 T_x^*M の p 次外積の空間とは、$1 \leqq i_1 < \cdots < i_p \leqq n$ となる自然数 $i_1, \dots, i_p$ に対応した $\mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_p}$ という全部で $\dfrac{n!}{p!(n-p)!}$ 個の記号を基底とするベクトル空間であり、$\bigwedge^p T_x^*M$ と書かれる。

【例 9.2】 4 次元多様体の 2 次外積の空間 $\bigwedge^2 T_x^*M$ は、T_x^*M の基底を $\mathrm{d}x_1$, $\mathrm{d}x_2, \mathrm{d}x_3, \mathrm{d}x_4$ とすると、$\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2, \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_3, \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_4, \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3, \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_4$, $\mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_4$ を基底とする 6 次元ベクトル空間である。

余接空間 T_x^*M の基底を $\mathrm{d}y_1, \dots, \mathrm{d}y_n$ に取り替えたとき、$\mathrm{d}x_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial y_j}\,\mathrm{d}y_j$ とすると、

$$\mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_p} = \sum_{j_1, \dots, j_p = 1}^{n} \frac{\partial x_{i_1}}{\partial y_{j_1}} \cdots \frac{\partial x_{i_p}}{\partial y_{j_p}}\,\mathrm{d}y_{j_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}y_{j_p}$$

と変換される。ここで、$j_1, \dots, j_p$ のなかに同じものがあれば

$$\mathrm{d}y_{j_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}y_{j_p} = 0$$

とし、これらがすべて異なり、これを並べ替えたものを $k_1, \dots, k_p$ $(k_1 < \cdots < k_p)$ とするとき、$\mathrm{sign}\begin{pmatrix} j_1 \cdots j_p \\ k_1 \cdots k_p \end{pmatrix}$ を置換の符号として、

$$\mathrm{d}y_{j_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}y_{j_p} = \mathrm{sign}\begin{pmatrix} j_1 \cdots j_p \\ k_1 \cdots k_p \end{pmatrix} \mathrm{d}y_{k_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}y_{k_p}$$

とする。

注意 9.3 $\bigwedge^p T_x^*M$ の座標変換は、すぐ後で定義する外積と両立するように定義されている。

定義 9.4 (多様体上の微分形式の定義 2) M の各点 x に余接空間 T_x^*M の p 次外積の空間 $\bigwedge^p T_x^*M$ の元を各座標近傍 $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_n))$ 上で $\mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_p}$ の係数 $f_{i_1 \cdots i_p}$ が C^∞ 級関数となるように対応させる対応を、M 上の C^∞ 級微分 p 形式と呼ぶ。M 上の C^∞ 級微分 p 形式のなす（無限次元）ベクトル空間を $\Omega^p(M)$ と書く。

この定義は p 次外積の空間 $\bigwedge^p T_x^*M$ を使っているが、実際の計算では定義 7.6 と同じものになっていることは明らかであろう。

【例 9.5】 n 次元トーラス T^n は、以下のように定義される。n 次元ユークリッド $\boldsymbol{R}^n$ 上の、整数ベクトル全体のなす群 $\boldsymbol{Z}^n$ の平行移動による作用を考える。$\boldsymbol{n} \in \boldsymbol{Z}^n$, $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n$ に対し、$\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{n}$ とする。この作用の軌道を同値類と考える同値関係を考え、その同値類の集合を $T^n = \boldsymbol{R}^n / \boldsymbol{Z}^n$ と書く。$\pi : \boldsymbol{R}^n \longrightarrow T^n$ を射影として、π が単射となるような $\boldsymbol{R}^n$ の開集合 U について、$(\pi(U), (\pi|U)^{-1})$ を集めたものを座標近傍系として、n 次元 C^∞ 級多様体の構造が得られる。

T^n の微分 p 形式 α は、$\boldsymbol{R}^n$ の座標を使って、座標近傍 $(\pi(U),(\pi|U)^{-1})$ 上で、$\displaystyle\sum_{i_1<\cdots<i_p} f_{i_1\cdots i_p}(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_1}$ と書かれる。このような、書き方は2つの座標近傍 $(\pi(U),(\pi|U)^{-1})$, $(\pi(V),(\pi|V)^{-1})$ の共通部分上で一致しており、α は $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^n$ に対し、定義される $f_{i_1\cdots i_p}(\boldsymbol{x})$ により、上の式で表されている。ただし、$f_{i_1\cdots i_p}(\boldsymbol{x})$ は、$\boldsymbol{n}\in\boldsymbol{Z}^n$ に対し、$f_{i_1\cdots i_p}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{n})=f_{i_1\cdots i_p}(\boldsymbol{x})$ を満たす。$\boldsymbol{R}^n$ の言葉で言うと、T^n の微分 p 形式 α は, $\boldsymbol{R}^n$ 上の $\boldsymbol{Z}^n$ 周期的な微分 p 形式により定義されている。

定数を係数とする $\boldsymbol{R}^n$ 上の微分 p 形式 $\displaystyle\sum_{i_1<\cdots<i_p} a_{i_1\cdots i_p}\,\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_1}$ は、$\boldsymbol{Z}^n$ 周期的であるから、$T^n=\boldsymbol{R}^n/\boldsymbol{Z}^n$ 上の微分 p 形式を定める。

C^∞ 級写像 $F:M\longrightarrow N$ は、例題 8.3 により、線形写像 $F^*:T^*_{F(x)}N\longrightarrow T_xM$ を引き起こし、これは、線形写像 $F^*:\bigwedge^p T^*_{F(x)}N\longrightarrow\bigwedge^p T_xM$ を引き起こす。これは、$F(x)$ のまわりの座標近傍を $(V,\psi=(y_1,\cdots,y_n))$ とするとき、

$$\begin{aligned}F^*((\mathrm{d}y_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}y_{i_p})_{F(x)})&=F^*(\mathrm{d}y_{i_1})_{F(x)}\wedge\cdots\wedge F^*(\mathrm{d}y_{i_p})_{F(x)}\\&=\mathrm{d}(y_{i_1}\circ F)_x\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}(y_{i_p}\circ F)_x\end{aligned}$$

として計算されるものである。

これにより引き戻し $F^*:\Omega^p(N)\longrightarrow\Omega^p(M)$ が定義される。具体的に書くと、次のようになる。

命題 9.6 $F:M\longrightarrow N$ を m 次元多様体 M から n 次元多様体 N への C^∞ 級写像とする。$F(x)\in N$ のまわりの座標近傍を $(V,\psi=(y_1,\cdots,y_n))$ とし、$x\in M$ のまわりの座標近傍 $(U,\varphi=(x_1,\dots,x_m))$ を $F(U)\subset V$ となるようにとる。N 上の微分 p 形式 α が、$F(x)$ のまわりで、$\displaystyle\sum_{i_1<\cdots<i_p} f_{i_1\cdots i_p}\,\mathrm{d}y_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}y_{i_p}$ と表示されるとき、$F^*\alpha$ は x のまわりで

$$\begin{aligned}&\sum_{i_1<\cdots<i_p} f_{i_1\cdots i_p}\circ F\,\mathrm{d}(y_{i_1}\circ F)\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}(y_{i_p}\circ F)\\=&\sum_{i_1<\cdots<i_p}\sum_{j_1=1}^m\cdots\sum_{j_p=1}^m f_{i_1\cdots i_p}\circ F\frac{\partial y_{i_1}}{\partial x_{j_1}}\cdots\frac{\partial y_{i_p}}{\partial x_{j_p}}\,\mathrm{d}x_{j_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{j_p}\end{aligned}$$

と表示される。

また、例題 5.9 （17 ページ) から、多様体の間の C^∞ 級写像 $G:L\longrightarrow M$, $F:M\longrightarrow N$ に対して次の命題が成り立つ。

命題 9.7 多様体の間の C^∞ 級写像 $G:L\longrightarrow M$, $F:M\longrightarrow N$ に対し、引き戻し $G^*:\Omega^p(M)\longrightarrow\Omega^p(L)$, $F^*:\Omega^p(N)\longrightarrow\Omega^p(M)$, $(F\circ G)^*:\Omega^p(N)\longrightarrow\Omega^p(L)$ は $(F\circ G)^*=G^*F^*$ を満たす。

【例 9.8】 (1) ユークリッド空間内の多様体 $M^m\subset\boldsymbol{R}^n$ は、陰関数表示、グラフ表示、パラメータ表示等で与えられる [多様体入門定理 2.2.1 参照]。$\boldsymbol{R}^n$ の開集合 U で、M を含むものをとると、包含写像 $\iota:M\longrightarrow U$ により、U 上の微分形式は、M^m 上の微分形式に引き戻される。(M^m の法束の 0 切断の近傍から M の近傍への微分同相写像があるから、M^m 上のすべての微分形式はある近傍の微分形式の制限である。[多様体入門問題 5.2.5 参照])

(2) 例 9.5 において、n 次元トーラス $T^n = \boldsymbol{R}^n/\boldsymbol{Z}^n$ 上の微分 p 形式 α の $\pi : \boldsymbol{R}^n \longrightarrow T^n = \boldsymbol{R}^n/\boldsymbol{Z}^n$ による引き戻し $\pi^*\alpha$ が、α を $\boldsymbol{R}^n$ 上で表示する $\boldsymbol{Z}^n$ 周期的微分 p 形式である。

微分形式の外積は、p 次外積の空間と q 次外積の空間の元に対し $p+q$ 次外積の空間の元を与える対応から得られている。

定義 9.9 (外積) 外積 $\wedge : \bigwedge^p T_x^*M \times \bigwedge^q T_x^*M \longrightarrow \bigwedge^{p+q} T_x^*M$ は基底 $\mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_p}$, $\mathrm{d}x_{j_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{j_q}$ に対し、$\mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_p} \wedge \mathrm{d}x_{j_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{j_q}$ を対応させることで定義される準同形である。ただし、$\mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_p} \wedge \mathrm{d}x_{j_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{j_q}$ は定義 *4.2*（*10* ページ）と同じ規則で計算される。

このような準同型から自然に M 上の C^∞ 級微分形式の空間に外積

$$\wedge : \Omega^p(M) \times \Omega^q(M) \longrightarrow \Omega^{p+q}(M)$$

が導かれる。これは定義 7.6 と、問題 5.8（16 ページ）からも納得されるであろう。また、例題 4.4（10 ページ）により、次の命題が成立する。

命題 9.10 M 上の微分 p 形式 α、微分 q 形式 β に対して

$$\beta \wedge \alpha = (-1)^{pq} \alpha \wedge \beta$$

となる。

問題 5.8（16 ページ）から引き戻しに関して次も成立する。

命題 9.11 $F : M \longrightarrow N$ を m 次元多様体 M から n 次元多様体 N への C^∞ 級写像とする。N 上の微分 p 形式 α、微分 q 形式 β に対して

$$F^*(\alpha \wedge \beta) = F^*\alpha \wedge F^*\beta$$

となる。

10 外微分とドラームコホモロジー

多様体上の微分形式の外微分は、定義 7.6 と、定理 5.11（18 ページ）により定義されると考えるのが最もやさしい。

定義 10.1 M 上の微分 p 形式 α の外微分 $\mathrm{d}\,\alpha$ は、座標近傍 $(U, \varphi = (x_1, \ldots, x_n))$ に対して、$\alpha = \displaystyle\sum_{i_1 < \cdots < i_p} \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_p}$ と表されるとき、

$$\mathrm{d}\left(\sum_{i_1 < \cdots < i_p} f_{i_1 \cdots i_p} \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_p} \right) = \sum_{i_1 < \cdots < i_p} \mathrm{d}\, f_{i_1 \cdots i_p} \wedge \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_p}$$

と表される微分 $p+1$ 形式である。

これにより

$$0 \longrightarrow \Omega^0(M) \xrightarrow{\mathrm{d}} \Omega^1(M) \xrightarrow{\mathrm{d}} \Omega^2(M) \xrightarrow{\mathrm{d}} \cdots \xrightarrow{\mathrm{d}} \Omega^n(M) \longrightarrow 0$$

という準同型の列が定義されるが、定理 4.10 により、すぐに次が示される。

定理 10.2 $\mathrm{d} \circ \mathrm{d} : \Omega^p(M) \longrightarrow \Omega^{p+2}(M)$ は 0 準同型である。

ベクトル空間の準同型写像の列

$$0 \longrightarrow \Omega^0(M) \xrightarrow{\mathrm{d}} \Omega^1(M) \xrightarrow{\mathrm{d}} \Omega^2(M) \xrightarrow{\mathrm{d}} \cdots \xrightarrow{\mathrm{d}} \Omega^n(M) \longrightarrow 0$$

について、$\mathrm{d}\circ\mathrm{d}$ が満たされているとき、コホモロジー群を取ることができる。

$$H^p_{DR}(M) = \ker(\mathrm{d} : \Omega^p(M) \to \Omega^{p+1}(M))/\operatorname{im}(\mathrm{d} : \Omega^{p-1}(M) \to \Omega^p(M))$$

を多様体 M の p 次ドラーム・コホモロジー群と呼ぶ。$\ker(\mathrm{d} : \Omega^p(M) \to \Omega^{p+1}(M))$ の元を閉 p 形式 (closed p-form)、$\operatorname{im}(\mathrm{d} : \Omega^{p-1}(M) \to \Omega^p(M))$ の元を完全 p 形式 (exact p-form) と呼ぶ。閉 p 形式 α が代表するドラーム・コホモロジー群 $H^p_{DR}(M)$ の元 $[\alpha]$ は α のコホモロジー類と呼ばれる。

【例 10.3】 (1) 閉 0 形式 f は、局所定数関数である。従って、$H^0_{DR}(M)$ は M の連結成分で定数となる関数全体のなすベクトル空間である。

(2) ポアンカレの補題 4.11 （13 ページ）により、$\boldsymbol{R}^n$ の星型の開集合 U に対しては、$p=0$ に対して、$H^0_{DR}(U) \cong \boldsymbol{R}$, $p>0$ に対して、$H^p_{DR}(U) = 0$ である。

【例 10.4】 円周は例 9.5 で述べたトーラスの 1 次元の場合で、$S^1 = \boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}$ と定義される。$\Omega^1(S^1)$ の元は $\boldsymbol{R}$ 上の $\boldsymbol{Z}$ 周期関数 $f(x)$ により、$f(x)\,\mathrm{d}x$ と書かれる。$\Omega^1(S^1)$ の元はすべて閉形式であるが、完全形式であるためには、$f(x) = \dfrac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}$ となる $\boldsymbol{R}$ 上の $\boldsymbol{Z}$ 周期関数 $F(x)$ が存在しなければならない。微積分学の基本定理から、$F(x+1) - F(x) = \displaystyle\int_0^1 f(x+t)\,\mathrm{d}t$ だから、$\displaystyle\int_0^1 f(x+t)\,\mathrm{d}t = 0$ がすべての x に対して成立することが必要十分である。この積分は、f は $\boldsymbol{Z}$ 周期関数だから x の値によらない。従って $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0$ が必要十分である。よって、$H^1_{DR}(S^1) \longrightarrow \boldsymbol{R}$ が、$[\alpha] \in H^1_{DR}(S^1)$ に対して、$\displaystyle\int_0^1 \alpha$ により定まり、これが同型写像になる。従って $H^1_{DR}(S^1) \cong \boldsymbol{R}$ である。

【例 10.5】 例 9.5 で述べた n 次元トーラス T^n 上の定数係数 p 形式 $\displaystyle\sum_{i_1<\cdots<i_p} a_{i_1\cdots i_p}\,\mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_1}$ は閉 p 形式である。0 でない定数係数 p 形式は完全形式ではないことを後に示す。

【問題 10.6】 2 次元トーラス T^2 上の微分形式は、例 9.5 で見たように、$\boldsymbol{R}^2$ 上の周期関数を係数とする微分形式で表される。周期関数のフーリエ展開を用いて、$H^*_{DR}(T^2)$ を計算せよ。

【解】 2 次元トーラス T^2 は連結だから $H^0_{DR}(T^2) \cong \boldsymbol{R}$ である。

2 次元トーラス T^2 上の微分 1 形式 $\alpha = g_1\,\mathrm{d}x_1 + g_2\,\mathrm{d}x_2$ に対し、g_1, g_2 がフーリエ級数で与えられていると考えると、$g_1 = \sum a_{n_1n_2} e^{2\pi\sqrt{-1}(n_1x_1+n_2x_2)}$, $g_2 = \sum b_{n_1n_2} e^{2\pi\sqrt{-1}(n_1x_1+n_2x_2)}$ と表される。C^∞ 級であることと任意の $r>0$ に対して、$\sum ({n_1}^2+{n_2}^2)^{r/2}|a_{n_1n_2}| < \infty$, $\sum ({n_1}^2+{n_2}^2)^{r/2}|b_{n_1n_2}| < \infty$ が同値である。g_1, g_2 が実数値であることは、$a_{(-n_1)(-n_2)} = \overline{a_{n_1n_2}}$, $b_{(-n_1)(-n_2)} = \overline{b_{n_1n_2}}$ と同値である。

$$\mathrm{d}\,\alpha = 2\pi\sqrt{-1}\sum (n_1b_{n_1n_2} - n_2a_{n_1n_2}) e^{2\pi\sqrt{-1}(n_1x_1+n_2x_2)}$$

であるから、α が閉形式であること、すなわち $\mathrm{d}\,\alpha = 0$ は $n_1b_{n_1n_2} - n_2a_{n_1n_2} = 0$ と同値である。この式により、$n_1 \neq 0$ ならば $b_{n_10} = 0$, $n_2 \neq 0$ ならば $a_{0n_2} = 0$ となっていることに注意する。

このとき、$\alpha = \mathrm{d}\,f$ となるかどうかを、$f = \sum c_{n_1n_2} e^{2\pi\sqrt{-1}(n_1x_1+n_2x_2)}$ と置いて計算する。

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\,f = 2\pi\sqrt{-1}\Big(&\sum n_1c_{n_1n_2} e^{2\pi\sqrt{-1}(n_1x_1+n_2x_2)}\,\mathrm{d}x_1 \\ &+ \sum n_2c_{n_1n_2} e^{2\pi\sqrt{-1}(n_1x_1+n_2x_2)}\,\mathrm{d}x_2\Big)\end{aligned}$$

であるから、$\alpha = \mathrm{d}\, f$ となるための条件は

$$a_{n_1n_2} = 2\pi\sqrt{-1}n_1c_{n_1n_2},\quad b_{n_1n_2} = 2\pi\sqrt{-1}n_2c_{n_1n_2}$$

である。α が閉形式である条件から $n_1 \neq 0$ ならば $b_{n_10} = 0$, $n_2 \neq 0$ ならば $a_{0n_2} = 0$ であったが、$b_{00} = 0$, $a_{00} = 0$ も必要である。そこで、n_1 も n_2 も 0 でなければ、$c_{n_1n_2} = \dfrac{a_{n_1n_2}}{2\pi\sqrt{-1}n_1} = \dfrac{b_{n_1n_2}}{2\pi\sqrt{-1}n_2}$ と置くと条件が満たされる。さらに、$n_1 \neq 0$ ならば $c_{n_10} = \dfrac{a_{n_10}}{2\pi\sqrt{-1}n_1}$, $n_2 \neq 0$ ならば $c_{0n_2} = \dfrac{b_{0n_2}}{2\pi\sqrt{-1}n_2}$ と置くと、$c_{n_1n_2}$ は (c_{00}) を除いて定まる。$c_{00} = 0$ として $\alpha = \mathrm{d}\, f$ が成立する。

従って、$H^1_{DR}(T^2) \cong \boldsymbol{R}^2$ で、この同型は $\alpha = g_1\,\mathrm{d}x_1 + g_2\,\mathrm{d}x_2$ に対して、g_1, g_2 のフーリエ展開の定数項を対応させることにより得られる。

さて、微分 2 形式 $\beta = h\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2$ に対して、$h = \sum e_{n_1n_2}e^{2\pi\sqrt{-1}(n_1x_1+n_2x_2)}$ と置いて計算する。$\beta = \mathrm{d}\,\alpha$ となるためには、

$$e_{n_1n_2} = 2\pi\sqrt{-1}(n_1b_{n_1n_2} - n_2a_{n_1n_2})$$

を満たすように $a_{n_1n_2}$, $b_{n_1n_2}$ を定めればよい。このためには $e_{00} = 0$ でなければならない。$n_1 \neq 0$ に対して、$a_{n_1n_2} = 0$, $b_{n_1n_2} = \dfrac{e_{n_1n_2}}{2\pi\sqrt{-1}n_1}$, $n_2 \neq 0$ に対して、$a_{0n_2} = \dfrac{e_{n_10}}{2\pi\sqrt{-1}n_2}$, $b_{0n_2} = 0$ とおくと、e_{00} 以外の係数を合わせることができる。

$H^2_{DR}(T^2) \cong \boldsymbol{R}$ で、この同型は $\beta = h\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2$ に対して、h のフーリエ展開の定数項を対応させることにより得られる。

後で、コンパクトな多様体に対して、各次数のドラームコホモロジー群は有限次元ベクトル空間となることを示すが、これを説明するためには、ドラームコホモロジー群の性質を示すことが必要である。

$F : M \longrightarrow N$ を m 次元多様体 M から n 次元多様体 N への C^∞ 級写像とする。引き戻し $F^* : \Omega^p(N) \longrightarrow \Omega^p(M)$ が定義されているから、次の図式が得られている。

$$\begin{array}{ccccccccccc}
0 \longrightarrow & \Omega^0(M) & \xrightarrow{\mathrm{d}} & \Omega^1(M) & \xrightarrow{\mathrm{d}} \cdots \xrightarrow{\mathrm{d}} & \Omega^p(M) & \xrightarrow{\mathrm{d}} & \Omega^{p+1}(M) & \xrightarrow{\mathrm{d}} \cdots \\
& \uparrow F^* & & \uparrow F^* & & \uparrow F^* & & \uparrow F^* & \\
0 \longrightarrow & \Omega^0(N) & \xrightarrow{\mathrm{d}} & \Omega^1(N) & \xrightarrow{\mathrm{d}} \cdots \xrightarrow{\mathrm{d}} & \Omega^p(N) & \xrightarrow{\mathrm{d}} & \Omega^{p+1}(N) & \xrightarrow{\mathrm{d}} \cdots
\end{array}$$

命題 9.6 による引き戻しの様子をみると、定理 5.11（18 ページ）から、上の図式は可換であることがわかる。

命題 10.7 $F^*\,\mathrm{d} = \mathrm{d}\,F^*$.

閉 p 形式 $\alpha \in \Omega^p(N)$ に対して、$\mathrm{d}\,\alpha = 0$ だから、$0 = F^*\,\mathrm{d}\,\alpha = \mathrm{d}\,F^*\alpha$ であり、$F^*\alpha$ も閉 p 形式であることがわかる。また、完全 p 形式 α は、$\beta \in \Omega^p(N)$ の元により $\alpha = \mathrm{d}\,\beta$ と書かれているが、$F^*\alpha = F^*\,\mathrm{d}\,\beta = \mathrm{d}\,F^*\beta$ となるから、$F^*\alpha$ も閉 p 形式となる。従って、

$$\begin{aligned}
F^* : &\ker(\mathrm{d} : \Omega^p(N) \to \Omega^{p+1}(N))/\operatorname{im}(\mathrm{d} : \Omega^{p-1}(N) \to \Omega^p(N)) \\
&\longrightarrow \ker(\mathrm{d} : \Omega^p(M) \to \Omega^{p+1}(M))/\operatorname{im}(\mathrm{d} : \Omega^{p-1}(M) \to \Omega^p(M))
\end{aligned}$$

すなわち、$F^* : H^p_{DR}(N) \longrightarrow H^p_{DR}(M)$ が準同型として定義される。

定理 10.8 C^∞ 級写像 $F : M \longrightarrow N$ は、準同型写像 $F^* : H^p_{DR}(N) \longrightarrow H^p_{DR}(M)$ を引き起こす。

この準同型写像はベクトル空間の準同型というだけでなく、外積代数の準同型である。

まず、例題 4.7（11 ページ）から、次の命題が成り立つことがわかる。

命題 10.9 多様体 M 上の微分 p 形式 α と微分 q 形式 β に対し、$\mathrm{d}(\alpha\wedge\beta) = \mathrm{d}\alpha\wedge\beta + (-1)^p\alpha\wedge\mathrm{d}\beta$ が成立する。

従って、閉 p 形式と閉 q 形式の外積は、閉 $p+q$ 形式である。

閉 p 形式 α, 閉 q 形式 β のドラーム・コホモロジー類を $[\alpha]$, $[\beta]$ とするとき、$[\alpha]\wedge[\beta] = [\alpha\wedge\beta]$ と定義することができる。すなわち、α, β と同じコホモロジー類をあたえる閉 p 形式、閉 q 形式は、$p-1$ 形式 η, $q-1$ 形式 ζ により、$\alpha + \mathrm{d}\,\eta$, $\beta + \mathrm{d}\,\zeta$ で与えられる。このとき、

$$\begin{aligned}
&(\alpha+\mathrm{d}\,\eta)\wedge(\beta+\mathrm{d}\,\zeta)\\
&=\alpha\wedge\beta+(\mathrm{d}\,\eta)\wedge\beta+\alpha\wedge(\mathrm{d}\,\zeta)+\mathrm{d}\,\eta\wedge\mathrm{d}\,\zeta\\
&=\alpha\wedge\beta+\mathrm{d}(\eta\wedge\beta)+(-1)^p\,\mathrm{d}(\alpha\wedge\zeta)+\mathrm{d}(\eta\wedge\mathrm{d}\,\zeta)\\
&=\alpha\wedge\beta+\mathrm{d}(\eta\wedge\beta+(-1)^p\alpha\wedge\zeta+\eta\wedge\mathrm{d}\,\zeta)
\end{aligned}$$

さらに、命題 9.11 により、$F^*(\alpha\wedge\beta) = F^*\alpha\wedge F^*\beta$ となるから、次が成立する。

命題 10.10 多様体上の微分形式の空間における外積 $\wedge : \Omega^p(M)\times\Omega^q(M) \longrightarrow \Omega^{p+q}(M)$ は多様体のドラーム・コホモロジー群 $H^*_{DR}(M)$ 上に外積 $\wedge : H^p_{DR}(M)\times H^q_{DR}(M) \longrightarrow H^{p+q}_{DR}(M)$ を定義する。多様体の間の C^∞ 級写像 $F : M \longrightarrow N$ に対し、$F^*([\alpha]\wedge[\beta]) = F^*[\alpha]\wedge F^*[\beta]$ が成立する。すなわち、F^* は外積代数の準同型である。

さて、次に $[0,1]\times M$ と M のドラームコホモロジー群は同型であることを示す。

命題 6.1 とその後の注意 6.2（20 ページ）によれば、ユークリッド空間の開集合 U に対して、$I_a : \Omega^p([0,1]\times U) \longrightarrow \Omega^{p-1}([0,1]\times U)$ で、$\mathrm{d}\,I_a(\alpha)+I_a(\mathrm{d}\,\alpha) = \alpha - \pi^*(\iota_a{}^*\alpha)$ を満たすものが次で定義されている。

$$I_a(\alpha) = \sum_{0<i_2<\cdots<i_p}\left(\int_a^{x_0} f_{0i_2\cdots i_p}(x_0,x_1,\ldots,x_n)\,\mathrm{d}x_0\right)\mathrm{d}x_{i_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_p}$$

多様体 M の座標近傍 (U,φ) に対し、$I_a^{(U)} : \Omega^p([0,1]\times\varphi(U)) \longrightarrow \Omega^{p-1}([0,1]\times\varphi(U))$ を上と同じ式で定義する。

命題 10.11 $I_a^{(U)}$ は $I_a : \Omega^p([0,1]\times M) \longrightarrow \Omega^{p-1}([0,1]\times M)$ を定義する。この I_a は $\mathrm{d}\,I_a(\alpha)+I_a(\mathrm{d}\,\alpha) = \alpha - \pi^*(\iota_a{}^*\alpha)$ を満たす。

証明 M の座標近傍 (U,φ), (V,ψ) に対し、$\alpha\in\Omega^p([0,1]\times M)$ の $[0,1]\times\varphi(U)$ における表示 $\alpha^{(U)}$ の $\mathrm{d}x_0$ を含む成分 $\displaystyle\sum_{0<i_2<\cdots<i_p} f_{0i_2\cdots i_p}\,\mathrm{d}x_0\wedge\mathrm{d}x_{i_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_p}$ は $\mathrm{id}\times(\varphi\circ\psi^{-1}) : [0,1]\times\psi(U\cap V) \longrightarrow [0,1]\times\varphi(U\cap V)$ で引き戻すと、α の $[0,1]\times\psi(V)$ における表示 $\alpha^{(V)}$ の $\mathrm{d}x_0$ を含む成分 $\displaystyle\sum_{0<j_2<\cdots<j_p} g_{0j_2\cdots j_p}\,\mathrm{d}x_0\wedge\mathrm{d}y_{j_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}y_{j_p}$ に、$[0,1]\times\psi(U\cap V)$ 上で一致する。$\alpha^{(V)} = (\mathrm{id}\times(\varphi\circ\psi^{-1}))^*\alpha^{(U)}$ だからである。従って、

$$(\mathrm{id}\times(\varphi\circ\psi^{-1}))^* I_a^{(U)}\alpha^{(U)} = I_a^{(V)}\alpha^{(V)}$$

が成立している。

定義 7.6 により、$I_a : \Omega^p([0,1]\times M) \longrightarrow \Omega^{p-1}([0,1]\times M)$ が定義される。この I_a が $\mathrm{d}\,I_a(\alpha)+I_a(\mathrm{d}\,\alpha) = \alpha - \pi^*(\iota_a{}^*\alpha)$ を満たすことは、命題 6.1 とその後の注意 6.2（20 ページ）によりわかる。 ■

定理 10.12 $\pi : [0,1]\times M \longrightarrow M$ および $\iota_a : M \longrightarrow [0,1]\times M$ がドラーム・コホモロジー群に誘導する写像 $\pi^* : H^p_{DR}(M) \longrightarrow H^p_{DR}([0,1]\times M)$, ${\iota_a}^* : H^p_{DR}([0,1]\times M) \longrightarrow H^p_{DR}(M)$ は同型写像である。${\iota_a}^*\circ\pi^* = \mathrm{id}_{H^p_{DR}(M)}$, $\pi^*{\iota_a}^* = \mathrm{id}_{H^p_{DR}([0,1]\times M)}$ であり、従って、${\iota_0}^* = (\pi^*)^{-1} = {\iota_1}^*$ である。

証明 $\pi\circ\iota = \mathrm{id}_M$ であるから、命題 9.7 により、$\iota^*\circ\pi^* = {\mathrm{id}_M}^*$ であり、${\mathrm{id}_M}^*$ は $H^p_{DR}(M)$ の恒等写像 $\mathrm{id}_{H^p_{DR}(M)}$ に一致する。

$(\iota_a\circ\pi)^* = \pi^*{\iota_a}^*$ に対して、命題 10.11 により、$p > 0$ に対して、$I_a : \Omega^p([0,1]\times M) \longrightarrow \Omega^{p-1}([0,1]\times M)$ で、$\mathrm{d}\, I_a(\alpha) + I_a(\mathrm{d}\,\alpha) = \alpha - \pi^*({\iota_a}^*\alpha)$ ものがある。このとき、α を $[0,1]\times M$ 上の閉 p 形式 $(p>0)$ とすると、$\mathrm{d}\,\alpha = 0$ だから、$\mathrm{d}\, I_a(\alpha) = \alpha - \pi^*({\iota_a}^*\alpha)$, コホモロジー類について $[\alpha] - [\pi^*({\iota_a}^*\alpha)] = 0$ となる。従って、$\pi^*{\iota_a}^* = \mathrm{id}_{H^p_{DR}([0,1]\times M)}$ となる。$p=0$ のとき、$[0,1]\times M$ 上の閉 0 形式 α は、局所定数関数であり、$\pi^*({\iota_a}^*\alpha)$ と一致する。 ■

定義 10.13 2つの C^∞ 級写像 $\varphi_0,\ \varphi_1 : M \longrightarrow N$ が、C^∞ ホモトピックであるとは、C^∞ 級写像 $\varphi : [0,1]\times M \longrightarrow N$ で、$\varphi_0 = \varphi(0,\cdot)$, $\varphi_1 = \varphi(1,\cdot)$ となるものが存在することである。

命題 10.14 $\varphi_0,\ \varphi_1 : M \longrightarrow N$ が、C^∞ ホモトピックのとき、${\varphi_0}^* = {\varphi_1}^*$ である.

証明 $\varphi_0 = \varphi\circ\iota_0,\ \varphi_1 = \varphi\circ\iota_1$ である。${\iota_0}^* = \iota_1^* : H^p_{DR}([0,1]\times M) \longrightarrow H^p_{DR}(M)$ だから、${\varphi_0}^* = {\iota_0}^*\varphi^* = {\iota_1}^*\varphi^* = {\varphi_1}^*$. ■

【問題 10.15】 多様体 M とユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^m$ の直積 $\boldsymbol{R}^m\times M$ に対し、$H^p_{DR}(\boldsymbol{R}^m\times M) \cong H^p_{DR}(M)$ である。

【解】 $\pi : \boldsymbol{R}^m\times M \longrightarrow M$ を $\pi(\boldsymbol{x},y) = y$ で定義される射影、$\iota : M \longrightarrow \boldsymbol{R}^m\times M$ を $\iota(y) = (0,y)$ で定義される埋め込みとする。

$\pi\circ\iota = \mathrm{id}_M$ だから、$(\pi\circ\iota)^* = \iota^*\pi^* = \mathrm{id}_{H^p_{DR}(M)}$ である。

$\varphi : [0,1]\times\boldsymbol{R}^m\times M \longrightarrow \boldsymbol{R}^m\times M$ を $\varphi(t,\boldsymbol{x},y) = (t\boldsymbol{x},y)$ で定義すると、これは、$\varphi_1 = \mathrm{id}_{\boldsymbol{R}^m\times M}$, $\varphi_0 = \iota\circ\pi$ の間のホモトピーを与える。従って、$(\iota\circ\pi)^* = {\mathrm{id}_{\boldsymbol{R}^m\times M}}^* = \mathrm{id}_{H^p_{DR}(\boldsymbol{R}^m\times M)}$ である。$(\iota\circ\pi)^* = \pi^*\iota^*$ だから、$\pi^*,\ \iota^*$ は同型写像である。

11 ファンクターという見方

2つの C^∞ 級多様体の間では、C^∞ 級写像を考えるのが自然である。C^∞ 級多様体全体を「対象」(object) とし、C^∞ 級写像全体を「射」(morphism) とする「圏」(category) を考えている。射 $F_1 : M_1 \longrightarrow M_2$, $F_2 : M_2 \longrightarrow M_3$ に対して結合 $F_2\circ F_1 : M_1 \longrightarrow M_3$ が定義され、射のなかに恒等写像 $\mathrm{id}_M : M \longrightarrow M$ がある。

2つのベクトル空間の間では、線形写像を考えるのが自然であり、ベクトル空間全体を「対象」とし、線形写像全体を「射」とする「圏」を考えることができる。射 $A_1 : V_1 \longrightarrow V_2$, $A_2 : V_2 \longrightarrow V_3$ に対して結合 $A_2\circ A_1 : V_1 \longrightarrow V_3$ が定義され、射のなかに恒等写像 $\mathrm{id}_V : V \longrightarrow V$ がある。

さらに、2つのコチェイン複体の間では、コチェイン写像を考えるのが自然であり、コチェイン複体全体を「対象」とし、コチェイン写像全体を「射」とする「圏」が考えられる。

命題 9.7, 命題 10.7 により、微分形式を対応させる対応は、(C^∞ 級多様体, C^∞ 級写像) の圏から、(コチェイン複体, コチェイン写像) の圏への反変

(contravariant) 関手 (functor) となる。関手とは、対象 M に対象 $\Omega^*(M)$ を対応させ、射 $F: M \longrightarrow N$ に射 $F^*: \Omega^*(N) \longrightarrow \Omega^*(M)$ を対応させるもので結合について $(F_2 \circ F_1)^* = {F_1}^*{F_2}^*$ を満たすという意味である。反変という語は、写像の向きが F と F^* で M, N について逆になっていることを述べている。

p 次コホモロジー群をとる対応は、(コチェイン複体, コチェイン写像) の圏から、(ベクトル空間, 線形写像) の圏への同変関手となる。すなわち、$F^*: \Omega^*(N) \longrightarrow \Omega^*(M)$ に対して、$F^*: H^p_{DR}(N) \longrightarrow H^p_{DR}(M)$ を得る。

この 2 つの対応の結合は、(C^∞ 級多様体, C^∞ 級写像) の圏から (ベクトル空間, 線形写像) の圏への反変関手である。これが、定理 10.8 である。

さて、このことをこのことから、2 つの多様体 M, N が微分同相ならば, $H^p_{DR}(M)$, $H^p_{DR}(N)$ は同型であることがわかる。

さらに強く命題 10.14 から次がいえる。2 つの多様体 M, N に対して、C^∞ 級写像 $f: M \longrightarrow N$, $g: N \longrightarrow M$ で、$f \circ g$ と id_N が C^∞ ホモトピック、$g \circ f$ と id_M も C^∞ ホモトピックとなるものがあれば、$H^p_{DR}(M)$, $H^p_{DR}(N)$ は同型である。

注意 11.1　ここの f, g は実は連続写像であってもよい。連続写像は C^∞ 級写像で近似できるからである。結局、ホモトピー同値な 2 つの多様体のドラーム・コホモロジー群は同形となる。

従って、ドラームコホモロジー群を計算することにより、2 つの多様体が異なることを示すことが可能である。次の節のマイヤー・ビエトリス完全列は、ドラーム・コホモロジー群の計算の方法を与える。

12　マイヤー・ビエトリス完全列

M_1, M_2 をコンパクト多様体 M の開集合で $M = M_1 \cup M_2$ を満たすものとする.

$M_{12} = M_1 \cap M_2$ とおき,

$$\begin{array}{ccccc} & & M_1 & & \\ & {\scriptstyle i_1}\nearrow & & \searrow{\scriptstyle j_1} & \\ M_{12} & & & & M \\ & {\scriptstyle i_2}\searrow & & \nearrow{\scriptstyle j_2} & \\ & & M_2 & & \end{array}$$

を包含写像とする.

このとき、次の命題が成立する。

命題 12.1 次の列は完全である。

$$0 \longrightarrow \Omega^p(M) \xrightarrow{(j_1^*, j_2^*)} \Omega^p(M_1) \oplus \Omega^p(M_2) \xrightarrow{i_1^* - i_2^*} \Omega^p(M_{12}) \longrightarrow 0$$

証明　(j_1^*, j_2^*) が単射であること、$(i_1^* - i_2^*) \circ (j_1^*, j_2^*) = 0$ であることは写像の意味を考えればすぐにわかる。

$i_1^* - i_2^*$ が全射であることは、次のように示す。

M_1, M_2 に対し、開集合 V_1, V_2 で、$\overline{V_1} \subset M_1$, $\overline{V_2} \subset M_2$, $V_1 \cup V_2 = M$ であるものをとる。定理 7.4 により、M 上の C^∞ 級関数 λ_1 を $1 \leqq \lambda_1 \leqq 1$, $\lambda_1|(M \backslash V_2) = 1$, $\mathrm{supp}\,\lambda_1 \subset V_1$. を満たすようにとることができる。$\lambda_2 = 1 - \lambda_1$ とすると、$\{\lambda_1, \lambda_2\}$ は M の開被覆 $\{M_1, M_2\}$ に従属した 1 の分割となる。

λ_2 の台は M_2 のコンパクト部分集合だから $M \setminus M_2$ の近傍で $\lambda_2 = 0$ である。$\alpha \in \Omega^p(M_{12})$ に対して、$\lambda_2\alpha$ を考えるとこれは、$M \setminus M_2$ に 0 となるように拡張して、$M_{12} \cup (M \setminus M_2) = M_1$ 上の微分 p 形式と見ることができる：$\lambda_2\alpha \in \Omega^p(M_1)$. 同様に、$-\lambda_1\alpha \in \Omega^p(M_2)$ と考えられる。このとき、

$$(i_1^* - i_2^*)(\lambda_2\alpha, -\lambda_1\alpha) = \lambda_2\alpha + \lambda_1\alpha = \alpha$$

となる。 ■

命題 10.7 により外微分 d と引き戻しは可換だから次は可換図式となる。

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & \mathrm{d}\uparrow & & \mathrm{d}\uparrow & & \mathrm{d}\uparrow & & \\
0 & \longrightarrow & \Omega^{p+1}(M) & \xrightarrow{(j_1^*, j_2^*)} & \Omega^{p+1}(M_1) \oplus \Omega^{p+1}(M_2) & \xrightarrow{i_1^* - i_2^*} & \Omega^{p+1}(M_{12}) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \mathrm{d}\uparrow & & \mathrm{d}\uparrow & & \mathrm{d}\uparrow & & \\
0 & \longrightarrow & \Omega^{p}(M) & \xrightarrow{(j_1^*, j_2^*)} & \Omega^{p}(M_1) \oplus \Omega^{p}(M_2) & \xrightarrow{i_1^* - i_2^*} & \Omega^{p}(M_{12}) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \mathrm{d}\uparrow & & \mathrm{d}\uparrow & & \mathrm{d}\uparrow & & \\
0 & \longrightarrow & \Omega^{p-1}(M) & \xrightarrow{(j_1^*, j_2^*)} & \Omega^{p-1}(M_1) \oplus \Omega^{p-1}(M_2) & \xrightarrow{i_1^* - i_2^*} & \Omega^{p-1}(M_{12}) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \mathrm{d}\uparrow & & \mathrm{d}\uparrow & & \mathrm{d}\uparrow & &
\end{array}$$

M_{12} 上の p 次閉微分形式 α に対し, M_1 上の p 次微分形式 α_1 と M_2 上の p 次微分形式 α_2 とを $i_1^*\alpha_1 - i_2^*\alpha_2 = \alpha$ となるように取り, M_1 上の $p+1$ 次微分形式 $\mathrm{d}\,\alpha_1$ と M_2 上の $p+1$ 次微分形式 $\mathrm{d}\,\alpha_2$ とを考えると, これらは M_{12} 上で一致し, M 上の $p+1$ 次閉微分形式 β を定める. これにより、線型写像 $\Delta^* : H^p(M_{12}) \longrightarrow H^{p+1}(M)$ が定まる.

命題 12.2 *(1)* M 上の $p+1$ 次閉微分形式 β のコホモロジー類 $[\beta]$ は、α に対する α_1, α_2 の取り方によらない。

(2) α が完全微分形式のとき、β も完全微分形式となる。

証明 (1) α_1', α_2' が $i_1^*\alpha_1' - i_2^*\alpha_2' = \alpha$ を満たすとする。$i_1^*(\alpha_1 - \alpha_1') - i_2^*(\alpha_2 - \alpha_2') = 0$ だから命題 12.1 により、$\gamma \in \Omega^p(M)$ で $(j_1^*, j_2^*)\gamma = (\alpha_1 - \alpha_1', \alpha_2 - \alpha_2')$ を満たすものがある。M_1 上の $p+1$ 次微分形式 $\mathrm{d}\,\alpha_1'$ と M_2 上の $p+1$ 次微分形式 $\mathrm{d}\,\alpha_2'$ が M_{12} 上で一致することにより定まる M 上の閉微分形式 β' に対して、$\beta - \beta' = \mathrm{d}\,\gamma$ となる。

(2) $\alpha = \mathrm{d}\,\eta$ とすると、$i_1^*\eta_1 - i_2^*\eta_2 = \eta$ となる $\eta_1 \in \Omega^{p-1}(M_1)$, $\eta_2 \in \Omega^{p-1}(M_2)$ がとれる。$\alpha_1 = \mathrm{d}\,\eta_1$, $\alpha_2 = \mathrm{d}\,\eta_2$ ととることができるので、$\mathrm{d}\,\alpha_1 = 0$, $\mathrm{d}\,\alpha_2 = 0$ となり、$\beta = 0$ と取れることになる。これは (1) の結果により、どのような α_1, α_2 をとっても β は完全形式になることを言っている。 ■

定理 12.3 (マイヤー・ビエトリス完全列) 次の列は完全列となる

$$\begin{array}{cccccc}
 & & & \cdots & \xrightarrow{i_1^* - i_2^*} & H^{p-1}(M_{12}) \\
\xrightarrow{\Delta^*} & H^p(M) & \xrightarrow{(j_1^*, j_2^*)} & H^p(M_1) \oplus H^p(M_2) & \xrightarrow{i_1^* - i_2^*} & H^p(M_{12}) \\
\xrightarrow{\Delta^*} & H^{p+1}(M) & \xrightarrow{(j_1^*, j_2^*)} & \cdots & &
\end{array}$$

証明 1) $\Delta^*(i_1^* - i_2^*) = 0$ を示す。閉形式の対 $(\alpha_1, \alpha_2) \in \Omega^p(M_1) \oplus \Omega^p(M_2)$ に対し、$\alpha_{12} = i_1^*\alpha_1 - i_2^*\alpha_2 \in \Omega^p(M_{12})$ が得られている。α_{12} に対し、(α_1, α_2) をとれば、$(\mathrm{d}\,\alpha_1, \mathrm{d}\,\alpha_2) = (0, 0)$ だから、$\Delta^*(i_1^* - i_2^*) = 0$ である。

2) $(j_1^*, j_2^*)\Delta^* = 0$ を示す。閉形式 $\alpha_{12} \in \Omega^p(M_{12})$ に対し、$\alpha_{12} = i_1^*\alpha_1 - i_2^*\alpha_2$ となる $(\alpha_1, \alpha_2) \in \Omega^p(M_1) \oplus \Omega^p(M_2)$ をとり、$(\mathrm{d}\,\alpha_1, \mathrm{d}\,\alpha_2) = (j_1^*\alpha, j_2^*\alpha)$ とす

る閉形式 α のコホモロジー類を対応させるのが Δ^* であるが、$(\mathrm{d}\,\alpha_1, \mathrm{d}\,\alpha_2) = (j_1^*\alpha, j_2^*\alpha)$ は、$(j_1^*, j_2^*)\Delta^* = 0$ を意味している。

3) $(i_1^* - i_2^*)(j_1^*, j_2^*) = 0$ は、$(i_1^* - i_2^*)(j_1^*, j_2^*)\alpha = i_1^*j_1^*\alpha - i_2^*j_2^*\alpha = 0$ からわかる。

4) $\ker\Delta^* \subset \mathrm{im}(i_1^* - i_2^*)$ を示す。次の図式を参照せよ。

$$
\begin{array}{ccccc}
\alpha & \xmapsto{(j_1^*, j_2^*)} & (\mathrm{d}\,\alpha_1, \mathrm{d}\,\alpha_2) & \xmapsto{i_1^* - i_2^*} & 0 \\
\uparrow \mathrm{d} & & \uparrow \mathrm{d} & & \uparrow \mathrm{d} \\
\beta & & (\alpha_1, \alpha_2) & \xmapsto{i_1^* - i_2^*} & \alpha_{12} \\
 & & (\alpha_1 - j_1^*\beta, \alpha_2 - j_2^*\beta) & &
\end{array}
$$

閉形式 $\alpha_{12} \in \Omega^p(M_{12})$ に対し、$\alpha_{12} = i_1^*\alpha_1 - i_2^*\alpha_2$ となる $(\alpha_1, \alpha_2) \in \Omega^p(M_1) \oplus \Omega^p(M_2)$ をとり、$(\mathrm{d}\,\alpha_1, \mathrm{d}\,\alpha_2) = (j_1^*\alpha, j_2^*\alpha)$ とする閉形式 α に対し、$\alpha = \mathrm{d}\,\beta$ とする $\beta \in \Omega^p(M)$ があるとする。$(\mathrm{d}\,\alpha_1, \mathrm{d}\,\alpha_2) = (j_1^*\,\mathrm{d}\,\beta, j_2^*\,\mathrm{d}\,\beta) = (\mathrm{d}\,j_1^*\beta, \mathrm{d}\,j_2^*\beta)$ だから、$(\alpha_1 - j_1^*\beta, \alpha_2 - j_2^*\beta)$ は閉形式の対である。$i_1^*(\alpha_1 - j_1^*\beta) - i_2^*(\alpha_2 - j_2^*\beta) = i_1^*\alpha_1 - i_2^*\alpha_2 = \alpha_{12}$ となり、$[\alpha_{12}] = (i_1^* - i_2^*)([\alpha_1 - j_1^*\beta], [\alpha_2 - j_2^*\beta])$ となる。

5) $\ker(j_1^*, j_2^*) \subset \mathrm{im}\,\Delta^*$ を示す。$(j_1^*\alpha, j_2^*\alpha) = (\mathrm{d}\,\beta_1, \mathrm{d}\,\beta_2)$ とする。$i_1^*\beta_1 - i_2^*\beta_2 = \alpha_{12}$ とおくと、$\mathrm{d}\,\alpha_{12} = \mathrm{d}\,i_1^*\beta_1 - \mathrm{d}\,i_2^*\beta_2 = i_1^*\,\mathrm{d}\,\beta_1 - \mathrm{d}\,i_2^*\,\mathrm{d}\,\beta_2 = i_1^*j_1^*\alpha - i_2^*j_2^*\alpha = 0$ であり、$[\alpha] = \Delta^*[\alpha_{12}]$ となる。

6) $\ker(i_1^* - i_2^*) \subset \mathrm{im}(j_1^*, j_2^*)$ を示す。次の図式を参照せよ。

$$
\begin{array}{ccccc}
\alpha & \xmapsto{(j_1^*, j_2^*)} & (\alpha_1 - \mathrm{d}\,\beta_1, \alpha_2 - \mathrm{d}\,\beta_2) & \xmapsto{i_1^* - i_2^*} & 0 \\
 & & (\alpha_1, \alpha_2) & & \alpha_{12} \\
 & & \uparrow \mathrm{d} & & \uparrow \mathrm{d} \\
 & & (\beta_1, \beta_2) & \xmapsto{i_1^* - i_2^*} & \beta_{12}
\end{array}
$$

閉形式の対 $(\alpha_1, \alpha_2) \in \Omega^p(M_1) \oplus \Omega^p(M_2)$ に対し、$i_1^*\alpha_1 - i_2^*\alpha_2 = \mathrm{d}\,\beta_{12}$ となる $\beta_{12} \in \Omega^{p-1}(M_{12})$ があるとする。$\beta_{12} = i_1^*\beta_1 - i_2^*\beta_2$ とする $(\beta_1, \beta_2) \in \Omega^{p-1}(M_1) \oplus \Omega^{p-1}(M_2)$ をとる。$(\alpha_1 - \mathrm{d}\,\beta_1, \alpha_2 - \mathrm{d}\,\beta_2)$ に対して、$(i_1^* - i_2^*)(\alpha_1 - \mathrm{d}\,\beta_1, \alpha_2 - \mathrm{d}\,\beta_2) = 0$ だから、$(j_1^*, j_2^*)\alpha = (\alpha_1 - \mathrm{d}\,\beta_1, \alpha_2 - \mathrm{d}\,\beta_2)$ となる α がある。(j_1^*, j_2^*) は単射だから $\mathrm{d}\,\alpha = 0$ であることがわかる。 ■

13　球面のドラームコホモロジー

円周 $S^1 = \boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}$ を $M_1 = \pi((0,1))$, $M_2 = \pi((-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}))$ で被覆する。$M_{12} = M_1 \cap M_2$ として、マイヤー・ビエトリス完全列を書き下すと、

$$0 \longrightarrow H^0_{DR}(S^1) \longrightarrow H^0_{DR}(M_1) \oplus H^0_{DR}(M_2) \longrightarrow H^0_{DR}(M_{12}) \longrightarrow H^1_{DR}(S^1) \longrightarrow 0$$

は次と同型である。

$$0 \longrightarrow \quad \boldsymbol{R} \quad \longrightarrow \quad \boldsymbol{R} \oplus \boldsymbol{R} \quad \longrightarrow \quad \boldsymbol{R} \oplus \boldsymbol{R} \quad \longrightarrow H^1_{DR}(S^1) \longrightarrow 0$$

ここで H^0_{DR} は連結成分上定数であるような関数と同一視される。この列が完全であるから、$H^1_{DR}(S^1) \cong \boldsymbol{R}$ となる。

【問題 13.1】　$\nu_1 : [0, \frac{1}{2}] \longrightarrow [0,1]$ を $[0, \frac{1}{6}]$ 上で 0, $[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$ 上で 1 であるような C^∞ 級関数, $\nu_1 : [\frac{1}{2}, 1] \longrightarrow [0,1]$ を $\nu_2(t) = \nu_1(t - \frac{1}{2})$ と定義する。ν_1, ν_2 とその導関数を使って、$\Delta^* : H^0_{DR}(M_{12}) \longrightarrow H^1_{DR}(S^1)$ を記述せよ ($\Delta^*(a,b)$ を代表する 1 形式を書け)。

【解】　$\lambda_1 = \begin{cases} \nu_1 & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ 1 - \nu_2 & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$, $\lambda_2 = 1 - \lambda_1$ は M_1, M_2 に対する 1 の分割である。$f : M_{12} \longrightarrow \boldsymbol{R}$ を $\pi((0, \frac{1}{2}))$ 上で a, $\pi((\frac{1}{2}, 1))$ 上で b となる関数とす

る。$f_1 = \lambda_2 f = \begin{cases} a(1-\nu_1) & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ 1-\nu_2 & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$ は M_1 上の C^∞ 級関数, $f_2 = -\lambda_1 f = \begin{cases} -a\nu_1 & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ -b(1-\nu_2) & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$ は M_2 上の C^∞ 級関数で、$i_1^* f_1 - i_2^* f_2 = f$ となる。M_{12} 上で $\mathrm{d}\, f_1 = \mathrm{d}\, f_2 = -a\,\mathrm{d}\,\nu_1 + b\,\mathrm{d}\,\nu_2$ となる $\alpha = -a\,\mathrm{d}\,\nu_1 + b\,\mathrm{d}\,\nu_2 = (-a\dfrac{\mathrm{d}\,\nu_1}{\mathrm{d}\,t} + b\dfrac{\mathrm{d}\,\nu_2}{\mathrm{d}\,t})\,\mathrm{d}t$ は S^1 上の微分 1 形式であり、$\Delta^*(a,b) = [\alpha]$ である。

注意 13.2 M_{12} 上の関数 f は $a = b$ のとき、$(i_1^* - i_2^*)(a, 0)$ と一致し、$\Delta^*(a,a) = 0$ となる。実際、$\alpha = d(a\lambda_2)$ と書かれる。$a \neq b$ のとき、$\Delta^*(a,b)$ は $H^1_{DR}(S^1)$ の基底である。また、$\displaystyle\int_0^1 (-a\frac{\mathrm{d}\,\nu_1}{\mathrm{d}\,t} + b\frac{\mathrm{d}\,\nu_2}{\mathrm{d}\,t})\,\mathrm{d}t = b - a$ となり、ν_1, ν_2 のとりかたによらない。このコホモロジー類は $(b-a)\,\mathrm{d}t$ のコホモロジー類と一致する。

2 次元以上の球面のドラームコホモロジー群 $H^*_{DR}(S^k)$ $(k > 1)$ は次のように計算される。

$H^0_{DR}(S^k)$ は S^k 上の定値関数全体と同一視されるから、$H^0_{DR}(S^k) \cong \boldsymbol{R}$ である。$H^p_{DR}(S^k) \cong 0$ $(1 \leqq p < k)$, $H^k_{DR}(S^k) \cong \boldsymbol{R}$ を k についての帰納法でしめす。

$M_1 = S^k \setminus \{(0, \dots, 0, -1)\}$, $M_2 = S^k \setminus \{(0, \dots, 0, 1)\}$ とすると、$M_{12} = M_1 \cap M_2$ は $(-1,1) \times S^{k-1}$ と微分同相である。例題 10.15 により、$H^p_{DR}(M_{12}) \cong H^p_{DR}(S^{k-1})$ である。帰納法の仮定により、$H^p_{DR}(S^{k-1}) \cong 0$ $(1 \leqq p < k-1)$, $H^{k-1}_{DR}(S^{k-1}) \cong \boldsymbol{R}$ が成立しているからマイヤー・ビエトリス完全列において

$$\longrightarrow H^{k-1}_{DR}(M_1) \oplus H^{k-1}_{DR}(M_2) \longrightarrow H^{k-1}_{DR}(M_{12}) \longrightarrow H^k_{DR}(S^k) \longrightarrow 0$$

は次と同型である。

$$\longrightarrow \quad 0 \oplus 0 \quad \longrightarrow \quad \boldsymbol{R} \quad \longrightarrow H^k_{DR}(S^k) \longrightarrow 0$$

従って、$H^p_{DR}(S^k) \cong \boldsymbol{R}$ $(p = 0,\, k)$, $H^p_{DR}(S^k) \cong 0$ $(p \neq 0,\, k)$ となる。

このとき、λ_1, λ_2 を M_1, M_2 に従属する 1 の分割とし、$[\omega^{k-1}]$ が $H^{k-1}_{DR}(S^{k-1})$ の基底とするとき、$H^k_{DR}(S^k)$ の基底 $[\omega^k]$ は $[\omega^k] = \Delta[\omega^{k-1}] = [\mathrm{d}(\lambda_2 \pi^* \omega^{k-1})]$ ととることができる。

【問題 13.3】 単位球面 $S^2 \subset \boldsymbol{R}^3$ の点 $p_N = (0,0,1)$, $p_S = (0,0,-1)$ から $\boldsymbol{R}^2 \times \{0\}$ へのステレオグラフィック・プロジェクション $\pi_N : S^2 \setminus \{p_N\} \longrightarrow \boldsymbol{R}^2$, $\pi_S : S^2 \setminus \{p_S\} \longrightarrow \boldsymbol{R}^2$ は次で定義される。

$$\pi_N(x_1, x_2, x_3) = (v_1, v_2) = (\frac{x_1}{1 - x_3}, \frac{x_2}{1 - x_3})$$
$$\pi_S(x_1, x_2, x_3) = (u_1, u_2) = (\frac{x_1}{1 + x_3}, \frac{x_2}{1 + x_3})$$

(1) π_N, π_S の逆写像を求めよ。

(2) $\{(S^2 \setminus \{p_N\}, \pi_N), (S^2 \setminus \{p_S\}, \pi_S)\}$ を S^2 の座標近傍系とするとき、座標変換を計算せよ。

(3) $\boldsymbol{R}^3$ 上の微分形式 $\omega = x_1\,\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 - x_2\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_3 + x_3\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2$ に対し、$(\pi_S^{-1})^*(\omega|S^2)$ を計算せよ。

(4) $\boldsymbol{R}^3 \setminus \{(0,0)\} \times \boldsymbol{R}$ 上の微分形式 $\alpha = \dfrac{x_1\,\mathrm{d}x_2 - x_2\,\mathrm{d}x_1}{{x_1}^2 + {x_2}^2}$ に対し、$\mathrm{d}\,\alpha = 0$ を示せ。$\boldsymbol{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ 上の微分形式 $(\pi_S^{-1})^*(\alpha|S^2 \setminus \{p_N, p_S\})$ を計算せよ。

(5) $\gamma : [0,1] \longrightarrow \boldsymbol{R}^3$ を $\gamma(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t), 0)$ とするとき、$\displaystyle\int_\gamma \alpha$ を計算せよ。

(6) $\alpha_1 = \dfrac{1 - x_3}{2}\alpha$ は $S^2 \setminus \{p_S\}$ 上の C^∞ 級微分形式であることを示せ。同様

に $-\alpha_2 = \dfrac{1+x_3}{2}\alpha$ は $S^2 \setminus \{p_N\}$ 上の C^∞ 級微分形式であり、$S^2 \setminus \{p_N, p_S\}$ 上で $\alpha = \alpha_1 - \alpha_2$ となる。

【問題 13.3 の解答】

(1) $(x_1, x_2, x_3) = (\dfrac{2v_1}{1+{v_1}^2+{v_2}^2}, \dfrac{2v_2}{1+{v_1}^2+{v_2}^2}, -\dfrac{1-{v_1}^2-{v_2}^2}{1+{v_1}^2+{v_2}^2})$, $(x_1, x_2, x_3) = (\dfrac{2u_1}{1+{u_1}^2+{u_2}^2}, \dfrac{2u_2}{1+{u_1}^2+{u_2}^2}, \dfrac{1-{u_1}^2-{u_2}^2}{1+{u_1}^2+{u_2}^2})$.

(2) $(u_1, u_2) = (\dfrac{v_1}{{v_1}^2+{v_2}^2}, \dfrac{v_2}{{v_1}^2+{v_2}^2})$, $(v_1, v_2) = (\dfrac{u_1}{{u_1}^2+{u_2}^2}, \dfrac{u_2}{{u_1}^2+{u_2}^2})$.

(3) $\mathrm{d}x_1 = \mathrm{d}(\dfrac{2u_1}{1+{u_1}^2+{u_2}^2}) = \dfrac{2(1-{u_1}^2+{u_2}^2)}{(1+{u_1}^2+{u_2}^2)^2}\,\mathrm{d}u_1 - \dfrac{4u_1u_2}{(1+{u_1}^2+{u_2}^2)^2}\,\mathrm{d}u_2$,
$\mathrm{d}x_2 = \mathrm{d}(\dfrac{2u_2}{1+{u_1}^2+{u_2}^2}) = -\dfrac{4u_1u_2}{(1+{u_1}^2+{u_2}^2)^2}\,\mathrm{d}u_1 + \dfrac{2(1+{u_1}^2-{u_2}^2)}{(1+{u_1}^2+{u_2}^2)^2}\,\mathrm{d}u_2$,
$\mathrm{d}x_3 = \mathrm{d}(\dfrac{1-{u_1}^2-{u_2}^2}{1+{u_1}^2+{u_2}^2}) = \dfrac{-4u_1}{(1+{u_1}^2+{u_2}^2)^2}\,\mathrm{d}u_1 + \dfrac{-4u_2}{(1+{u_1}^2+{u_2}^2)^2}\,\mathrm{d}u_2$ だから、

$$\begin{aligned}
&(\pi_S^{-1})^*(\omega|S^2)\\
&= x_1\,\mathrm{d}x_2\wedge\mathrm{d}x_3 - x_2\,\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_3 + x_3\,\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2\\
&= \{(2u_1)(16u_1{u_2}^2 + 8u_1(1+{u_1}^2-{u_2}^2)) - (2u_2)(-8u_2(1-{u_1}^2+{u_2}^2) - 16{u_1}^2u_2)\\
&\quad +(1-{u_1}^2-{u_2}^2)(4(1-{u_1}^2+{u_2}^2)(1+{u_1}^2-{u_2}^2) - 16{u_1}^2{u_2}^2)\}\frac{\mathrm{d}u_1\wedge\mathrm{d}u_2}{(1+{u_1}^2+{u_2}^2)^5}\\
&= \{16{u_1}^2(1+{u_1}^2+{u_2}^2) + 16{u_2}^2(1+{u_1}^2+{u_2}^2)\\
&\quad +4(1-{u_1}^2-{u_2}^2)^2(1+{u_1}^2+{u_2}^2)\}\frac{\mathrm{d}u_1\wedge\mathrm{d}u_2}{(1+{u_1}^2+{u_2}^2)^5}\\
&= \frac{4\,\mathrm{d}u_1\wedge\mathrm{d}u_2}{(1+{u_1}^2+{u_2}^2)^2}
\end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned}
&\mathrm{d}(\frac{x_1\,\mathrm{d}x_2 - x_2\,\mathrm{d}x_1}{{x_1}^2+{x_2}^2})\\
&= \frac{2\,\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2}{{x_1}^2+{x_2}^2} - \frac{2x_1\,\mathrm{d}x_1 + 2x_2\,\mathrm{d}x_2}{({x_1}^2+{x_2}^2)^2}\wedge(x_1\,\mathrm{d}x_2 - x_2\,\mathrm{d}x_1)\\
&= \frac{2\,\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2}{{x_1}^2+{x_2}^2} - \frac{2\,\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2}{{x_1}^2+{x_2}^2} = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(\pi_S^{-1})^*(\alpha|S^2\setminus\{p_N,p_S\})\\
&= \frac{(1+{u_1}^2+{u_2}^2)^2}{4({u_1}^2+{u_2}^2)}\Big(\frac{2u_1}{1+{u_1}^2+{u_2}^2}(-\frac{4u_1u_2}{(1+{u_1}^2+{u_2}^2)^2}\,\mathrm{d}u_1 + \frac{2(1+{u_1}^2-{u_2}^2)}{(1+{u_1}^2+{u_2}^2)^2}\,\mathrm{d}u_2)\\
&\qquad -\frac{2u_2}{1+{u_1}^2+{u_2}^2}(\frac{2(1-{u_1}^2+{u_2}^2)}{(1+{u_1}^2+{u_2}^2)^2}\,\mathrm{d}u_1 - \frac{4u_1u_2}{(1+{u_1}^2+{u_2}^2)^2}\,\mathrm{d}u_2)\Big)\\
&= \frac{(1+{u_1}^2+{u_2}^2)^2}{4({u_1}^2+{u_2}^2)}\Big(-\frac{4u_2}{(1+{u_1}^2+{u_2}^2)^2}\,\mathrm{d}u_1 + \frac{4u_1}{(1+{u_1}^2+{u_2}^2)^2}\,\mathrm{d}u_2\Big)\\
&= \frac{u_1\,\mathrm{d}u_2 - u_2\,\mathrm{d}u_1}{{u_1}^2+{u_2}^2}
\end{aligned}$$

(5) $\displaystyle\int_\gamma \alpha = \int_0^1 2\pi(\cos(2\pi t)^2 + \sin(2\pi t)^2)\,\mathrm{d}t = 2\pi$

(6) $\alpha_1 = \dfrac{1}{2}(1 - \dfrac{1-{u_1}^2-{u_2}^2}{1+{u_1}^2+{u_2}^2})\dfrac{u_1\,\mathrm{d}u_2 - u_2\,\mathrm{d}u_1}{{u_1}^2+{u_2}^2} = \dfrac{u_1\,\mathrm{d}u_2 - u_2\,\mathrm{d}u_1}{1+{u_1}^2+{u_2}^2}$

【問題 13.4】 $M_1 = S^2 \setminus \{p_S\}$, $M_2 = S^2 \setminus \{p_N\}$ とおく。$S^2 = M_1 \cup M_2$, $M_1 \cap M_2 = M_{12}$ についてのマイヤー・ビエトリス完全列において

$$\longrightarrow H^1_{DR}(M_1)\oplus H^1_{DR}(M_2) \longrightarrow H^1_{DR}(M_{12}) \longrightarrow H^2_{DR}(S^2) \longrightarrow 0$$

は次と同型である。

$$\longrightarrow \quad 0\oplus 0 \quad \longrightarrow \quad \boldsymbol{R} \quad \longrightarrow H^2_{DR}(S^2) \longrightarrow 0$$

問題 13.3 の α は問題 13.3(4) により閉形式で、問題 13.3(5) により $H^1_{DR}(M_{12})$ の生成元となる。問題 13.3 を用いて $\Delta^*[\alpha|M_{12}]$ を代表する微分 2 形式を求

めよ。

【問題 13.4 の解答】

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\,\alpha_1 &= \mathrm{d}(\frac{u_1\,\mathrm{d}u_2 - u_2\,\mathrm{d}u_1}{1+{u_1}^2+{u_2}^2}) \\
&= \frac{2\,\mathrm{d}u_1 \wedge \mathrm{d}u_2}{1+{u_1}^2+{u_2}^2} - \frac{2u_1\,\mathrm{d}u_1 + 2u_2\,\mathrm{d}u_2}{(1+{u_1}^2+{u_2}^2)^2} \wedge (u_1\,\mathrm{d}u_2 - u_2\,\mathrm{d}u_1) \\
&= \frac{2\,\mathrm{d}u_1 \wedge \mathrm{d}u_2}{1+{u_1}^2+{u_2}^2} \\
&= \frac{1}{2}(\pi_S^{-1})^*(\omega|S^2)
\end{aligned}$$

ゆえに、$\Delta^*[\alpha|M_{12}] = \dfrac{1}{2}[\omega|S^2]$.

以上の議論をまとめると、k 次元球面 S^k のドラーム・コホモロジーについて次が得られた。

命題 13.5 *$k \geq 1$ に対し、$H^p_{DR}(S^k) \cong \boldsymbol{R}$ $(p=0,\ k)$, $H^p_{DR}(S^k) \cong 0$ $(0 < p < k)$ である。*

【問題 13.6】 n 次元コンパクト多様体 M 上のモース関数をとると、次のことがわかる。M の開部分集合 $N_1, \ldots, N_k$ で $\emptyset = N_0 \subset N_1 \subset \cdots \subset N_k = M$, $N_j = N_{j-1} \cup B_j$ $(0 < j \leqq k)$. ここで, B_j は n 次元開球体 B^n と微分同相で, $N_{j-1} \cap B_j$ は空集合または m_j 次元の球面 S^{m_j} と $n-m_j$ 次元開球体 B^{n-m_j} の直積 $B^{n-m_j} \times S^{m_j}$ に微分同相である $(0 \leqq m_j \leqq n-1)$. このことから、M のドラームコホモロジー群は有限次元ベクトル空間であることを示せ。

注意 13.7 モース理論による N_j への分解は、いわゆるハンドル分解と同じものであるが、$H^p_{DR}(M)$ が有限次元というだけでなく、具体的に M のトポロジーを把握し、$H^p_{DR}(M)$ その他の多様体の不変量を計算する上でも有用である。

【問題 13.6 の解答】 j についての帰納法により示す。すなわち、$H^p_{DR}(N_{j-1})$ が有限次元ベクトル空間であることを仮定して、$H^p_{DR}(N_j)$ が有限次元ベクトル空間であることを導けばよい。$N_j = N_{j-1} \cup B_j$ についてのマイヤー・ビエトリス完全列は次のようになる。

$$\begin{array}{ll}
\cdots & \xrightarrow{(j_1^*, j_2^*)} H^{p-1}_{DR}(N_{j-1}) \oplus H^{p-1}_{DR}(B_j) \xrightarrow{i_1^* - i_2^*} H^{p-1}_{DR}(N_{j-1} \cap B_j) \\
\xrightarrow{\Delta^*} H^p_{DR}(N_j) & \xrightarrow{(j_1^*, j_2^*)} H^p_{DR}(N_{j-1}) \oplus H^p_{DR}(B_j) \xrightarrow{i_1^* - i_2^*} H^p_{DR}(N_{j-1} \cap B_j) \\
\xrightarrow{\Delta^*} \cdots &
\end{array}$$

$H^p_{DR}(N_j)$ はベクトル空間の直和 $\mathrm{im}\,\Delta^* \oplus (H^p_{DR}(N_j)/\ker(j_1^*, j_2^*))$ と同型であるが、$\mathrm{im}\,\Delta^* \cong H^{p-1}_{DR}(N_{j-1} \cap B_j)/\ker\Delta^*$ は有限次元ベクトル空間 $H^{p-1}_{DR}(N_{j-1} \cap B_j) \cong H^{p-1}_{DR}(S^{m_j})$ の商ベクトル空間で有限次元、$H^p_{DR}(N_j)/\ker(j_1^*, j_2^*) \cong \mathrm{im}\,(j_1^*, j_2^*)$ は有限次元ベクトル空間 $H^p_{DR}(N_{j-1}) \oplus H^p_{DR}(B_j) \cong H^p_{DR}(N_{j-1}) \oplus H^p_{DR}(B^n)$ の部分ベクトル空間で有限次元である。従って $H^p_{DR}(N_j)$ は有限次元ベクトル空間となる。

14 直積のドラームコホモロジー

$T^2 = S^1 \times S^1$ のドラームコホモロジー群は、$H^2_{DR}(T^2) \cong \boldsymbol{R}$, $H^1_{DR}(T^2) \cong \boldsymbol{R}^2$, $H^0_{DR}(T^2) \cong \boldsymbol{R}$ であることをみた。その計算を見るとトーラス上の 1 をとる定数関数のコホモロジー類が、$H^0_{DR}(T^2)$ の基底にとれ、閉 1 形式 $\mathrm{d}x_1$, $\mathrm{d}x_2$ のコホモロジー類が $H^1_{DR}(T^2)$ の基底にとれ、$\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2$ が $H^2_{DR}(T^2)$ の基底に取れることがわかる。

2 つの多様体 M, N の直積 $M \times N$ に対して、射影 $\pi_M : M \times N \longrightarrow M$, $\pi_N : M \times N \longrightarrow N$ を考えると M の閉 p 形式 α, N の閉 q 形式 β に対して、$M \times N$ 上の閉 $p+q$ 形式 $\pi_M^*\alpha \wedge \pi_M^*\beta$ が得られる。T^2 の場合、S^1 から導かれたこのような閉形式がコホモロジー群を生成することがわかる。

この様子を記述するために、線形空間のテンソル積を用いる。

２つの有限次元ベクトル空間 V, W のテンソル積 $V\otimes W$ は, V の基底を $e_1,\ldots,e_k$, W の基底を $f_1,\ldots,f_\ell$ とするとき、$k\cdot\ell$ 個の記号 $e_i\otimes f_j$, ($i=1,\ldots,k$; $j=1,\ldots,\ell$) を基底とするベクトル空間として定義される。V の元 $v=\sum_{i=1}^{k}a_ie_i$, W の元 $w=\sum_{j=1}^{\ell}b_jf_j$ に対し、$v\otimes w=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{\ell}a_ib_je_i\otimes f_j\in V\otimes W$ が定まる。

２つのコホモロジー群 $H^*_{DR}(M)$, $H^*_{DR}(N)$ のテンソル積は、$H^*_{DR}(M)\otimes H^*_{DR}(N)$ の次元 p の部分を $\bigoplus_{i=0}^{p}H^i_{DR}(M)\otimes H^{p-i}_{DR}(N)$ とすることで定まる。

このとき、M 上の閉微分 p 形式 α, N 上の閉微分 q 形式 β に対し、$[\alpha]\otimes[\beta]\in H^p_{DR}(M)\otimes H^q_{DR}(N)$ が定まる。α, β に対しては、$\pi_M: M\times N\longrightarrow M$, $\pi_N: M\times N\longrightarrow N$ を射影として、$[\pi_M^*\alpha\wedge\pi_N^*\beta]\in H^{p+q}_{DR}(M\times N)$ も定まり、準同型 $H^p_{DR}(M)\otimes H^q_{DR}(N)\longrightarrow H^{p+q}_{DR}(M\times N)$ が $[\alpha]\otimes[\beta]\longmapsto[\pi_M^*\alpha\wedge\pi_N^*\beta]$ により定まる。

次が成立している

定理 14.1 (キネットの公式) ２つのコンパクト多様体 M, N に対し、$H^*_{DR}(M\times N)\cong H^*_{DR}(M)\otimes H^*_{DR}(N)$ である。さらに、M 上の閉微分 p 形式 α, N 上の閉微分 q 形式 β に対し、$[\alpha]\otimes[\beta]\in H^p_{DR}(M)\otimes H^q_{DR}(N)$ は $[\pi_M^*\alpha\wedge\pi_N^*\beta]\in H^{p+q}_{DR}(M\times N)$ に対応する。ここで $\pi_M: M\times N\longrightarrow M$, $\pi_N: M\times N\longrightarrow N$ は射影である。

この証明のために２つの補題を準備する。

補題 14.2 (５項補題) 線形空間と準同型写像の２つの完全列と準同型 F_i の可換図式

$$\begin{array}{ccccccccc}
A_1 & \longrightarrow & A_2 & \longrightarrow & A_3 & \longrightarrow & A_4 & \longrightarrow & A_5\\
\downarrow F_1 & & \downarrow F_2 & & \downarrow F_3 & & \downarrow F_4 & & \downarrow F_5\\
B_1 & \longrightarrow & B_2 & \longrightarrow & B_3 & \longrightarrow & B_4 & \longrightarrow & B_5
\end{array}$$

において、F_1, F_2, F_4, F_5 が同型写像ならば、F_3 は同型写像である。

補題 14.3 (テンソル積の完全性) 線形空間と準同型写像の完全列 $\cdots\longrightarrow A_0\longrightarrow A_1\longrightarrow A_2\longrightarrow\cdots$ と線形空間 B に対し、自然に引き起こされる写像について、$\cdots\longrightarrow A_0\otimes B\longrightarrow A_1\otimes B\longrightarrow A_2\otimes B\longrightarrow\cdots$ は完全列である（テンソル積は左からとっても同様である）。

この２つの補題の証明は、（線形空間と準同型の列については、特に）容易なので省略する。

$N=S^k$ のときのキネットの公式 14.1 の証明 k についての帰納法で示す。$k=0$ については $\Omega^*(M\times S^0)\cong\Omega^*(M)\oplus\Omega^*(M)$ であり、$H^p_{DR}(M)\otimes H^0_{DR}(S^0)\cong H^p_{DR}(M)\oplus H^p_{DR}(M)$ で正しい。

S^k に対して正しいと仮定する。第 13 節でとったように球面を $S^{k+1}=N_1\cup N_2$, $N_{12}=N_1\cap N_2\cong S^k\times\boldsymbol{R}$ のように表し、N_1, N_2 についてのマイヤービエトリス完全列に $H^*_{DR}(M)$ をテンソル積したものを考えると、補題 14.3 により次の図式の左の縦の列は完全列となる。ただし、N_1, N_2 はコホモロジーが等しい１点に置き換え、N_{12} は S^k に置き換えて表示した。

$$
\begin{array}{ccc}
 & \downarrow \mathrm{id}^* \otimes (j_1^*, j_2^*) & & \downarrow (j_1^*, j_2^*) \\
H_{DR}^{p-1}(M) \oplus H_{DR}^{p-1}(M) & & \longrightarrow & H_{DR}^{p-1}(M) \oplus H_{DR}^{p-1}(M) \\
 & \downarrow \mathrm{id}^* \otimes (i_1^* - i_2^*) & & \downarrow i_1^* - i_2^* \\
\bigoplus_{i=0}^{p-1} H_{DR}^i(M) \otimes H_{DR}^{p-1-i}(S^k) & & \longrightarrow & H_{DR}^{p-1}(M \times S^k) \\
 & \downarrow \mathrm{id}^* \otimes \Delta^* & & \downarrow \Delta^* \\
\bigoplus_{i=0}^{p} H_{DR}^i(M) \otimes H_{DR}^{p-i}(S^{k+1}) & & \longrightarrow & H_{DR}^{p}(M \times S^{k+1}) \\
 & \downarrow \mathrm{id}^* \otimes (j_1^*, j_2^*) & & \downarrow (j_1^*, j_2^*) \\
H_{DR}^{p}(M) \oplus H_{DR}^{p}(M) & & \longrightarrow & H_{DR}^{p}(M) \oplus H_{DR}^{p}(M) \\
 & \downarrow \mathrm{id}^* \otimes (i_1^* - i_2^*) & & \downarrow i_1^* - i_2^* \\
\bigoplus_{i=0}^{p} H_{DR}^i(M) \otimes H_{DR}^{p-i}(S^k) & & \longrightarrow & H_{DR}^{p}(M \times S^k) \\
 & \downarrow \mathrm{id}^* \otimes \Delta^* & & \downarrow \Delta^*
\end{array}
$$

ここで、$M \times S^{k+1} = (M \times N_1) \cup (M \times N_2)$ についてのマイヤー・ビエトリス完全列が右の縦の列である。ただし、$M \times N_1$, $M \times N_2$ はコホモロジーが等しい M に置き換え、$M \times N_{12}$ は $M \times S^k$ に置き換えて表示した。

この図式において、横の写像は、コホモロジー群のテンソル積から直積のコホモロジー群に定義されたもので図式は可換となる。

ここで、帰納法の仮定により、$p-1$ 次元コホモロジーの間の $\bigoplus_{i=0}^{p-1} H_{DR}^i(M) \otimes H_{DR}^{p-1-i}(S^k) \longrightarrow H_{DR}^{p-1}(M \times S^k)$ は同型写像、p 次元コホモロジーに対しても同様である。また、$H_{DR}^p(M) \oplus H_{DR}^p(M)$ の間の写像も恒等写像で同型写像である。従って補題 14.2 により、$\bigoplus_{i=0}^{p} H_{DR}^i(M) \otimes H_{DR}^{p-i}(S^{k+1}) \longrightarrow H_{DR}^p(M \times S^{k+1})$ は同型となる。

一般の N に対するキネットの公式 14.1 の証明　問題 13.6 のように、多様体 N に対して、$\emptyset = N_0 \subset N_1 \subset \cdots \subset N_k = N$, $N_j = N_{j-1} \cup B_j$ $(0 < j \leqq k)$, B_j は n 次元開球体 B^n と微分同相で, $N_{j-1} \cap B_j$ は空集合または m_j 次元の球面 S^{m_j} と $n - m_j$ 次元開球体 B^{n-m_j} の直積 $B^{n-m_j} \times S^{m_j}$ に微分同相である $(0 \leqq m_j \leqq n-1)$ という分解がとられているとする。

$M \times N_{j-1}$ に対して、定理の主張が正しいと仮定して、$M \times N_j$ に対する主張を証明する。

補題 14.3 により $N_j = N_{j-1} \cup B_j$ についてのマイヤー・ビエトリス完全列と $H^*(M)$ のテンソル積をとって得られる次の図式の左の縦の列は完全列となる。ただし、B_j はコホモロジーが等しい 1 点に置き換え、$N_{j-1} \cap B_j$ は S^{m_j} に置き換えて表示した。

$$
\begin{array}{ccc}
\downarrow \mathrm{id}^* \otimes (j_1^*, j_2^*) & & \downarrow (j_1^*, j_2^*) \\
\displaystyle\bigoplus_{i=0}^{p-1} H^i_{DR}(M) \otimes H^{p-1-i}_{DR}(N_{j-1}) \oplus H^{p-1}_{DR}(M) & \longrightarrow & H^{p-1}_{DR}(M \times N_{j-1}) \oplus H^{p-1}_{DR}(M \times B_j) \\
\downarrow \mathrm{id}^* \otimes (i_1^* - i_2^*) & & \downarrow i_1^* - i_2^* \\
\displaystyle\bigoplus_{i=0}^{p-1} H^i_{DR}(M) \otimes H^{p-1-i}_{DR}(S^{m_j}) & \longrightarrow & H^{p-1}_{DR}(M \times (N_{j-1} \cap B_j)) \\
\downarrow \mathrm{id}^* \otimes \Delta^* & & \downarrow \Delta^* \\
\displaystyle\bigoplus_{i=0}^{p} H^i_{DR}(M) \otimes H^{p-i}_{DR}(N_j) & \longrightarrow & H^p_{DR}(M \times N_j) \\
\downarrow \mathrm{id}^* \otimes (j_1^*, j_2^*) & & \downarrow (j_1^*, j_2^*) \\
\displaystyle\bigoplus_{i=0}^{p} H^i_{DR}(M) \otimes H^{p-i}_{DR}(N_{j-1}) \oplus H^p_{DR}(M) & \longrightarrow & H^p_{DR}(M \times N_{j-1}) \oplus H^p_{DR}(M \times B_j) \\
\downarrow \mathrm{id}^* \otimes (i_1^* - i_2^*) & & \downarrow i_1^* - i_2^* \\
\displaystyle\bigoplus_{i=0}^{p} H^i_{DR}(M) \otimes H^{p-i}_{DR}(S^{m_j}) & \longrightarrow & H^p_{DR}(M \times (N_{j-1} \cap B_j)) \\
\downarrow \mathrm{id}^* \otimes \Delta^* & & \downarrow \Delta^*
\end{array}
$$

ここで、$M \times N_j = (M \times N_{j-1}) \cup (M \times B_j)$ についてのマイヤー・ビエトリス完全列が右の縦の列である。この図式において、横の写像は、コホモロジー群のテンソル積から直積のコホモロジー群に定義されたもので図式は可換となる。

帰納法の仮定により、$p-1$ 次元において、

$$\bigoplus_{i=0}^{p-1} H^i_{DR}(M) \otimes H^{p-1-i}_{DR}(N_{j-1}) \oplus H^{p-1}_{DR}(M) \longrightarrow H^{p-1}_{DR}(M \times N_{j-1}) \oplus H^{p-1}_{DR}(M \times B_j),$$

は同型写像であり、p 次元についても同様である。また、球面との直積の場合のキネットの公式から

$$\bigoplus_{i=0}^{p-1} H^i_{DR}(M) \otimes H^{p-1-i}_{DR}(S^{m_j}) \longrightarrow H^{p-1}_{DR}(M \times (N_{j-1} \cap B_j))$$

も同型写像であり、p 次元についても同様である。従って補題 14.2 により、$\displaystyle\bigoplus_{i=0}^{p} H^i_{DR}(M) \otimes H^{p-i}_{DR}(N_j) \longrightarrow H^p_{DR}(M \times N_j)$ は同型となる。

【問題 14.4】 $H^*_{DR}(T^n) = \bigotimes^n H^*_{DR}(S^1)$ を示せ。特に $H^p_{DR}(T^n)$ の元は $a_{i_1 \cdots i_p}$ を定数として、$\alpha = \displaystyle\sum_{i_1 < \cdots < i_p} a_{i_1 \cdots i_p}\, \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_p}$ により代表される。

【問題 14.4 の解答】 n についての帰納法により示される。実際, $n = 1$ のときは $H^*_{DR}(T^n) = \bigotimes^n H^*_{DR}(S^1)$ は正しい。$H^*_{DR}(T^{n-1}) = \bigotimes^{n-1} H^*_{DR}(S^1)$ を仮定すると、定理 14.1 により、$H^*_{DR}(T^n) = H^*_{DR}(S^1) \otimes \bigotimes^{n-1} H^*_{DR}(S^1)$ を得る。k 番目の $H^*_{DR}(S^1)$ の生成元を $\mathrm{d}x_k$ とするとき $H^p_{DR}(T^n)$ の基底は $\mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_p}$ であるから、$H^p_{DR}(T^n)$ の任意の元は基底の線形結合に書かれる。

閉多様体 M について、$M \times M$ を考えると $H^*_{DR}(M \times M) \cong H^*_{DR}(M) \otimes H^*_{DR}(M)$ である。一方、対角写像 $\mathrm{diag} : M \longrightarrow M \times M$ が $\mathrm{diag}(x) = (x, x)$ により定義される。従って diag^* と同型写像を結合して $H^*_{DR}(M) \otimes H^*_{DR}(M) \longrightarrow H^*_{DR}(M)$ が定義される。

定義 14.5 対角写像が誘導する準同型写像 $H^*_{DR}(M) \otimes H^*_{DR}(M) \cong H^*(M \times M) \xrightarrow{\mathrm{diag}^*} H^*_{DR}(M)$ が、各 p, q に対して定める双線形写像 $\cup : H^p_{DR}(M) \times H^q_{DR}(M) \longrightarrow H^{p+q}_{DR}(M)$ をカップ積と呼ぶ。

定理 14.6 M の閉 p 形式 α, 閉 q 形式 β に対し、$[\alpha \wedge \beta] = [\alpha] \cup [\beta]$ が成立する。

証明 $\pi_1^*\alpha \wedge \pi_1^*\beta$ のコホモロジー類を diag で引き戻したものを考えればよい。

$$\begin{aligned}
\operatorname{diag}^*(\pi_1^*\alpha \wedge \pi_2^*\beta) &= \operatorname{diag}^* \pi_1^*\alpha \wedge \operatorname{diag}^* \pi_2^*\beta \\
&= (\pi_1 \circ \operatorname{diag})^*\alpha \wedge (\pi_2 \circ \operatorname{diag})^*\beta \\
&= \operatorname{id}^* \alpha \wedge \operatorname{id}^* \beta = \alpha \wedge \beta
\end{aligned}$$

だから

$$[\alpha] \cup [\beta] = [\operatorname{diag}^*(\pi_1^*\alpha \wedge \pi_2^*\beta)] = [\alpha \wedge \beta].$$

■

15 チェック・ドラーム複体

$\{U_i\}_{i=1,\dots,N}$ をコンパクト n 次元多様体 M の開被覆とする。$1 \le i_0 < i_1 < \cdots < i_k \le N$ に対し、

$$U_{i_0 i_1 \cdots i_k} = U_{i_0} \cap U_{i_1} \cap \cdots \cap U_{i_k}$$

とおく。 開被覆 $\{U_i\}_{1=1,\cdots N}$ は次の条件を満たすとする。

“任意の $U_{i_0 i_1 \cdots i_k}$ は $\boldsymbol{R}^n$ または空集合と微分同相である。”

次の可換図式を考える。

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & \uparrow \mathrm{d} & & \uparrow \mathrm{d} & & \uparrow \mathrm{d} & & \uparrow \mathrm{d} & \\
0 \to & \Omega^3(M) & \xrightarrow{r} & \bigoplus_i \Omega^3(U_i) & \xrightarrow{\delta} & \bigoplus_{i_0<i_1} \Omega^3(U_{i_0 i_1}) & \xrightarrow{\delta} & \bigoplus_{i_0<i_1<i_2} \Omega^3(U_{i_0 i_1 i_2}) & \xrightarrow{\delta} \\
 & \uparrow \mathrm{d} & & \uparrow \mathrm{d} & & \uparrow \mathrm{d} & & \uparrow \mathrm{d} & \\
0 \to & \Omega^2(M) & \xrightarrow{r} & \bigoplus_i \Omega^2(U_i) & \xrightarrow{\delta} & \bigoplus_{i_0<i_1} \Omega^2(U_{i_0 i_1}) & \xrightarrow{\delta} & \bigoplus_{i_0<i_1<i_2} \Omega^2(U_{i_0 i_1 i_2}) & \xrightarrow{\delta} \\
 & \uparrow \mathrm{d} & & \uparrow \mathrm{d} & & \uparrow \mathrm{d} & & \uparrow \mathrm{d} & \\
0 \to & \Omega^1(M) & \xrightarrow{r} & \bigoplus_i \Omega^1(U_i) & \xrightarrow{\delta} & \bigoplus_{i_0<i_1} \Omega^1(U_{i_0 i_1}) & \xrightarrow{\delta} & \bigoplus_{i_0<i_1<i_2} \Omega^1(U_{i_0 i_1 i_2}) & \xrightarrow{\delta} \\
 & \uparrow \mathrm{d} & & \uparrow \mathrm{d} & & \uparrow \mathrm{d} & & \uparrow \mathrm{d} & \\
0 \to & \Omega^0(M) & \xrightarrow{r} & \bigoplus_i \Omega^0(U_i) & \xrightarrow{\delta} & \bigoplus_{i_0<i_1} \Omega^0(U_{i_0 i_1}) & \xrightarrow{\delta} & \bigoplus_{i_0<i_1<i_2} \Omega^0(U_{i_0 i_1 i_2}) & \xrightarrow{\delta} \\
 & & & \uparrow \iota & & \uparrow \iota & & \uparrow \iota & \\
 & & & \bigoplus_i \boldsymbol{R}(U_i) & \xrightarrow{\delta} & \bigoplus_{i_0<i_1} \boldsymbol{R}(U_{i_0 i_1}) & \xrightarrow{\delta} & \bigoplus_{i_0<i_1<i_2} \boldsymbol{R}(U_{i_0 i_1 i_2}) & \xrightarrow{\delta} \\
 & & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\
 & & & 0 & & 0 & & 0 &
\end{array}$$

但し、縦向きの準同型については $\Omega^p(U_{i_0 \cdots i_k}) \longrightarrow \Omega^{p+1}(U_{i_0 \cdots i_k})$ は外微分 d である。また、 $\bigoplus_{i_0<\cdots<i_k} \boldsymbol{R}(U_{i_0 \cdots i_k})$ は $\{(U_{i_0 \cdots i_k})\}_{i_0<\cdots<i_k}$ を基底とする実ベクトル空間で、$\boldsymbol{R}(U_{i_0 \cdots i_k}) \longrightarrow \Omega^0(U_{i_0 \cdots i_k})$ は定数関数の埋め込み ι である。ポアンカレの補題 4.11 （13 ページ）により、縦向きの列は完全列である。

また、横向きの準同型については、$\Omega^p(M) \longrightarrow \Omega^p(U_i)$ は制限 r_i であり、$r = \oplus r_i$ と定義される。また、$k+1$ 個の添え字 $i_0 < \cdots < i_k$ とそれに現れる i_s に対し、$\Omega^p(U_{i_0 \cdots i_{s-1} i_{s+1} \cdots i_k}) \longrightarrow \Omega^p(U_{i_0 \cdots i_k})$ は制限 $r^{i_0 \cdots i_{s-1} i_{s+1} \cdots i_k}_{i_0 \cdots i_k}$ の $(-1)^s$ 倍であり、$\delta = \oplus \sum (-1)^s r^{i_0 \cdots i_{s-1} i_{s+1} \cdots i_k}_{i_0 \cdots i_k}$ と定義される。

補題 15.1 $0 \longrightarrow \Omega^p(M)$ から始まる横の列は完全列である。

証明　開被覆 $\{U_i\}_{1=1,\cdots N}$ に従属する 1 の分割 λ_i を用いて示される。

p を固定する。$f^{(k)} \in \bigoplus_{i_0<\cdots<i_k} \Omega^p(U_{i_0\cdots i_k}) \cong \Omega^p(\bigsqcup_{i_0<\cdots<i_k} U_{i_0\cdots i_k})$ に対し、$f^{(k)}$ の $\Omega^p(U_{i_0\cdots i_k})$ 成分を $f^{(k)}|U_{i_0\cdots i_k}$ あるいは $f^{(k)}_{i_0\cdots i_k}$ と書くことにする。写像 δ の定義により、$(\delta f^{(k)})|U_{i_0\cdots i_{k+1}} = \sum_{j=0}^{k+1}(-1)^j f^{(k)}_{i_0\cdots i_{j-1}i_{j+1}\cdots i_{k+1}}|U_{i_0\cdots i_{k+1}}$ である。これから、

$$\begin{aligned}
&(\delta(\delta f^{(k)}))|U_{i_0\cdots i_{k+2}}\\
=&\sum_{j=0}^{k+2}(-1)^j(\delta f)^{(k+1)}_{i_0\cdots i_{j-1}i_{j+1}\cdots i_{k+2}}|U_{i_0\cdots i_{k+2}}\\
=&\sum_{j=0}^{k+2}(-1)^j\sum_{m=0}^{j-1}(-1)^m f^{(k)}_{i_0\cdots i_{m-1}i_m\cdots i_{j-1}i_{j+1}\cdots i_{k+2}}|U_{i_0\cdots i_{k+2}}\\
&+\sum_{j=0}^{k+2}(-1)^j\sum_{m=j+1}^{k+2}(-1)^{m-1} f^{(k)}_{i_0\cdots i_{m-1}i_m\cdots i_{j-1}i_{j+1}\cdots i_{k+2}}|U_{i_0\cdots i_{k+2}}\\
=&\,0
\end{aligned}$$

$$f^{(k+1)} \in \bigoplus_{i_0<\cdots<i_{k+1}} \Omega^p(U_{i_0\cdots i_{k+1}}) \cong \Omega^p(\bigsqcup_{i_0<\cdots<i_{k+1}} U_{i_0\cdots i_{k+1}})$$

に対して、

$$Sf^{(k+1)} \in \bigoplus_{i_0<\cdots<i_k} \Omega^p(U_{i_0\cdots i_k}) \cong \Omega^p(\bigsqcup_{i_0<\cdots<i_k} U_{i_0\cdots i_k})$$

を $(Sf^{(k+1)})|U_{i_0\cdots i_k} = \sum_m \lambda_m f^{(k+1)}_{mi_0\cdots i_k}$ と定義する。ただし、m が $i_0, \ldots, i_k$ のどれかと一致するときは $f^{(k+1)}_{mi_0\cdots i_k} = 0$ とし、$i_{j-1} < m < i_j$ のとき、$f^{(k+1)}_{mi_0\cdots i_k} = (-1)^j f^{(k+1)}_{i_0\cdots i_{j-1}mi_j\cdots i_k}$ とする。また、$\lambda_m f_{mi_0\cdots i_k}$ は $\Omega^p(U_{i_0\cdots i_k})$ の元と考える。

$\delta(Sf^{(k)}) + S(\delta f^{(k)})$ を計算すると次のようになる。

$$\begin{aligned}
(\delta Sf^{(k)})|U_{i_0\cdots i_k} &= \sum_{j=0}^{k}(-1)^j(Sf^{(k)})|U_{i_0\cdots i_{j-1}i_{j+1}\cdots i_k}\\
&= \sum_{j=0}^{k}(-1)^j\sum_m \lambda_m f^{(k)}_{mi_0\cdots i_{j-1}i_{j+1}\cdots i_k}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(S\delta f^{(k)})|U_{i_0\cdots i_k} &= \sum_m \lambda_m(\delta f^{(k)})_{mi_0\cdots i_k}\\
&= \sum_m \lambda_m(f^{(k)}_{i_0\cdots i_k} + \sum_{j=0}^{k}(-1)^{j+1}f^{(k)}_{mi_0\cdots i_{j-1}i_{j+1}\cdots i_k})\\
&= f^{(k)}_{i_0\cdots i_k} + \sum_m \lambda_m\sum_{j=0}^{k}(-1)^{j+1}f^{(k)}_{mi_0\cdots i_{j-1}i_{j+1}\cdots i_k}
\end{aligned}$$

従って、$\delta(Sf^{(k)}) + S(\delta f^{(k)}) = f^{(k)}$ を得る。このことから、$\delta f^{(k)} = 0$ のとき、$f^{(k)} = \delta(Sf^{(k)})$ となり、横の列の完全性がわかる。 ■

このように、第 0 列よりも右の縦の列が完全列、第 0 行よりも上の横の行が完全列であることがわかっているとき、以下のように第 −1 列と第 −1 行のコホモロジー群は同型であることが示される。第 −1 列は M のドラーム複体 $\Omega^*(M)$ だから、第 −1 列の p 次のコホモロジー群はドラームコホモロジー群 $H^p_{DR}(M)$ である。第 −1 行

$$0 \longrightarrow \bigoplus_i \boldsymbol{R}(U_i) \xrightarrow{\delta} \bigoplus_{i_0<i_1} \boldsymbol{R}(U_{i_0i_1}) \xrightarrow{\delta} \bigoplus_{i_0<i_1<i_2} \boldsymbol{R}(U_{i_0i_1i_2}) \xrightarrow{\delta} \cdots$$

は、チェック複体と呼ばれ、その p 次元コホモロジー群は p 次元チェック・コホモロジー群と呼ばれ $\check{H}^p(M,\{U_i\})$ と書かれる。

示したいことは次の定理である。

定理 15.2 (チェック・ドラームの定理) コンパクト多様体 M の有限開被覆 $\{U_i\}_{i=1,\dots,N}$ について、任意の $U_{i_0 i_1\cdots i_k} = \bigcap_{j=0}^{k} U_{i_k}$ は $\boldsymbol{R}^n$ または空集合と微分同相であるとする。このときドラーム・コホモロジー群とチェック・コホモロジー群の同型 $H^p_{DR}(M) \cong \check{H}^p(M,\{U_i\})$ が成立する。

証明 1) まず M 上の閉微分 p 形式に対し、チェック複体の p コサイクルが対応することを示す。

第 -1 列の閉 p 形式 α が与えられると、$r\alpha$ に対し、$\mathrm{d}\,r\alpha = r\,\mathrm{d}\,\alpha = 0$ だから $r\alpha = \mathrm{d}\,\alpha^{(0,p-1)}$ となる $\alpha^{(0,p-1)} \in \bigoplus_i \Omega^{p-1}(U_i)$ が存在する。次の図式を参照せよ。

$$
\begin{array}{ccccc}
0 & \longmapsto & 0 & & \\
\uparrow\mathrm{d} & & \uparrow\mathrm{d} & & \\
\alpha & \overset{r}{\longmapsto} & r\alpha & \overset{\delta}{\longmapsto} & 0 \\
 & & \uparrow\mathrm{d} & & \uparrow\mathrm{d} \\
 & & \alpha^{(0,p-1)} & \overset{\delta}{\longmapsto} & \delta\alpha^{(0,p-1)}
\end{array}
$$

$\alpha^{(0,p-1)}$ に対し $\delta\alpha^{(0,p-1)}$ を考えると、$\mathrm{d}\,\delta\alpha^{(0,p-1)} = \delta\,\mathrm{d}\,\alpha^{(0,p-1)} = \delta r\alpha = 0$ である。

帰納的に、$\alpha^{(j-1,p-j)} \in \bigoplus_{i_0<\cdots<i_{j-1}} \Omega^{p-j}(U_{i_0\cdots i_{j-1}})$ に対し、$\mathrm{d}\,\delta\alpha^{(j-1,p-j)} = 0$ と仮定すると、$\delta\alpha^{(j-1,p-j)} = \mathrm{d}\,\alpha^{(j,p-j-1)}$ となる $\alpha^{(j,p-j-1)} \in \bigoplus_{i_0<\cdots<i_j} \Omega^{p-j-1}(U_{i_0\cdots i_j})$ が存在する。次の図式を参照せよ。

$$
\begin{array}{ccccc}
\mathrm{d}\,\alpha^{(j-1,p-j)} & \longmapsto & 0 & & \\
\uparrow\mathrm{d} & & \uparrow\mathrm{d} & & \\
\alpha^{(j-1,p-j)} & \overset{\delta}{\longmapsto} & \delta\alpha^{(j-1,p-j)} & \overset{\delta}{\longmapsto} & 0 \\
 & & \uparrow\mathrm{d} & & \uparrow\mathrm{d} \\
 & & \alpha^{(j,p-j-1)} & \overset{\delta}{\longmapsto} & \delta\alpha^{(j,p-j-1)}
\end{array}
$$

この $\delta\alpha^{(j,p-j-1)}$ は、$\mathrm{d}\,\delta\alpha^{(j,p-j-1)} = \delta\,\mathrm{d}\,\alpha^{(j,p-j-1)} = \delta\delta\alpha^{(j-1,p-j)} = 0$ を満たす。

帰納法により、$\alpha^{(p-1,0)} \in \bigoplus_{i_0<\cdots<i_{p-1}} \Omega^0(U_{i_0\cdots i_{p-1}})$ が存在する。さらに、$\delta\alpha^{(p-1,0)} = \iota\alpha^{(p,-1)}$ となる $\alpha^{(p,0)} \in \bigoplus_{i_0<\cdots<i_{p-1}} \boldsymbol{R}(U_{i_0\cdots i_{p-1}})$ が存在する。次の図式を参照せよ。

$$
\begin{array}{ccccc}
\mathrm{d}\,\alpha^{(p-1,0)} & \longmapsto & 0 & & \\
\uparrow\mathrm{d} & & \uparrow\mathrm{d} & & \\
\alpha^{(p-1,0)} & \overset{\delta}{\longmapsto} & \delta\alpha^{(p-1,0)} & \overset{\delta}{\longmapsto} & 0 \\
 & & \uparrow\iota & & \uparrow\iota \\
 & & \alpha^{(p,-1)} & \overset{\delta}{\longmapsto} & \delta\alpha^{(p,-1)}
\end{array}
$$

ここで、$\delta\alpha^{(p,-1)}$ について $\iota\delta\alpha^{(p,-1)} = \delta\iota\alpha^{(p,-1)} = \delta\delta\alpha^{(p-1,0)} = 0$ であるが、ι は単射だから $\delta\alpha^{(p,-1)} = 0$ である。

以上で、閉微分 p 形式 α に対し、チェック複体の p コサイクル $\alpha^{(p,-1)}$ が得られることがわかった。この構成の途中の段階で、$\alpha^{(j,p-j-1)}$ のとり方は、完全形式の差の自由度があるが、その差はチェック複体のコバウンダリーの差に吸収されることが、次の議論を必要なところから繰り返すことによりわかる。

2） 1) で得られた対応が、コホモロジー群の準同型を誘導することを示す。同時に1) におけるコサイクルの構成の自由度はコバウンダリーの差に吸収され、準同型写像がきちんと定義されていることが確認される。

第 -1 列の完全 p 形式 α $(\alpha = \mathrm{d}\,\beta)$ に対して、$r\alpha = \mathrm{d}\,r\beta = \mathrm{d}\,\alpha^{(0,p-1)}$ だから、$\beta^{(0,p-2)}$ で $\mathrm{d}\,\beta^{(0,p-2)} = \alpha^{(0,p-1)} - r\beta$ となるものがある。次の図式を参照せよ。

$$
\begin{tikzcd}
\alpha & 0 \arrow[r, mapsto, "\delta"] & 0 \\
\beta \arrow[u, "\mathrm{d}"'] & \alpha^{(0,p-1)} - r\beta \arrow[u, "\mathrm{d}"'] \arrow[r, mapsto, "\delta"] & \delta\alpha^{(0,p-1)} \arrow[u, "\mathrm{d}"'] \\
& \beta^{(0,p-2)} \arrow[u, "\mathrm{d}"'] \arrow[r, mapsto, "\delta"] & \delta\beta^{(0,p-2)} \arrow[u, "\mathrm{d}"']
\end{tikzcd}
$$

$\delta\beta^{(0,p-2)}$ は、

$$\mathrm{d}\,\delta\beta^{(0,p-2)} = \delta\,\mathrm{d}\,\beta^{(0,p-2)} = \delta(\alpha^{(0,p-1)} - r\beta) = \delta\alpha^{(0,p-1)}$$

を満たす。

帰納的に、$\beta^{(j-1,p-j-1)} \in \displaystyle\bigoplus_{i_0<\cdots<i_{j-1}} \Omega^{p-j-1}(U_{i_0\cdots i_{j-1}})$ に対し、$\mathrm{d}\,\delta\beta^{(j-1,p-j-1)} = \delta\alpha^{(j-1,p-j)} = \mathrm{d}\,\alpha^{(j,p-j-1)}$ と仮定すると、$\beta^{(j,p-j-2)}$ で $\mathrm{d}\,\beta^{(j,p-j-2)} = \alpha^{(j,p-j-1)} - \delta\beta^{(j-1,p-j-1)}$ となるものがある。次の図式を参照せよ。

$$
\begin{tikzcd}
\alpha^{(j-1,p-j)} - \delta\,\beta^{(j-2,p-j)} & 0 \arrow[r, mapsto, "\delta"] & 0 \\
\beta^{(j-1,p-j-1)} \arrow[u, "\mathrm{d}"'] & \alpha^{(j,p-j-1)} - \delta\beta^{(j-1,p-j-1)} \arrow[u, "\mathrm{d}"'] \arrow[r, mapsto, "\delta"] & \delta\alpha^{(j,p-j-1)} \arrow[u, "\mathrm{d}"'] \\
& \beta^{(j,p-j-2)} \arrow[u, "\mathrm{d}"'] \arrow[r, mapsto, "\delta"] & \delta\beta^{(j,p-j-2)} \arrow[u, "\mathrm{d}"']
\end{tikzcd}
$$

$\delta\beta^{(j,p-j-2)}$ は、

$$\mathrm{d}\,\delta\beta^{(j,p-j-2)} = \delta\,\mathrm{d}\,\beta^{(j,p-j-2)} = \delta(\alpha^{(j,p-j-1)} - \delta\beta^{(j-1,p-j-1)}) = \delta\alpha^{(j,p-j-1)}$$

を満たす。

帰納法により、$\beta^{(p-2,0)} \in \displaystyle\bigoplus_{i_0<\cdots<i_{p-2}} \Omega^{0}(U_{i_0\cdots i_{p-2}})$ に対し、$\mathrm{d}\,\delta\beta^{(p-2,0)} = \delta\alpha^{(p-2,1)} = \mathrm{d}\,\alpha^{(p-1,0)}$ と仮定すると、$\beta^{(p-1,-1)}$ で $\iota\beta^{(p-1,-1)} = \alpha^{(p-1,0)} - \delta\beta^{(p-2,0)}$ となるものがある。次の図式を参照せよ。

$$
\begin{tikzcd}
\alpha^{(p-2,1)} - \delta\,\beta^{(p-3,1)} & 0 \arrow[r, mapsto, "\delta"] & 0 \\
\beta^{(p-2,0)} \arrow[u, "\mathrm{d}"'] & \alpha^{(p-1,0)} - \delta\beta^{(p-2,0)} \arrow[u, "\mathrm{d}"'] \arrow[r, mapsto, "\delta"] & \delta\alpha^{(p-1,0)} \arrow[u, "\mathrm{d}"'] \\
& \beta^{(p-1,-1)} \arrow[u, "\iota"'] \arrow[r, mapsto, "\delta"] & \delta\beta^{(p-1,-1)} \arrow[u, "\iota"']
\end{tikzcd}
$$

$\delta\beta^{(p-1,-1)}$ は、

$$\iota\delta\beta^{(p-1,-1)} = \delta\iota\beta^{(p-1,-1)} = \delta(\alpha^{(p-1,0)} - \delta\beta^{(p-2,0)}) = \delta\alpha^{(p-1,0)} = \iota\alpha^{(p,-1)}$$

を満たす。ι は単射だから、$\alpha^{(p,-1)} = \delta\beta^{(p-1,-1)}$.

1) におけるコサイクルの構成の自由度は、$\alpha^{(j,p-j-1)}$ に対する完全形式の差であるが、これは、途中の $\beta^{(j,p-j-2)}$ を変更することで吸収される。

こうして準同型 $H^p_{DR}(M) \longrightarrow \check{H}^p(M, \{U_i\})$ が定義された。

３）この準同型の構成は、図式の縦の列、横の列が完全列であることだけを用いている。そこで、縦の列、横の列の役割を入れ替えれば、チェック複体の p コサイクルに対し、ドラーム複体の閉微分 p 形式を対応させ、それが準同型 $\check{H}^p(M, \{U_i\}) \longrightarrow H^p_{DR}(M)$ を引き起こすことがわかる。１）で α に $\alpha^{(p,-1)}$ を対応させたが、縦の列、横の列の役割を入れ替えた対応では $\alpha^{(p,-1)}$ に α が対応するので、２つの準同型写像 $H^p_{DR}(M) \longrightarrow \check{H}^p(M, \{U_i\})$, $\check{H}^p(M, \{U_i\}) \longrightarrow H^p_{DR}(M)$ は、お互いの逆写像である。従って $H^p_{DR}(M) \cong \check{H}^p(M, \{U_i\})$ である。 ■

【例 15.3】 2 次元球面 S^2 に内接する正 4 面体 $v_1v_2v_3v_4$ を考える。球面の中心から、正 4 面体の辺 v_iv_j を球面上に射影する。球面３角形 $v_2v_3v_4$, $v_1v_3v_4$, $v_1v_2v_4$, $v_1v_2v_3$ の補集合（S^2 の開集合）を U_1, U_2, U_3, U_4 とする。これに対し、$U_{12}, U_{13}, U_{14}, U_{23}, U_{24}, U_{34}, U_{123}, U_{124}, U_{134}, U_{234}$ は 2 次元開球体 B^2 と微分同相であり、$U_{1234} = \emptyset$ となる。$\Omega^*(S^2)$ のドラームコホモロジー群は $H^p_{DR}(S^2) \cong \begin{cases} \boldsymbol{R} & (p = 0, 2) \\ 0 & (p \neq 0, 2) \end{cases}$ となる。チエック複体は

$$0 \to \boldsymbol{R}^4 \xrightarrow{\delta} \boldsymbol{R}^6 \xrightarrow{\delta} \boldsymbol{R}^4 \to 0$$

である。$\chi_{i_0 \cdots i_p}$ を $U_{i_0 \cdots i_p}$ 上で 1 となる関数とする。

$$\delta(\sum_{i=1}^{4} a_i\chi_i) = \sum_{i_0<i_1} (a_{i_0} - a_{i_1})\chi_{i_0i_1},$$
$$\delta(\sum_{i_0<i_1} b_{i_0i_1}\chi_{i_0i_1}) = \sum_{i_0<i_1<i_2} (b_{i_1i_2} - b_{i_0i_2} + b_{i_0i_1})\chi_{i_0i_1i_2}$$

を行列に書いて計算すると、基底 $(\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4)$, $(\chi_{12}, \chi_{13}, \chi_{14}, \chi_{23}, \chi_{24}, \chi_{34})$, $(\chi_{123}, \chi_{124}, \chi_{134}, \chi_{234})$ に対して、それぞれ、

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

となる。ker, im を計算して $\check{H}^p(S^2, \{U_i\}) \cong \begin{cases} \boldsymbol{R} & (p = 0, 2) \\ 0 & (p \neq 0, 2) \end{cases}$ となる。