２００５年度 幾何学 III　　演習問題　　１１月１日

復習問題１． n 次元 C^∞ 級多様体の定義を述べよ。

復習問題２． n 次元 C^∞ 級多様体 M のコンパクト部分集合 K とそれを含む開集合 U が与えられているとする。U 上の C^∞ 級関数 f に対し、M 上の C^∞ 級関数 g で $f|K = g|K$ となるものが存在することを示せ。

問題１． m 次元ユークリッド空間の開集合 V から n 次元ユークリッド空間の開集合 W への C^∞ 級写像 $\varphi : V \longrightarrow W$ と W 上の微分 p 形式 α に対し、$\varphi^*(\mathrm{d}\alpha) = \mathrm{d}\varphi^*\alpha$ を示せ。

定義． n 次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^n$ の開集合 U に対し、$[0,1]\times U \subset \mathbf{R}^{n+1}$ を考える。$[0,1]\times U$ の C^∞ 級微分 p 形式とは $[0,1] \times U$ の近傍で定義されている C^∞ 級微分 p 形式の $[0,1] \times U$ への制限であると考える。$[0,1] \times U$ の C^∞ 級微分 p 形式全体を $\Omega^p([0,1] \times U)$ と書く。$[0,1] \times U$ の座標を $(x_0, x_1, \cdots, x_n)$ とする。$p > 0$ に対して、$\alpha \in \Omega^p([0,1] \times U)$ が $\displaystyle\sum_{i_1<\cdots<i_p} f_{i_1 i_2\cdots i_p}\mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_p}$ で与えられているとする。$a \in [0,1]$ に対し、

$$I_a(\alpha) = \sum_{0<i_2<\cdots<i_p} \left(\int_a^{x_0} f_{0 i_2\cdots i_p}\mathrm{d}x_0\right)\mathrm{d}x_{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_p}$$

と定義する。

問題２． 写像 $\pi : [0,1] \times U \longrightarrow U$ を $\pi(x_0, \mathbf{x}) = \mathbf{x}$ で定義し、$a \in [0,1]$ に対し、写像 $\iota_a : U \longrightarrow [0,1] \times U$ を $\iota_a(\mathbf{x}) = (a, \mathbf{x})$ と定義する。上の I_a について次が得られることを示せ。

$$\mathrm{d}(I_a(\alpha)) + I_a(\mathrm{d}\alpha) = \alpha - \pi^*({\iota_a}^*\alpha)$$

定義． n 次元多様体 M の点 x において、M 上の関数 f_1, f_2 が同値であることを、x のまわりの座標近傍 (U, φ) を用いて、

$$f_1 \sim f_2 \Longleftrightarrow \mathrm{d}(f_1\circ\varphi^{-1})_{(\varphi(x))} = \mathrm{d}(f_2\circ\varphi^{-1})_{(\varphi(x))}$$

により定義する。$\mathrm{d}(f_k\circ\varphi^{-1})_{(\varphi(x))}$ $(k = 1, 2)$ は $\varphi(x)$ における全微分の値である。
同値類 $C^\infty(M)/\sim$ を T_x^*M と書き、x における M の余接空間と呼ぶ。

問題３．
(0) 上の同値関係 $\sim$ は、x のまわりの座標近傍のとりかたによらないことを示せ。
(1) n 次元多様体 M の点 x における余接空間 T_x^*M は $C^\infty(M)$ の実ベクトル空間の構造から定まる n 次元ベクトル空間の構造を持つことを示せ。
(2) $F : M \longrightarrow N$ を C^∞ 級写像とする。N 上の C^∞ 級写像 f に対し、$F^*f = f\circ F$ を対応させる写像は準同型写像 $F^* : T_{F(x)}^*N \longrightarrow T_x^*M$ を引き起こすことを示せ。