２００５年度 幾何学 III　　演習問題　　１０月１１日

復習問題. 複素平面 $\mathbf{C}$ の開集合 U 上で定義された複素数値関数 $f(z)$ を考える。すなわち、$z=x+y\sqrt{-1}$ として、２変数関数 $u(x,y)$, $v(x,y)$ があって

$$f(z)=u(x,y)+v(x,y)\sqrt{-1}$$

f が微分可能であるとき、次で定義される全微分は複素数値１次微分形式である。

$$\mathrm{d}f=\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial v}{\partial x}\sqrt{-1}\mathrm{d}x+\frac{\partial v}{\partial y}\sqrt{-1}\mathrm{d}y$$

(1)　$\mathrm{d}f$ が各点 z 上で, $\mathrm{d}z=\mathrm{d}x+\sqrt{-1}\mathrm{d}y$ 複素数倍となるための条件は何か。

(2)　複素数値１次微分形式 $f\mathrm{d}z$ が閉微分形式となる条件は何か。

(3)　複素数値１次微分形式 $f\mathrm{d}z$ が閉微分形式のときこれは完全微分形式か。

定義 [微分 p 形式] n 次元ユークリッド空間の開集合 U 上の連続関数 $f_{i_1\dots i_p}(\mathbf{x})$ $(1\leqq i_1<\cdots<i_p\leqq n)$ に対して、$\displaystyle\sum_{1\leqq i_1<\cdots<i_p\leqq n} f_{i_1\dots i_p}\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_p}$ を、U 上の微分 p 形式と呼ぶ。

定義 [微分 p 形式と微分 q 形式の外積]

$$\Big(\sum_{i_1<\cdots<i_p} f_{i_1\dots i_p}\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_p}\Big)\wedge\Big(\sum_{j_1<\cdots<j_q} g_{j_1\dots j_q}\mathrm{d}x_{j_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{j_q}\Big)$$
$$=\sum_{i_1<\cdots<i_p,\ j_1<\cdots<j_q} f_{i_1\dots i_p}g_{j_1\dots j_q}\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_p}\wedge\mathrm{d}x_{j_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{j_q}$$

ここで、$i_1,\dots,i_p,j_1,\dots,j_q$ のなかに同じものがあれば $\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_p}\wedge\mathrm{d}x_{j_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{j_q}=0$ とし、これらがすべて異なり、これを並べ替えたものを $k_1,\dots,k_{p+q}$ $(k_1<\cdots<k_{p+q})$ とするとき、$\mathrm{sign}\begin{pmatrix} i_1\cdots i_p j_1\cdots j_q\\ k_1\cdots\cdots k_{p+q}\end{pmatrix}$ を置換の符号として、

$$\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_p}\wedge\mathrm{d}x_{j_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{j_q}=\mathrm{sign}\begin{pmatrix} i_1\cdots i_p j_1\cdots j_q\\ k_1\cdots\cdots k_{p+q}\end{pmatrix}\mathrm{d}x_{k_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{k_{p+q}}$$

とする。

問題１. U 上の微分 p 形式 α と微分 q 形式 β に対し、$\beta\wedge\alpha=(-1)^{pq}\alpha\wedge\beta$ を示せ。

定義 [微分 p 形式の外微分]

$$\mathrm{d}\Big(\sum_{1\leqq i_1<\cdots<i_p\leqq n} f_{i_1\dots i_p}\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_p}\Big)=\sum_{1\leqq i_1<\cdots<i_p\leqq n}\mathrm{d}f_{i_1\dots i_p}\wedge\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_p}.$$

ここで、$\mathrm{d}f_i$ は f_i の全微分である。

問題２. U 上の微分 p 形式 α と微分 q 形式 β に対し、$\mathrm{d}(\alpha\wedge\beta)=\mathrm{d}\alpha\wedge\beta+(-1)^p\alpha\wedge\mathrm{d}\beta$ を示せ。