2005年度 幾何学 III　　演習問題　　1月17日

定義 [向き付けを持つ多様体] 多様体 M の座標近傍系 $\{(U_i,\varphi_i)\}$ に対し，$\gamma_{ij}:\varphi_j(U_i\cap U_j)\longrightarrow\varphi_i(U_i\cap U_j)$ を座標変換とする．γ_{ij} のヤコビ行列式がすべて正であるような座標近傍系が存在するとき多様体は向き付けを持つという．γ_{ij} のヤコビ行列式がすべて正であるような座標近傍系を1つとってあるとき、多様体は向き付けられているという。

定義 [台] 多様体 M 上の微分 p 形式 α の台 $\operatorname{supp}\alpha=\overline{\{x\in M \mid \alpha(x)\neq 0\}}$

定義 [積分] 向き付けられた座標近傍 $(U,\varphi=\boldsymbol{x}=(x_1,\ldots,x_n))$ のコンパクト部分集合 K に台をもつ微分 n 形式 α の積分 $\displaystyle\int_{\varphi^{-1}}\alpha$ は、$\displaystyle\int_{\varphi(U)}f(\boldsymbol{x})\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n$ として定義される。

コンパクトで向き付けられた多様体 M 上の微分 n 形式 α の積分を、向き付けられた座標近傍系 $\{(U_i,\varphi_i)\}$ に従属する1の分割 $\{\lambda_i\}$ を用いて、$\displaystyle\int_M\alpha=\sum_i\int_{{\varphi_i}^{-1}}\lambda_i\alpha$ で定義する。

定義 [境界を持つ多様体] 境界を持つ多様体は、多様体の定義において、$\varphi_i:U_i\longrightarrow\mathbf{R}^n$ を $\varphi_i:U_i\longrightarrow\mathbf{R}_{\leqq 0}\times\mathbf{R}^{n-1}$ として得られる。φ_i の値域が $\{0\}\times\mathbf{R}^{n-1}$ と交わらない場合は、もともとの多様体の定義と変わらない。$\partial M=\bigcup{\varphi_i}^{-1}(\{0\}\times\mathbf{R}^{n-1})\subset M$ は $n-1$ 次元多様体となる。M の座標近傍系が、向き付けを定めているとき、$\varphi_i|\partial M$ は、像が $\mathbf{R}^{n-1}$ にある座標近傍系として、向き付けを定めている。これを、M の向き付けから定まる ∂M の向き付けと呼ぶ。

定義 [内部積] $\mathbf{R}^n$ の開集合上のベクトル場 $\xi=\displaystyle\sum_{i=1}^n\xi_i\frac{\partial}{\partial x_i}$ と微分 p 形式 $\alpha=\displaystyle\sum_{i_1<\cdots<i_p}f_{i_1\cdots i_p}\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_p}$ の内部積 (interior product)$i_\xi\alpha$ は以下で定義される ($i(\xi)\alpha$ と書く文献も多い)。

$$i_\xi\alpha=\sum_{i_1<\cdots<i_p}\sum_{j=1}^p(-1)^{j-1}f_{i_1\cdots i_p}\xi_{i_j}\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_{j-1}}\wedge\mathrm{d}x_{i_{j+1}}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_p}$$

問題1． $\mathbf{R}^n$ 上のベクトル場 $\xi=\displaystyle\sum_{i=1}^n\xi_i\frac{\partial}{\partial x_i}$ について、$\displaystyle\sum_{i=1}^n\frac{\partial\xi_i}{\partial x_i}=1$ とする。
$\omega=i_\xi\mathrm{d}x_1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_n$ に対し、$\mathrm{d}\omega=\mathrm{d}x_1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_n$ を示せ。

問題2． $\mathbf{R}^3$ 上の微分2形式 $\omega=x_1\mathrm{d}x_2\wedge\mathrm{d}x_3-x_2\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_3+x_3\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2$ を考える。
単位球面の埋め込み $\iota:S^2\longrightarrow\mathbf{R}^3$ について S^2 に $\{(x_1,x_2,x_3) \mid {x_1}^2+{x_2}^2+{x_3}^2\leqq 1\}$ の境界としての向きを入れる。$\displaystyle\int_{S^2}\iota^*\omega$ を計算せよ。

注意：$\xi=\displaystyle\sum_{i=1}^3x_i\frac{\partial}{\partial x_i}$ は S^2 に沿って $\|\xi\|=1$ であり、$i_\xi\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2\wedge\mathrm{d}x_3=\omega$ である。

問題3． 向き付けをもつ連結 n 次元閉多様体 M_1, M_2 の間の写像 $F:M_1\longrightarrow M_2$ に対し、次を満たす整数 m が存在することを示せ。
M_2 上の任意の n 形式 α に対して、$\displaystyle\int_{M_1}F^*\alpha=m\int_{M_2}\alpha$ が成立する。
（閉多様体は境界をもたないコンパクト多様体のこと。この m を F の写像度という。）
ヒント：向き付けをもつ連結 n 次元閉多様体に対し、$H^n_{DR}(M)\cong\mathbf{R}$ であり、同型は M

上の積分で与えられる。$F: M_1 \longrightarrow M_2$ の正則値 $y \in M_2$ をとると、y の座標近傍 V で $F^{-1}(V)$ の連結成分 $U_1, \dots, U_k$ について、$F|U_1, \dots, F|U_k$ が微分同相となるものが取れることを示す。α が V に台を持つときに題意を示す。

定義 [ガウス写像] M を向き付け可能な曲面（２次元多様体）とし、M の $\mathbf{R}^3$ への埋め込み（または、はめ込み）ι が与えられているとする。M の各点 p に対し、$\boldsymbol{n}(p)$ を $\iota(M)$ の単位法ベクトルとする。すなわち、$\boldsymbol{n}(p) \in T_{\iota(p)}\mathbf{R}^3$ は $\iota_*(T_pM) \subset T_{\iota(p)}\mathbf{R}^3$ に直交し、$\|\boldsymbol{n}(p)\| = 1$ とする。$\boldsymbol{n}(p)$ は p について連続にとられているとする。写像 $T_{i(p)}\mathbf{R}^3$ と $\mathbf{R}^3$ を同一視して得られる写像 $\boldsymbol{n}: M \longrightarrow S^2$ をガウス写像という。

問題４． (1) $T^2 = \{(\cos u(2+\cos v), \sin u(2+\cos v), \sin v) \in \mathbf{R}^3 \mid u,\ v \in \mathbf{R}\}$ とするとき、$\boldsymbol{n}(u,v)$ を求めよ。T^2 上で

$$\frac{x_1}{\sqrt{{x_1}^2+{x_2}^2}}(\sqrt{{x_1}^2+{x_2}^2}-2)\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{x_2}{\sqrt{{x_1}^2+{x_2}^2}}(\sqrt{{x_1}^2+{x_2}^2}-2)\frac{\partial}{\partial x_2} + x_3\frac{\partial}{\partial x_3}$$

と一致することを確かめよ。
(2) 問題２の ω に対し、$\displaystyle\int_{T^2} \boldsymbol{n}^*\omega$ を計算せよ。
(3) $i_{\boldsymbol{n}}(\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3)$ を T^2 上で積分せよ。
(4) 問題２の ω に対し、$\displaystyle\int_{T^2} \omega$ を計算せよ。

問題５． (1) 向き付けられた連結閉多様体 M の $\mathbf{R}^3$ への埋め込み（または、はめ込み）の連続な族 ι_t に対し、$\boldsymbol{n}_t : M \longrightarrow S^2$ をそれ付随するガウス写像とする. $\displaystyle\int_M {\boldsymbol{n}_t}^*\omega$ は 4π の倍数であることを示せ。
(2) 向き付けられた連結閉多様体 M の $\mathbf{R}^3$ への埋め込み（または、はめ込み）ι に対し, 定義されるガウス写像 $\boldsymbol{n}$ に対し、$(0,0,\pm1)$ が正則値であるとする。M 上の関数 x_3 は M 上のモース関数であることを示せ。
(3) ガウス写像 $\boldsymbol{n}$ の写像度の絶対値は x_3 についての（極大値の個数＋極小値の個数－鞍点の個数）の絶対値と一致することを示せ。
ヒント：$\boldsymbol{n}^{-1}(\pm1,0,0)$ の点の近傍で、M は $\{(x_1,x_2,x_3(x_1,x_2))\}$ の形に書かれる。これに対し、$\boldsymbol{n}(x_1,x_2) = \left(-\dfrac{\dfrac{\partial x_3}{\partial x_1}}{\sqrt{1+(\dfrac{\partial x_3}{\partial x_1})^2+(\dfrac{\partial x_3}{\partial x_2})^2}}, -\dfrac{\dfrac{\partial x_3}{\partial x_2}}{\sqrt{1+(\dfrac{\partial x_3}{\partial x_1})^2+(\dfrac{\partial x_3}{\partial x_2})^2}}, \dfrac{1}{\sqrt{1+(\dfrac{\partial x_3}{\partial x_1})^2+(\dfrac{\partial x_3}{\partial x_2})^2}}\right)$
$(\pm1,0,0)$ の近傍における S^2 の座標関数を $(x_1,x_2,x_3) \longmapsto (\dfrac{x_1}{x_3}, \dfrac{x_2}{x_3})$ とすると $\boldsymbol{n}(x_1,x_2) = (\dfrac{\partial x_3}{\partial x_1}, \dfrac{\partial x_3}{\partial x_2})$ であるから、ヤコビ行列は $\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 x_3}{\partial {x_1}^2} & \dfrac{\partial^2 x_3}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \dfrac{\partial^2 x_3}{\partial x_1 \partial x_2} & \dfrac{\partial^2 x_3}{\partial {x_2}^2} \end{pmatrix}$ となる。