定義 [テンソル積] ２つの有限次元ベクトル空間 V, W のテンソル積 $V \otimes W$ は, V の基底を e_1, $\dots$, e_k, W の基底を f_1, $\dots$, f_ℓ とするとき、$k \cdot \ell$ 個の記号 $e_i \otimes f_j$, $(i = 1, \dots, k;\ j = 1, \dots, \ell)$ を基底とするベクトル空間として定義される。V の元 $v = \sum_{i=1}^{k} a_i e_i$, W の元 $w = \sum_{j=1}^{\ell} b_j f_j$ に対し、$v \otimes w = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{\ell} a_i b_j e_i \otimes f_j \in V \otimes W$ が定まる。（加群のテンソル積の特別な場合）２つのコホモロジー群 $H^*_{DR}(M)$, $H^*_{DR}(N)$ のテンソル積は、$H^*_{DR}(M) \otimes H^*_{DR}(N)$ の次元 p の部分を $\bigoplus_{i=0}^{p} H^i_{DR}(M) \otimes H^{p-i}_{DR}(N)$ とすることで定まる。

復習問題１． [５項補題] 線形空間と準同型写像の２つの完全列と準同型 F_i の可換図式

$$\begin{array}{ccccccccc} A_1 & \longrightarrow & A_2 & \longrightarrow & A_3 & \longrightarrow & A_4 & \longrightarrow & A_5 \\ \downarrow F_1 & & \downarrow F_2 & & \downarrow F_3 & & \downarrow F_4 & & \downarrow F_5 \\ B_1 & \longrightarrow & B_2 & \longrightarrow & B_3 & \longrightarrow & B_4 & \longrightarrow & B_5 \end{array}$$

において、F_1, F_2, F_4, F_5 が同型写像ならば、F_3 は同型写像であることを示せ。

復習問題２． [テンソル積の完全性]　<u>有限次元線形空間</u> と線形写像の完全列 $\cdots \longrightarrow A_0 \longrightarrow A_1 \longrightarrow A_2 \longrightarrow A_3 \longrightarrow \cdots$ と有限次元線形空間 B に対し、テンソル積に自然に引き起こされる写像について、
$\cdots \longrightarrow A_0 \otimes B \longrightarrow A_1 \otimes B \longrightarrow A_2 \otimes B \longrightarrow A_3 \otimes B \longrightarrow \cdots$ は完全列であることを示せ。

問題１． ２つの多様体 M, N の直積 $M \times N$ に対して、射影 $\pi_M : M \times N \longrightarrow M$, $\pi_N : M \times N \longrightarrow N$ を考えると M の閉 p 形式 α, N の閉 q 形式 β に対して、$M \times N$ 上の閉 $p+q$ 形式 $\pi_M^*\alpha \wedge \pi_N^*\beta$ が得られる。これは準同型 $H^p_{DR}(M) \otimes H^p_{DR}(N) \longrightarrow H^{p+q}_{DR}(M \times N)$ を与えることを示せ。

定理 [キネットの公式] ２つのコンパクト多様体 M, N に対し、$H^*_{DR}(M \times N) \cong H^*_{DR}(M) \otimes H^*_{DR}(N)$ である。さらに、M 上の閉微分 p 形式 α, N 上の閉微分 q 形式 β に対し、$[\alpha] \otimes [\beta] \in H^p_{DR}(M) \otimes H^q_{DR}(N)$ は $[\pi_M^*\alpha \wedge \pi_N^*\beta] \in H^{p+q}_{DR}(M \times N)$ に対応する。ここで $\pi_M : M \times N \longrightarrow M$, $\pi_N : M \times N \longrightarrow N$ は射影である。

問題１． $N = S^k$ のとき、キネットの公式を証明せよ。
ヒント：k についての帰納法。$S^{k+1} = N_1 \cup N_2$, $N_1 \cong N_2 \cong \mathbf{R}^{k+1}$, $N_{12} = N_1 \cap N_2 \cong S^k \times \mathbf{R}$ とし、これに対するマイヤー・ビエトリス完全列に $H^*_{DR}(M)$ をテンソル積した（完全）列を考える。この列から、$M \times S^{k+1} = (M \times N_1) \cup (M \times N_2)$ に対するマイヤー・ビエトリス完全列への準同型について５項補題を使う。

$$
\begin{array}{ccc}
\downarrow & & \downarrow \\
H^{p-1}_{DR}(M) \oplus H^{p-1}_{DR}(M) & \longrightarrow & H^{p-1}_{DR}(M) \oplus H^{p-1}_{DR}(M) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\displaystyle\bigoplus_{i=0}^{p-1} H^{i}_{DR}(M) \otimes H^{p-1-i}_{DR}(S^k) & \longrightarrow & H^{p-1}_{DR}(M \times S^k) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\displaystyle\bigoplus_{i=0}^{p} H^{i}_{DR}(M) \otimes H^{p-i}_{DR}(S^{k+1}) & \longrightarrow & H^{p}_{DR}(M \times S^{k+1}) \\
\downarrow & & \downarrow \\
H^{p}_{DR}(M) \oplus H^{p}_{DR}(M) & \longrightarrow & H^{p}_{DR}(M) \oplus H^{p}_{DR}(M) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\displaystyle\bigoplus_{i=0}^{p} H^{i}_{DR}(M) \otimes H^{p-i}_{DR}(S^k) & \longrightarrow & H^{p}_{DR}(M \times S^k) \\
\downarrow & & \downarrow
\end{array}
$$

問題２． 一般の N に対するキネットの公式を証明せよ。

ヒント：多様体 N に対して、$\emptyset = N_0 \subset N_1 \subset \cdots \subset N_k = N$, $N_j = N_{j-1} \cup B_j$ $(0 < j \leqq k)$, B_j は n 次元開球体 B^n と微分同相で, $N_{j-1} \cap B_j$ は空集合または m_j 次元の球面 S^{m_j} と $n - m_j$ 次元開球体 B^{n-m_j} の直積 $B^{n-m_j} \times S^{m_j}$ に微分同相である $(0 \leqq m_j \leqq n-1)$ という分解がとられているとする。$M \times N_{j-1}$ に対して、定理の主張が正しいと仮定して、$M \times N_j$ に対する主張を証明する。

$$
\begin{array}{ccc}
\downarrow & & \downarrow \\
\displaystyle\bigoplus_{i=0}^{p-1} H^{i}_{DR}(M) \otimes H^{p-1-i}_{DR}(N_{j-1}) \oplus H^{p-1}_{DR}(M) & \longrightarrow & H^{p-1}_{DR}(M \times N_{j-1}) \oplus H^{p-1}_{DR}(M \times B_j) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\displaystyle\bigoplus_{i=0}^{p-1} H^{i}_{DR}(M) \otimes H^{p-1-i}_{DR}(S^{m_j}) & \longrightarrow & H^{p-1}_{DR}(M \times (N_{j-1} \cap B_j)) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\displaystyle\bigoplus_{i=0}^{p} H^{i}_{DR}(M) \otimes H^{p-i}_{DR}(N_j) & \longrightarrow & H^{p}_{DR}(M \times N_j) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\displaystyle\bigoplus_{i=0}^{p} H^{i}_{DR}(M) \otimes H^{p-i}_{DR}(N_{j-1}) \oplus H^{p}_{DR}(M) & \longrightarrow & H^{p}_{DR}(M \times N_{j-1}) \oplus H^{p}_{DR}(M \times B_j) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\displaystyle\bigoplus_{i=0}^{p} H^{i}_{DR}(M) \otimes H^{p-i}_{DR}(S^{m_j}) & \longrightarrow & H^{p}_{DR}(M \times (N_{j-1} \cap B_j)) \\
\downarrow & & \downarrow
\end{array}
$$

定義 [カップ積] 対角写像が誘導する準同型写像 $H^*_{DR}(M) \otimes H^*_{DR}(M) \cong H^*(M \times M) \xrightarrow{\mathrm{diag}^*} H^*_{DR}(M)$ が、各 p, q に対して定める双線形写像 $\cup : H^p_{DR}(M) \times H^q_{DR}(M) \longrightarrow H^{p+q}_{DR}(M)$ をカップ積と呼ぶ。

問題４． M の閉 p 形式 α, 閉 q 形式 β に対し、$[\alpha \wedge \beta] = [\alpha] \cup [\beta]$ が成立することを示せ。