復習問題1.微積分学の基本定理とは何か。

復習問題 2 .n 次元ユークリッド空間の開集合 U 上の実数値関数 f が C^r 級 $(r=1,\ldots,\infty)$ であることの定義を述べよ。

復習問題3.平面の開集合 U 上の C^2 級実数値関数 f は $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}$ を満たすこと示せ。

定義 [微分 1 形式,線積分] ユークリッド空間の開集合 U 上の連続関数 $f_1(x),\ldots,f_n(x)$ に対して、 $f_1\mathrm{d}x_1+\cdots+f_n\mathrm{d}x_n$ を、U 上の微分 1 形式(あるいは 1 次微分形式)と呼ぶ。微分 1 形式 $f_1\mathrm{d}x_1+\cdots+f_n\mathrm{d}x_n$ の連続微分可能曲線 $\gamma:[a,b]\longrightarrow U$ $(\gamma(t)=(\gamma_1(t),\ldots,\gamma_n(t)))$ 上の積分(線積分)を次で定義する。

$$\int_{\gamma} \left(f_1 dx_1 + \dots + f_n dx_n \right) = \int_a^b \left(f_1(\gamma(t)) \frac{d\gamma_1}{dt}(t) + \dots + f_n(\gamma(t)) \frac{d\gamma_n}{dt}(t) \right) dt$$

定義 [全微分] ユークリッド空間の開集合 U 上の連続微分可能な関数 f に対し、 $\mathrm{d}f=\frac{\partial f}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_n}\mathrm{d}x_n$ を f の全微分と呼ぶ。

問題 1.ユークリッド空間の開集合 U 上の連続微分可能な関数 f,連続微分可能 曲線 $\gamma:[a,b]\longrightarrow U$ について、 $\int_{\gamma}\mathrm{d}f=f(\gamma(b))-f(\gamma(a))$ を示せ。

問題2. $f_1,\,f_2$ が平面上で定義された連続微分可能な関数で、 $\frac{\partial f_1}{\partial x_2}=\frac{\partial f_2}{\partial x_1}$ を満たすとする。 $\mathrm{d}f=f_1\mathrm{d}x_1+f_2\mathrm{d}x_2$ を満たす f は、 $f(x_1,x_2)=\int_0^{x_1}f_1(s,0)\mathrm{d}s+\int_0^{x_2}f_2(x_1,t)\mathrm{d}t$ で与えられることを示せ。

問題3.原点を除いた平面上で定義された

$$f_1 dx_1 + f_2 dx_2 = -\frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2} dx_1 + \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} dx_2$$

を考える。

- (1) $\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = \frac{\partial f_2}{\partial x_1}$ を満たしていることを示せ。
- (2) $\mathrm{d}f=f_1\mathrm{d}x_1+f_2\mathrm{d}x_2$ となる $\mathbf{R}^2\setminus\{0\}$ 上で定義された関数 f は存在しないことを示せ。