# 27　単体複体

## 27.1　ユークリッド空間の単体

ユークリッド空間の（アフィン）$k$ 次元単体を定義しよう。

**定義 27.1** $k$ 次元以上のユークリッド空間内の、一般の位置にある $k+1$ 個の点 $v_0,\ \ldots,\ v_k$ に対し、$k$ 次元単体 $\langle v_0 \cdots v_k\rangle$ を

$$\langle v_0 \ldots v_k\rangle = \Big\{ \sum_{i=0}^{k} t_i v_i \ \Big|\ t_i \geqq 0\ (i=0,\ \ldots,\ k),\ \sum_{i=0}^{k} t_i = 1 \Big\}$$

で定義する。ただし、$v_0,\ \ldots,\ v_k$ が**一般の位置にある**とは、$v_i - v_0$ $(i=1,\ \ldots,\ k)$ が 1 次独立であることである。この条件は、$v_i - v_{i-1}$ $(i=1,\ \ldots,\ k)$ が 1 次独立であることと同値である。

このとき、$\langle v_0 \cdots v_k\rangle$ は、$\{v_0, \ldots, v_k\}$ の凸包である。ここで、ユークリッド空間の部分集合 $A$ の凸包とは、$A$ を含む最小の凸集合のことである。$\langle v_0 \cdots v_k\rangle$ は、$k$ 次元立方体 $I^k = [0,1]^k$, $k$ 次元円板（球体）$D^k = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^k \ \big|\ \|\boldsymbol{x}\| \leqq 1\}$ と同相である。

**定義 27.2** $0 \leqq \ell < k$ に対し、ユークリッド空間の $k$ 次元単体 $\sigma = \langle v_0 \cdots v_k\rangle$ の $\ell$ 次元フェイス（面, *face*）とは、$\{v_0, \ldots, v_k\}$ の $\ell+1$ 個の元からなる部分集合 $\{v_{i_0}, \ldots, v_{i_\ell}\}$ の凸包である $\ell$ 次元単体 $\tau = \langle v_{i_0} \cdots v_{i_\ell}\rangle$ である。$\tau$ が $\sigma$ のフェイスであることを $\tau \prec \sigma$ と書く。

$k$ 単体 $\langle v_0 \ldots v_k\rangle$ に対し、$\Big\{ \sum_{i=0}^{k} t_i v_i \ \Big|\ t_i > 0\ (i=0,\ \ldots,\ k),\ \sum_{i=0}^{k} t_i = 1 \Big\}$ を $k$ 単体 $\langle v_0 \ldots v_k\rangle$ の内部 (interior) と呼ぶ。$k$ 単体の内部は $k$ 次元ユークリッド空間に実現した単体の内点（その点のユークリッド空間における近傍が単体に含まれる点）の集合と一致する。$k=0$ のとき、0 単体の内部は 0 単体自身である。

## 27.2　ユークリッド空間の有限単体複体

**定義 27.3** 有限次元ユークリッド空間の内部が交わらない単体の有限集合 $K$ が、

- $K$ の単体のフェイスは $K$ の単体である

という条件を満たすとき、$K$ をユークリッド空間の有限単体複体と呼ぶ。$K$ に含まれる単体の次元の最大値を $K$ の次元と呼ぶ。

$S_k$ $(k=0,\ \ldots,\ n)$ をユークリッド空間の $n$ 次元単体複体 $K$ の $k$ 単体の集合とするとき、$K = \bigcup_{k=0}^{n} S_k$ であるが、$K = (S_0, \ldots S_n)$ と書くこともある。

ユークリッド空間の単体複体 $K$ の単体の和集合にユークリッド空間から誘導された位相を考えたものを単体複体 $K$ の実現と呼び、$|K|$ と書く。

有限単体複体 $K$ は単体の有限集合で、$|K|$ はユークリッド空間内の部分集合で位相空間である。有限単体複体 $K$ の実現 $|K|$ はコンパクト集合である。

**【例 27.4】**　(1)　$k > 0$ のとき、ユークリッド空間の $k$ 次元単体 $\sigma = \langle v_0 \ldots v_k\rangle$ だけを元とする集合は、単体複体にならない。$k$ 次元単体 $\langle v_0 \ldots v_k\rangle$ の $\ell$ 次

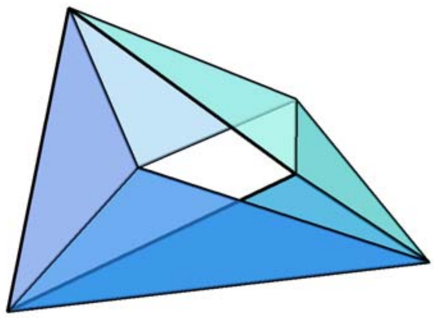

図 14: ユークリッド空間の単体複体

元フェイスは $\binom{k+1}{\ell+1}$ 個あるが、これらすべてを元とする $2^{k+1}-1$ 個の元を持つ集合が $k$ 次元単体 $\langle v_0 \dots v_k\rangle$ を含む最小の単体複体である。これを $K_\sigma$ と書くとその実現 $|K_\sigma| = \sigma$ となる。

(2)　$k > 0$ のとき、$K_{\partial\sigma} = K_\sigma \setminus \{\sigma\}$ は、$k-1$ 次元単体複体で、その実現 $|K_{\partial\sigma}|$ は、$k-1$ 次元球面と同相になる。

(3)　$n$ 次元単体複体 $K = (S_0, \dots, S_n)$, $0 \leqq k \leqq n$ に対し、$K^{(k)} = (S_0, \dots, S_k)$ とすると、$K^{(k)}$ は単体複体となる。$K^{(k)}$ を $K$ の $k$ 骨格 ($k$-skeleton) と呼ぶ。

ユークリッド空間の単体複体 $K = (S_0, \dots, S_n)$ に対して、$S_k$ の元である $k$ 次元単体は、その頂点の集合すなわち、$S_0$ の $k+1$ 個の点からなる部分集合で定まっている。従って、単体複体の単体相互の関係は、単体の頂点の集合の相互関係で定まっている。このことから、頂点の集合だけに着目して単体複体を定義する。

## 27.3　単体複体

**定義 27.5** $n$ 次元有限単体複体 $K$ とは、頂点のなす有限集合 $V = S_0$ と $k = 1, \dots, n$ に対して、$V$ の $k+1$ 個の元からなる集合の部分集合 $S_k$ の組 $K = (S_0, S_1, \dots, S_n)$ で次の条件を満たすものである（$n$ 次元というときは通常 $S_n \neq \emptyset$ とする）。

- $0 \leqq \ell < k$ に対し、$S_k$ の元 $\sigma = \{v_0, \dots, v_k\}$ の $\ell+1$ 個の元からなる部分集合 $\tau = \{v_{i_0}, \dots, v_{i_\ell}\}$ は $S_\ell$ の元である。

$S_k$ の元 $\sigma$ を $k$ 次元単体あるいは $k$ 単体と呼ぶ。$\sigma$ の空でない真部分集合で定まる $\ell$ 単体 $\tau$ は、$\sigma$ の $\ell$ 次元フェイス *(face)* と呼ばれ、$K$ の単体 $\tau$ が $K$ の単体 $\sigma$ のフェイスであることを $\tau \prec \sigma$ と書く。上の条件は、$K$ の単体のフェイスは $K$ の単体であるということである。

単体複体は、ユークリッド空間の単体複体として実現されるので、$S_k$ の元 $\sigma$ を今後は $\sigma = \langle v_0 \cdots v_k\rangle$ と書く。

定義 27.5 の有限単体複体 $K = (S_0, \dots, S_n)$ に対して、頂点の集合 $V = S_0$ を有限次元ユークリッド空間内にとり、$S_k$ の元をユークリッド空間内に頂点の集合の凸包として与えて、定義 27.3 の単体複体が得られるとき、その実現を $K$ の実現と呼び $|K|$ と書く。有限単体複体の実現はコンパクト集合である。

**注意 27.6** 単体複体 $K$ の実現がユークリッド空間の単体複体 $K_1$, $K_2$ の実現 $|K_1|$, $|K_2|$ として与えられたとき、頂点同士の対応により、各単体上でアフィン写像となる同相写像 $|K_1| \longrightarrow |K_2|$ が定義される。従って $K$ の実現 $|K|$ は互いに同相である。

有限単体複体は、頂点の集合が $N$ 個の元からなるとき、頂点の集合を $N$ 次元ユークリッド空間の基底となるベクトルの集合として、ユークリッド空間に実現することができる。

**【例 27.7】** (1) $k+1$ 個の点からなる集合 $V = \{v_0, \ldots, v_k\}$ のすべての空でない部分集合全体を考えると、これは $k$ 次元単体複体 $K$ となる。この単体複体に対して、ユークリッド空間内の $k$ 次元単体 $\sigma = \langle v_0 \ldots v_k\rangle$ に対して定義した単体複体 $K_\sigma$ がとれ、その実現は、$|K| = |K_\sigma| = \sigma$ である。

(2) (1) の $K$ に対し、$K \setminus \{V\}$ は、$k-1$ 次元単体複体で、その実現は $|K \setminus \{V\}| = |K_{\partial\sigma}| \approx S^{k-1}$ となる。

位相空間 $X$ がある単体複体 $K$ の実現 $|K|$ と同相であるとき、$K$ を $X$ の**単体分割**と呼ぶ。例えば、$k$ 次元円板 $D^k$ の単体分割は、$k$ 単体 $\sigma$ に対する $K_\sigma$ で与えることができ、$k-1$ 次元球面 $S^{k-1}$ の単体分割は $K_{\partial\sigma}$ で与えることができる。

# 28 単体複体に付随するチェイン複体

ユークリッド空間の単体複体あるいは単体複体の実現は胞体複体の構造を持っている。この胞体複体に付随するチェイン複体を考えると次のものになる。

ユークリッド空間内の単体複体 $K = (V = S_0, S_1, \ldots, S_n)$ の $k$ 骨格を $K^{(k)}$ と書く。$k$ 骨格の実現 $|K^{(k)}|$ について

$$|K| = |K^{(n)}| \supset |K^{(n-1)}| \supset \cdots \supset |K^{(1)}| \supset |K^{(0)}|$$

を考える。$|K^{(k)}|$ は $|K^{(k-1)}|$ に $D^k$ と同相な $k$ 単体 $\sigma \in S_k$ を、その境界にあたる $|K_{\partial\sigma}|$ を包含写像 $K_{\partial\sigma} \longrightarrow K^{(k-1)}$ が定める包含写像 $|K_{\partial\sigma}| \longrightarrow |K^{(k-1)}|$ により貼り付けて得られる。従って、$|K|$ は胞体複体の構造を持ち、これに付随するチェイン複体が定まる。

チェイン複体の生成元はこの場合の胞体である単体である。従って、$C_k(K)$ を $S_k$ の元を生成元とする自由加群とすると、

$$C_*(K) : 0 \xleftarrow{\ \partial\ } C_0(K) \xleftarrow{\ \partial\ } C_1(K) \xleftarrow{\ \partial\ } C_2(K) \xleftarrow{\ \partial\ } \cdots$$

が得られる。

境界準同型 $\partial$ は、$|K_{\partial\sigma}| \longrightarrow |K^{(k-1)}|$ が像への同相写像として定義されているので記述しやすい。$S_k$ の元 $\langle v_0 \cdots v_k\rangle$ を一意的に書くために $V$ に線形順序を入れ、$v_0, \ldots, v_k$ はこの順序について単調増大であるものを取る。$k$ 次元単体 $\langle v_0 v_1 \cdots v_k\rangle$ の $k-1$ 次元の面は $\langle v_0 \cdots v_{j-1} v_{j+1} \cdots v_n\rangle$ $(j = 0, \ldots, k)$ の $k+1$ 個存在する。

このとき、境界準同型 $\partial$ は、次のように書かれる。

$$\begin{aligned}
\partial\langle v_0 v_1\rangle &= \langle v_1\rangle - \langle v_0\rangle, \\
\partial\langle v_0 v_1 v_2\rangle &= \langle v_1 v_2\rangle - \langle v_0 v_2\rangle + \langle v_0 v_1\rangle, \\
\partial\langle v_0 v_1 v_2 v_3\rangle &= \langle v_1 v_2 v_3\rangle - \langle v_0 v_2 v_3\rangle + \langle v_0 v_1 v_3\rangle - \langle v_0 v_1 v_2\rangle, \\
\partial\langle v_0 \cdots v_n\rangle &= \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \langle v_0 v_1 \cdots v_{i-1} v_{i+1} \cdots v_n\rangle.
\end{aligned}$$

**注意 28.1**　この境界準同型は、球面のホモロジー群の生成元の定め方、すなわち $\partial_*[D^n, \partial D^n] = [S^{n-1}]$ となる生成元のとりかたに一致する。

同相の族 $f_t : S^{n-1} \longrightarrow S^{n-1}$ ($f_0 = \mathrm{id}$, $f_1 = f$) があるとき、球面 $S^{n-1}$ 上の円板 $U^{n-1}$ について、$(S^{n-1}, S^{n-1} \setminus U^{n-1})$ と $(S^{n-1}, S^{n-1} \setminus f(U^{n-1}))$ について、

$$\begin{aligned}
j_*[S^{n-1}] &= [S^{n-1}, S^{n-1} \setminus U^{n-1}] = i_{U^{n-1}*}([U^{n-1}, \partial U^{n-1}]),\\
j_*[S^{n-1}] &= [S^{n-1}, S^{n-1} \setminus f(U^{n-1})] = i_{f(U^{n-1})*}([f(U^{n-1}), \partial f(U^{n-1})])
\end{aligned}$$

のように $f$ で写される円板上の生成元をとることができる。従って、このように写りあう円板（実際にはすべての円板）上に生成元を定めることができる。

$\partial_*[D^n, \partial D^n] = [S^{n-1}]$ の生成元の定め方は、

$$j_*\partial[D^n, \partial D^n] = i_{D^{n-1}*}[D^{n-1}, \partial D^{n-1}]$$

により定まっているが、球面については、

$$i_{D^{n-1}} : (D^{n-1}, \partial D^{n-1}) \longrightarrow (S^{n-1}_+, \partial S^{n-1}_+)$$

は,

$$\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_{n-1}) \longmapsto (\sqrt{1 - \|\boldsymbol{x}\|^2}, x_1, \dots, x_{n-1})$$

により定めるのが普通である。

この定め方は、$v_1 - v_0$, $v_2 - v_0$, $\dots$, $v_n - v_0$ が、

$$\det \begin{pmatrix} v_1 - v_0 & v_2 - v_0 & \cdots & v_n - v_0 \end{pmatrix} > 0$$

を満たすとき、

$$\partial\langle v_0 \cdots v_n\rangle = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \langle v_0 v_1 \cdots v_{i-1} v_{i+1} \cdots v_n\rangle$$

の決め方と一致している。

こうして単体複体の境界写像は非常に明快に書かれる。さらに、胞体複体としてのチェイン複体であることを忘れて、単体複体のチェイン複体を $S_k$ の元を生成元とする自由加群において、境界準同型を $\partial\langle v_0 \cdots v_k\rangle = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \langle v_0 \cdots v_{i-1} v_{i+1} \cdots v_k\rangle$ と定めることにすると、それだけでチェイン複体が定まることがわかる。実際 $\langle v_0 \cdots \widehat{v_i} \cdots v_k\rangle$ で $v_i$ を取り除いた $\langle v_0 \cdots v_{i-1} v_{i+1} \cdots v_k\rangle$ を表すことにすると、

$$\begin{aligned}
&(\partial \circ \partial)(\langle v_0 \cdots v_k\rangle)\\
&= \partial(\sum_{i=0}^{k} (-1)^i \langle v_0 \cdots \widehat{v_i} \cdots v_k\rangle)\\
&= \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^j \langle v_0 \cdots \widehat{v_j} \cdots \widehat{v_i} \cdots v_k\rangle\\
&\quad + \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \sum_{j=i+1}^{k} (-1)^{j-1} \langle v_0 \cdots \widehat{v_i} \cdots \widehat{v_j} \cdots v_k\rangle\\
&= \sum_{j<i} (-1)^{i+j} \langle v_0 \cdots \widehat{v_j} \cdots \widehat{v_i} \cdots v_k\rangle\\
&\quad + \sum_{i<j} (-1)^{i+j-1} \langle v_0 \cdots \widehat{v_i} \cdots \widehat{v_j} \cdots v_k\rangle = 0
\end{aligned}$$

ここで、最後に $j < i$ について、$v_i$, $v_j$ を取り除いた $\langle v_0 v_1 \cdots \widehat{v_i} \cdots \widehat{v_j} \cdots v_k\rangle$ の係数が前の和では $(-1)^{i+j}$, 後の和では $(-1)^{i+j-1}$ であるから、0 となった。

こうして、単体複体からは自然にチェイン複体が定義されている。

境界準同型が容易にわかることは良いが、チェイン複体のホモロジー群の計算はやさしいはずのものも結構面倒である。

$n$ 次元単体自体のチェイン複体は

$$0 \xleftarrow{\partial} \boldsymbol{Z}^{\binom{n+1}{1}} \xleftarrow{\partial} \boldsymbol{Z}^{\binom{n+1}{2}} \xleftarrow{\partial} \cdots \xleftarrow{\partial} \boldsymbol{Z}^{\binom{n+1}{n-1}} \xleftarrow{\partial} \boldsymbol{Z}^{\binom{n+1}{n}} \xleftarrow{\partial} \boldsymbol{Z}^{\binom{n+1}{n+1}} \xleftarrow{\partial} 0$$

このようになるとこのチェイン複体のホモロジー群が１点のホモロジー群と同じであることを示すのも自明ではない。

この場合は $n$ 単体を $\langle v_0 \cdots v_n\rangle$ として、

$$H\langle v_{i_0}\cdots v_{i_k}\rangle = \begin{cases}\langle v_0 v_{i_0}\cdots v_{i_k}\rangle & (i_0>0)\\ 0 & (i_0=0)\end{cases}$$

とする。$(\partial H + H\partial)\langle v_{i_0}\cdots v_{i_k}\rangle$ は $k>0,\ i_0>0$ ならば、

$$\begin{aligned}
&(\partial H + H\partial)\langle v_{i_0}\cdots v_{i_k}\rangle\\
&=\partial\langle v_0 v_{i_0}\cdots v_{i_k}\rangle + H\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\langle v_{i_0}\cdots v_{i_{j-1}}v_{i_{j+1}}\cdots v_{i_k}\rangle\\
&=\langle v_{i_0}\cdots v_{i_k}\rangle - \sum_{j=0}^{k}(-1)^j\langle v_0 v_{i_0}\cdots v_{i_{j-1}}v_{i_{j+1}}\cdots v_{i_k}\rangle\\
&\quad+\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\langle v_0 v_{i_0}\cdots v_{i_{j-1}}v_{i_{j+1}}\cdots v_{i_k}\rangle\\
&=\langle v_{i_0}\cdots v_{i_k}\rangle
\end{aligned}$$

$k>0,\ i_0=0$ ならば、

$$(\partial H + H\partial)\langle v_{i_0}\cdots v_{i_k}\rangle = \langle v_{i_0}\cdots v_{i_k}\rangle$$

また、

$$(\partial H + H\partial)\langle v_i\rangle = \begin{cases}\langle v_i\rangle - \langle v_0\rangle & (i>0)\\ 0 & (i=0)\end{cases}$$

である。この結果、$r: C_*(\sigma)\longrightarrow C_*(\sigma)$ を、$r(\langle v_i\rangle)=\langle v_0\rangle,\ r(\langle v_{i_0}\cdots v_{i_k}\rangle)=0$ で定義すると、$r$ はチェイン写像である。$\mathrm{id}-r=\partial H + H\partial$ となるが、このとき、$\mathrm{id}_* = r_* : H_*(C_*(\sigma))\longrightarrow H_*(C_*(\sigma))$ となる。$c: C_*(\sigma)\longrightarrow C_*(\langle v_0\rangle),\ i: C_*(\langle v_0\rangle)\longrightarrow C_*(\sigma)$ について、$c\circ i = \mathrm{id}_{C_*(\langle v_0\rangle)}$ だから、$c_*\circ i_* = \mathrm{id}_{H_*(C_*(\langle v_0\rangle))}$. $i\circ c = r$ だから、$i_*\circ c_* = r_* = \mathrm{id}_{H_*(C_*(\sigma))}$ となり、$H_*(C_*(\sigma)) = H_*(C_*(\langle v_0\rangle))$ を得る。

**【問題 28.2】** $X,\ Y,\ Z$ を次で与えられる位相空間とする。

$$\begin{aligned}
X&=\{(x,y,z)\in \boldsymbol{R}^3 \mid \big((x^2+y^2)^{1/2}-2\big)^2+z^2=1\}\\
&\quad\cup\{(x,y,z)\in \boldsymbol{R}^3 \mid y=0,(x-2)^2+z^2 \leqq 1\}\\
Y&=\{(x,y,z)\in \boldsymbol{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2=1\}\\
&\quad\cup\{(x,y,z)\in \boldsymbol{R}^3 \mid x=y=0,|z|\leqq 1\}\\
Z&=\{(x,y,z)\in \boldsymbol{R}^3 \mid (x+1)^2+y^2+z^2=1\}\\
&\quad\cup\{(x,y,z)\in \boldsymbol{R}^3 \mid y=0,(x-1)^2+z^2=1\}
\end{aligned}$$

(1)　$X,\ Y,\ Z$ のの胞体分割、単体分割を与えよ。

(2)　$X,\ Y,\ Z$ の胞体分割に対応するチェイン複体を書き、ホモロジー群を求めよ。

(3)　$Y,\ Z$ の単体分割に対応するチェイン複体を書き、ホモロジー群を求めよ。

**【問題 28.3】** 位相空間 $X,\ Y$ のジョイン (join)$X*Y$ を商空間 $X*Y = X\times[0,1]\times Y/\sim$ として定義する。但し、同値関係 $\sim$ は、

$$(x_1,t_1,y_1)\sim(x_2,t_2,y_2) \Longleftrightarrow (t_1=t_2=0 \text{ かつ } x_1=x_2) \text{ または } (t_1=t_2=1 \text{ かつ } y_1=y_2)$$

で生成されるものとする。

(1)　$S^k * S^\ell \approx S^{k+\ell+1}$ を示せ。

(2)　$X = \{p\}$（１点からなる空間）とするとき、$\{p\}*Y$ を $Y$ 上の錘 (cone) と呼ぶ。$\{p\}*Y$ は可縮な（１点とホモトピー同値な）位相空間であることを示せ。

(3)　$X = S^0 = \{-1, 1\}$ のとき、$S^0 * Y$ を $Y$ の懸垂 (suspension) と呼ぶ。$Y$ のホモロジー群により、$S^0 * Y$ のホモロジー群を表せ。

２つの交わらない単体 $\sigma^k = \langle v_0 \cdots v_k \rangle$, $\sigma^\ell = \langle w_0 \cdots w_\ell \rangle$ ($\{v_0, \ldots, v_k\} \cap \{w_0, \ldots, w_\ell\} = \emptyset$) に対して、それらのジョインを $\sigma^k * \sigma^\ell = \langle v_0 \cdots v_k w_0 \cdots w_\ell \rangle$ で定義する。

２つの単体複体 $K$, $L$ が交わりを持たないとき、それらのジョイン $K * L$ を、$K$ の単体、$L$ の単体、$K$ の単体と $L$ の単体のジョインとして得られる単体からなる単体複体とする。

**【問題 28.4】**　(1)　単体複体 $K$, $L$ のジョイン $K * L$ のチェイン複体の単体について以下が成立することを示せ。

$\partial(\sigma_0^0 * \sigma_1^0) = \sigma_1^0 - \sigma_0^0$,

$\ell \geqq 1$ のとき、$\partial(\sigma^0 * \sigma^\ell) = \sigma^\ell - \sigma_0 * (\partial \sigma^\ell)$,

$k \geqq 1$ のとき、$\partial(\sigma^k * \sigma^0) = (\partial \sigma^k) * \sigma^0 + (-1)^{k+1} \sigma^k$,

$k, \ell \geqq 1$ のとき、$\partial(\sigma^k * \sigma^\ell) = (\partial \sigma^k) * \sigma^\ell + (-1)^{k+1} \sigma^k * (\partial \sigma^\ell)$

(2)　$K = \langle b \rangle$ とするとき、$\langle b \rangle * L$ のチェイン複体のホモロジー群を求めよ。

## 29　単体写像

胞体複体の間の写像として胞体写像を考えたのと同様に、単体複体の間の写像としては次の単体写像を考えると良い。

**定義 29.1 (単体写像)**　２つの単体複体 $K_1$, $K_2$ に対して、$f_V : V(K_1) \longrightarrow V(K_2)$ が、$K_1$ の各単体の頂点の集合 $\{v_0, \ldots, v_k\}$ の像 $f_V(\{v_0, \ldots, v_k\})$ が $K_2$ の単体の頂点の集合となるという条件を満たすとき、**単体写像**という。

単体写像 $f : K_1 \longrightarrow K_2$ は、単体複体 $K_1$, $K_2$ の実現 $|K_1|$, $|K_2|$ の間の写像 $|f| : |K_1| \longrightarrow |K_2|$ を導く。実際、各単体 $\langle v_0 \cdots v_k \rangle$ 上の重心座標 $(t_0, \ldots, t_k)$ で $|f|(\sum_{i=0}^{k} t_i v_i) = \sum_{i=0}^{k} t_i f_V(v_i)$ と表示される。単体の像は次元が低いか等しい単体となる。

単体写像 $f$ はチェイン写像を導く。この場合の $f_*$ の計算も容易である。特に、$i_0 \cdots i_k$ の置換 $j_0 \cdots j_k$ に対して、

$$\langle v_{j_0} \cdots v_{j_k} \rangle = \mathrm{sign} \begin{pmatrix} j_0 \cdots j_k \\ i_0 \cdots i_k \end{pmatrix} \langle v_{i_0} \cdots v_{i_k} \rangle$$

と規約する。これは、互換が $[S^{k-1}]$, あるいは $[D^k, \partial D^k]$ の写像度 $-1$ の写像に対応していることによる。

このとき、

$$f_* \langle v_0 \cdots v_k \rangle = \begin{cases} \langle f_V(v_0) \cdots f_V(v_k) \rangle & i \neq j \text{ ならば、} f_V(v_i) \neq f_V(v_j) \\ 0 & \text{ある } i \neq j \text{ に対し、} f_V(v_i) = f_V(v_j) \end{cases}$$

により、$f_*$ を定めるとチェイン写像となる。実際、$i \neq j$ ならば $f_V(v_i) \neq f_V(v_j)$ であれば、

$$\begin{aligned}
&\partial\langle f_V(v_0)\cdots f_V(v_k)\rangle \\
&=\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\langle f_V(v_0)\cdots f_V(v_{i-1})f_V(v_{i+1})\cdots f_V(v_k)\rangle \\
&=f_*(\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\langle v_0\cdots v_{i-1}v_{i+1}\cdots v_k\rangle) \\
&=f_*\partial\langle v_0\cdots v_k\rangle
\end{aligned}$$

ある $i \neq j$ に対し $f_V(v_i) = f_V(v_j)$ $(i < j)$ となるとすると、

$$\begin{aligned}
&f_*(\partial\langle v_0\cdots v_k\rangle) \\
&=f_*(\sum_{\ell=0}^{k}(-1)^\ell\langle v_0\cdots v_{\ell-1}v_{\ell+1}\cdots v_k\rangle) \\
&=\sum_{\ell=0}^{k}(-1)^\ell\langle f_V(v_0)\cdots f_V(v_{\ell-1})f_V(v_{\ell+1})\cdots f_V(v_k)\rangle \\
&=(-1)^i\langle f_V(v_0)\cdots f_V(v_{i-1})f_V(v_{i+1})\cdots f_V(v_j)\cdots f_V(v_k)\rangle \\
&\quad+(-1)^j\langle f_V(v_0)\cdots f_V(v_i)\cdots f_V(v_{j-1})f_V(v_{j+1})\cdots f_V(v_k)\rangle \\
&=0
\end{aligned}$$

ここで、$\ell \neq i, j$ ならば、$f_*$ の定義により、0 となること、最後の項は、$f_V(v_i)$ を後ろに $j-i-1$ 個移動すれば係数を除いて同じになることを用いた。

このように単体複体の間の単体写像は単体複体のチェイン複体の間のチェイン写像を導くから、単体複体のホモロジー群の間の準同型を導く。

単体写像 $f: K_1 \longrightarrow K_2$, $g: K_2 \longrightarrow K_3$ の合成 $g \circ f: K_1 \longrightarrow K_3$ は単体写像であり、チェイン複体の間のチェイン写像 $f_*: C_*(K_1) \longrightarrow C_*(K_2)$, $g_*: C_*(K_2) \longrightarrow C_*(K_3)$, $(g \circ f)_*: C_*(K_1) \longrightarrow C_*(K_3)$ について、$K_1$ の各単体 $\sigma$ に対し、$g_*(f_*(\sigma)) = (g \circ f)_*(\sigma)$ が成立するから、$g_* \circ f_* = (g \circ f)_*: C_*(K_1) \longrightarrow C_*(K_3)$ である。従って、ホモロジー群の間の準同型 $f_*: H_*(K_1) \longrightarrow H_*(K_2)$, $g_*: H_*(K_2) \longrightarrow H_*(K_3)$, $(g \circ f)_*: H_*(K_1) \longrightarrow H_*(K_3)$ についても $g_* \circ f_* = (g \circ f)_*: H_*(K_1) \longrightarrow H_*(K_3)$ である。

## 30 単体複体の対のホモロジー群

単体複体とその間の単体写像だけを対象に考えると、その中だけでホモロジー群が定義され、それがホモロジー群の公理を満たすことを示すことができる。ホモロジー群の公理には、「共変関手」、「ホモトピー公理」、「対の完全系列」、「切除公理」、「次元公理」があるが、これらを確かめるために、単体複体 $K$ とその部分単体複体 $L$ の対のホモロジー群を定義する。

単体複体 $K$ とその部分単体複体 $L$ の対のホモロジー群は単体複体 $K, L$ のチェイン複体 $C_*(K), C_*(L)$ を用いて次のように与えることができる。これは空間対 $(|K|, |L|)$ のホモロジー群に一致する。

まず、部分単体複体 $L$ の単体複体 $K$ への埋め込み $i$ は、単射単体写像で、単射チェイン写像 $i_*: C_*(L) \longrightarrow C_*(K)$ を誘導する。$C_*(L) \subset C_*(K)$ と考える。

ここで、商 $\boldsymbol{Z}$ 加群 $C_k(K, L) = C_k(K)/C_k(L)$ を考えると、境界準同型 $\partial: C_k(K) \longrightarrow C_{k-1}(K)$ は $\partial(C_k(L)) \subset C_{k-1}(L)$ だから、$\partial: C_k(K, L) =$

$C_k(K)/C_k(L) \longrightarrow C_{k-1}(K)/C_{k-1}(L) = C_{k-1}(K,L)$ を誘導する。

$$C_*(K,L) : 0 \xleftarrow{\partial} C_0(K,L) \xleftarrow{\partial} C_1(K,L) \xleftarrow{\partial} \cdots$$

は、チェイン複体をなす。このチェイン複体のホモロジー群を、単体複体の対 $(K,L)$ のホモロジー群と呼び、$H_*(K,L)$ と書く。

単体複体の対 $(K_1,L_1)$, $(K_2,L_2)$ に対して、単体写像 $f : K_1 \longrightarrow K_2$ が $f|L_1$ が $L_2$ への単体写像になっているとき、単体複体の対の間の単体写像という。$f : (K_1,L_1) \longrightarrow (K_2,L_2)$ が単体写像ならば、チェイン写像 $f_* : C_*(K_1,L_1) \longrightarrow C_*(K_2,L_2)$ が誘導される。単体写像 $f : (K_1,L_1) \longrightarrow (K_2,L_2)$, $g : (K_1,L_1) \longrightarrow (K_2,L_2)$ が誘導するチェイン写像について、$(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$ であり、単体複体の対 $(K,L)$ に対し、$\mathrm{id}_{(K,L)\,*} = \mathrm{id} : C_*(K,L) \longrightarrow C_*(K,L)$ である。ホモロジー群に誘導される写像を考えれば、「共変関手」であることがわかる。

「対のホモロジー完全系列」も容易に分かる。

$$0 \longrightarrow C_*(L) \xrightarrow{i_*} C_*(K) \xrightarrow{j_*} C_*(K,L) \longrightarrow 0$$

はチェイン複体とチェイン写像の短完全系列となる。

この短完全系列系列から、空間対のホモロジー完全系列に対応するホモロジー群の長完全系列が導かれる。

「切除公理」について考えよう。単体複体 $K$ が、部分単体複体 $K_1$, $K_2$ の和集合 $K = K_1 \cup K_2$ であるとする。$K_{12} = K_1 \cap K_2$ は、$K_1$, $K_2$, $K$ の部分単体複体である。

このとき、$C_k(K_1,K_{12}) = C_k(K_1)/C_k(K_{12})$ と $C_k(K,K_2) = C_k(K)/C_k(K_2)$ は、$K_2$ の元ではない $K_1$ の $k$ 単体で生成される自由加群で、包含写像 $C_k(K_1,K_{12}) \longrightarrow C_k(K,K_2)$ により同型である。従って、境界準同型 $\partial$ と包含写像は可換であり、$H_k(K_1,K_{12}) \cong H_k(K,K_2)$ が導かれる。次のチェイン複体とチェイン写像の図式

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & C_*(K_{12}) & \xrightarrow{i_*} & C_*(K_1) & \xrightarrow{j_*} & C_*(K_1,K_{12}) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & C_*(K_2) & \xrightarrow{i_*} & C_*(K) & \xrightarrow{j_*} & C_*(K,K_2) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

は可換であるから次の図式は可換となる。

$$\begin{array}{ccc}
H_k(K_1,K_{12}) & \xrightarrow{\partial} & H_{k-1}(K_{12}) \\
\downarrow & & \downarrow \\
H_k(K,K_2) & \xrightarrow{\partial} & H_{k-1}(K_2)
\end{array}$$

「次元公理」は $H_*(\langle v \rangle)$ を計算することであるが、チェイン複体が $0 \longleftarrow \boldsymbol{Z}\langle v \rangle \longleftarrow 0$ であるから、$H_*(\langle v \rangle) = \begin{cases} \boldsymbol{Z} & (n=0) \\ 0 & (n \neq 0) \end{cases}$ となる。

「ホモトピー公理」にあたる命題の証明は、容易ではない。そもそも、命題自体が難しく、最も強い形で述べると次のようになる。$(X,A)$ の単体分割 $(K_1^0, L_1^0)$, $(K_1^1, L_1^1)$, $(Y,B)$ の単体分割 $(K_2^0, L_2^0)$, $(K_2^1, L_2^1)$ が与えられているとする。すなわち、 $(X,A) \approx (|K_1^0|, |L_1^0|) \approx (|K_1^1|, |L_1^1|)$, $(Y,B) \approx (|K_2^0|, |L_2^0|) \approx (|K_2^1|, |L_2^1|)$ が与えられているとする。このとき、同型写像 $h_{1*} : H_*(K_1^0, L_1^0) \longrightarrow H_*(K_1^1, L_1^1)$, $h_{2*} : H_*(K_2^0, L_2^0) \longrightarrow H_*(K_2^1, L_2^1)$ が定まる。さらに、単体写像 $f_0 : (K_1^0, L_1^0) \longrightarrow (K_2^0, L_2^0)$, $f_1 : (K_1^1, L_1^1) \longrightarrow (K_2^1, L_2^1)$ の実現 $|f_0|$, $|f_1|$ が $(X,A) \longrightarrow (Y,B)$ の写像とみてホモトピックであるとする。このとき、$h_{2*} f_{0*} = f_{1*} h_{1*}$.

これが成り立つことについては田村 [?] を参照されると良い。

その証明の中で重要なプロセスが、単体近似と重心細分である。以下の節でこれらを解説する。また、ホモロジーに誘導される写像が一致することを示すためにはチェイン・ホモトピーを構成することになる。

**定義 30.1** チェイン複体 $C_*, C'_*$ の間のチェイン写像 $f_0, f_1$ の間のチェイン・ホモトピーとは、準同型写像 $h : C_k \longrightarrow C'_{k+1}$ で $\partial h + h\partial = f_0 - f_1$ を満たすものである。

**命題 30.2** 自由加群からなるチェイン複体 $C_*, C'_*$ の間のチェイン写像 $f_0, f_1$ の間にチェイン・ホモトピーが存在することと、ホモロジー群の間の準同型写像 $f_{0*}, f_{1*} : H_*(C_*) \longrightarrow H_*(C'_*)$ が一致することは同値である。

# 31 単体近似

ユークリッド空間内の単体複体 $K$ の単体 $\sigma$ のスター $\mathrm{Star}(\sigma)$（星状体）を $\sigma$ をフェイスとする単体の和集合 $\mathrm{Star}(\sigma) = \bigcup_{\sigma \prec \tau} \tau$ とする。オープン・スター（開星状体）$O(\sigma)$ を $\sigma$ をフェイスとする単体の内部の和集合 $O(\sigma) = \bigcup_{\sigma \prec \tau} \mathrm{Int}(\tau)$ とする。

**【問題 31.1】** $\mathrm{Star}(\langle v_0 \dots v_k \rangle) = \bigcap_{i=0}^{k} \mathrm{Star}(v_i)$ を示せ。

（これは右辺が空でなければ、左辺の $k$ 単体が存在し、等号が成立するという意味でも正しい。）

**【問題 31.2】** $\mathrm{Star}(\sigma)$ の任意の点 $p$ と $\sigma$ 上の任意の点 $q$ を結ぶ線分 $(1-t)p+tq$ $(t \in [0,1])$ が定義できることを示せ。

**【問題 31.3】** $g : |K_1| \longrightarrow |K_2|$ が連続写像で、$K_1$ の頂点 $v$ のスターの像 $g(\mathrm{Star}(v))$ が $K_2$ のある頂点 $f_V(v)$ のスターに含まれるとする。

(1) $f_V$ は単体写像を定義することを示せ。

ヒント：$\mathrm{Star}(v) \subset g^{-1}(\mathrm{Star}(f_V(v)))$ と $K_1$ の単体 $\langle v_0 \dots v_k \rangle$ に対して、$\bigcap_{i=0}^{k} \mathrm{Star}(v_i) \neq \emptyset$ であることを使う。

(2) $f_V$ の実現 $f$ と $g$ はホモトピックであることを示せ。

# 32 重心細分

有限単体複体 $K$ の頂点のなす有限集合を $V$, $k$ 単体の集合を $S_k$ とする。

$k$ 単体 $\sigma = \langle v_0 \dots v_k \rangle$ の重心は $b_\sigma = \dfrac{1}{k+1} \sum_{i=0}^{k} v_i$ で与えられる点である。

$\sigma$ をそのすべての面 $\tau$ とともに、単体複体と見て、

頂点の集合を $\{b_\tau \bigm| \tau \prec \sigma\}$,

面の集合を、$\{\sigma_{\tau_0\tau_1\dots\tau_j} = \langle b_{\tau_0} b_{\tau_1} \dots b_{\tau_j} \rangle \bigm| \tau_0 \prec \tau_1 \prec \cdots \prec \tau_j\}$ としたものを $\sigma$ の重心細分と呼ぶ。

単体複体 $K$ に対し、単体複体 $K'$ が各単体を重心細分したものの和集合として定義される。$K$ の**重心細分**と呼ぶ。

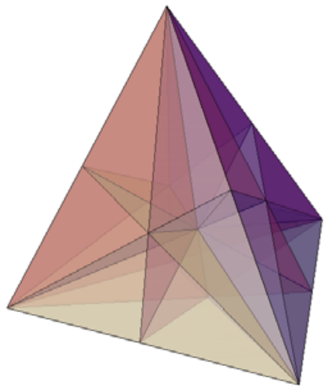

図 15: 単体の重心細分

$\mathrm{bsd}: C_k(K) \longrightarrow C_k(\mathrm{bsd}(K))$ を次で定義する。

$$\mathrm{bsd}(\sigma) = \sum_{\tau_0 \prec \tau_1 \prec \cdots \prec \tau_k} \mathrm{sign}(\tau_0\tau_1 \ldots \tau_k)\sigma_{\tau_0\tau_1\ldots\tau_k}$$

ただし、$|\tau_j| = |\langle v_{i_0} \ldots v_{i_j} \rangle|$ となるように $i_j$ をとって、$\mathrm{sign}(\tau_0\tau_1 \ldots \tau_k) = \mathrm{sign}(i_0 \ldots i_k)$ とする。

**【問題 32.1】**　(0)　１つの単体 $\sigma$, その重心細分に対するチェイン複体を書き下し、ホモロジー群は１点のホモロジー群と等しいことを示せ。

(1)　単体複体 $K$ に対し、$\mathrm{bsd} \circ \partial = \partial \circ \mathrm{bsd}$ を示せ。

(2)　bsd は $H_*(K) \longrightarrow H_*(\mathrm{bsd}(K))$ の同型を導くことを以下の手順で示せ。

(2-1)　$K$ の単体の個数についての帰納法を用いる。

(2-2)　$K'$ を $K$ の最大次元の単体 $\sigma$(の内部) を取り除いたものとする。

(2-3)

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & \downarrow\partial & & \downarrow\partial & & \downarrow\partial & & \\
0 & \to & C_2(K'\cap\sigma) & \xrightarrow{(i_{K'}, i_\sigma)} & C_2(K') \oplus C_2(\sigma) & \xrightarrow{j_{K'} - j_\sigma} & C_2(K) & \to & 0 \\
 & & \downarrow\partial & & \downarrow\partial & & \downarrow\partial & & \\
0 & \to & C_1(K'\cap\sigma) & \xrightarrow{(i_{K'}, i_\sigma)} & C_1(K') \oplus C_1(\sigma) & \xrightarrow{j_{K'} - j_\sigma} & C_1(K) & \to & 0 \\
 & & \downarrow\partial & & \downarrow\partial & & \downarrow\partial & & \\
0 & \to & C_0(K'\cap\sigma) & \xrightarrow{(i_{K'}, i_\sigma)} & C_0(K') \oplus C_0(\sigma) & \xrightarrow{j_{K'} - j_\sigma} & C_0(K) & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

とこれに bsd を施したものから得られるマイヤー・ビエトリスの完全列の間に $\mathrm{bsd}_*$ が誘導される。

$$\begin{array}{ccccccccc}
\xrightarrow{\Delta_*} & H_j(K'\cap\sigma) & \xrightarrow{(i_{K'*}, i_{\sigma*})} & H_j(K') \oplus H_j(\sigma) & \xrightarrow{j_{K'*} - j_{\sigma*}} & H_j(K) & \xrightarrow{\Delta_*} & H_{j-1}(K'\cap\sigma) \\
 & \downarrow \mathrm{bsd} & & \downarrow \mathrm{bsd} & & \downarrow \mathrm{bsd} & & \downarrow \mathrm{bsd} \\
\xrightarrow{\Delta_*} & H_j(\mathrm{bsd}(K')\cap\mathrm{bsd}(\sigma)) & \xrightarrow{(i_{\mathrm{bsd}(K')*}, i_{\mathrm{bsd}(\sigma)*})} & H_j(\mathrm{bsd}(K')) \oplus H_j(\mathrm{bsd}(\sigma)) & \xrightarrow{j_{\mathrm{bsd}(K')*} - j_{\mathrm{bsd}(\sigma)*}} & H_j(\mathrm{bsd}(K)) & \xrightarrow{\Delta_*} & H_{j-1}(\mathrm{bsd}(K')\cap\mathrm{bsd}(\sigma))
\end{array}$$

(2-4)　ファイブ・レンマを使う。

**【問題 32.2】**　任意の連続写像 $g : |K_1| \longrightarrow |K_2|$ に対し、自然数 $N$ が存在し、単体写像 $f : (\mathrm{bsd})^N(K_1) \longrightarrow K_2$ で $|f| \simeq g$ となるものが存在する。

# 33　単体複体の直積

２つの単体複体 $K,\ L$ の実現の直積 $|K| \times |L|$ は、胞体複体の構造を持っているが、それぞれの頂点の集合に線形順序があれば、$|K| \times |L|$ を単体単体分割できる。そのためには、$k$ 次元単体 $\sigma^k = \langle v_0 \cdots v_k \rangle$, $\ell$ 次元単体 $\tau^\ell = \langle w_0 \cdots \rangle$ の直積 $\sigma^k \times \tau^\ell$ を単体分割すればよい。$u^i_j = (v_i, wj) \in \sigma^k \times \tau^\ell$ とする。$(i_{a+1}, j_{a+1}) = (i_a + 1, j_a)$ または $(i_{a+1}, j_{a+1}) = (i_a, j_a + 1)$ を満たす列 $0 = i_0 \leqq \cdots \leqq i_{k+\ell} = k$, $0 = j_0 \leqq \cdots \leqq j_{k+\ell} = \ell$, に対し、単体 $\langle u^{i_0}_{j_0} \cdots u^{i_{k+\ell}}_{j_{k+\ell}} \rangle$ を考える。このような単体は $\begin{pmatrix} k+\ell \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k+\ell \\ \ell \end{pmatrix}$ 個あり、それらの面をすべてあわせた単体複体

$$\bigcup_{(i_{a+1},\, j_{a+1}) = (i_a + 1,\, j_a) \text{ または } (i_{a+1},\, j_{a+1}) = (i_a,\, j_a + 1)} K_{\langle u^{i_0}_{j_0} \cdots u^{i_{k+\ell}}_{j_{k+\ell}} \rangle}$$

は $\sigma^k \times \tau^\ell$ の単体分割を与える。

特に $[0,1] \times K$ について、$[0,1] \times \sigma^k$ の単体分割は、$v^0_i = (0, v_i)$, $v^1_i = (1, v_i)$ として、次のように与えられる。

$K$ の $k$ 単体 $\langle v_0 \cdots v_k \rangle$ に対して、$k+1$ 個の $k+1$ 単体 $\langle v^0_0 \cdots v^0_i v^1_i \cdots v^1_k \rangle$ $(i = 0, \ldots, k)$, $k+2$ 個の $k$ 単体 $\langle v^0_0 \cdots v^0_i v^1_{i+1} \cdots v^1_k \rangle$ $(i = -1, \ldots, k)$ を考える。これらの全体

$$\begin{aligned} &\{\langle v^0_0 \cdots v^0_i v^1_i \cdots v^1_k \rangle \bigm| (i = 0, \ldots, k),\ \langle v_0 \cdots v_k \rangle \in K\} \\ \cup &\{\langle v^0_0 \cdots v^0_i v^1_{i+1} \cdots v^1_k \rangle \bigm| (i = -1, \ldots, k),\ \langle v_0 \cdots v_k \rangle \in K\} \end{aligned}$$

は単体複体となる。

**【問題 33.1】**　$\sigma = \langle v_0 \cdots v_k \rangle$ に対して

$$P\sigma = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \langle v^0_0 \cdots v^0_i v^1_i \cdots v^1_k \rangle$$

と置くとき、

$$\partial P\sigma + P\partial\sigma = \langle v^1_0 \cdots v^1_k \rangle - \langle v^0_0 \cdots v^0_k \rangle$$

を示せ。

$[0,1] \times K$ の単体分割で、$K \times \{0\}$ では $K$ の単体分割を与え、$K \times \{1\}$ では $K$ の重心細分を与えるものも構成できる。

$v_i = (0, v_i)$, $b_\sigma = (1, b_\sigma)$ と略記する。$[0,1] \times \sigma$ の単体複体の構造 $L_\sigma$ を、

$$L_\sigma = \langle b_\sigma \rangle * K_\sigma \cup \bigcup_{i=0}^{k} L_{\partial_i \sigma}$$

とおく。但し、$\partial_i \langle v_0 \cdots v_k \rangle = \langle v_0 \cdots v_{i-1} v_{i+1} \cdots v_k \rangle$ である。このとき、$\displaystyle\bigcup_{\sigma \in K} L_\sigma$ が求める $[0,1] \times |K|$ の単体分割である。

**【問題 33.2】**　$\mathrm{bsd} : C_*(K) \longrightarrow C_*(L)$ を $\mathrm{bsd}\langle v \rangle = \langle b_v \rangle$, $\dim\sigma \geqq 1$ に対し $\mathrm{bsd}(\sigma) = \langle b_\sigma \rangle * (\mathrm{bsd}(\partial\sigma))$ で定義する。$\mathrm{BSD} : C_*(K) \longrightarrow C_{*+1}(L)$ を $\mathrm{BSD}\langle v \rangle = -\langle b_v \rangle * \langle v \rangle$, $\dim\sigma \geqq 1$ に対し $\mathrm{BSD}(\sigma) = -\langle b_\sigma \rangle * (\mathrm{BSD}(\partial\sigma) + \sigma)$ で定義する。

このとき、$\partial\,\mathrm{BSD}\,\sigma + \mathrm{BSD}\,\partial\sigma = \mathrm{bsd}\,\sigma - \sigma$ を示せ。

# 34　問題の解答

**【問題 28.2 の解答】**作業中

**【問題 28.3 の解答】**作業中
**【問題 28.4 の解答】**作業中
(2) $C_*(\langle b\rangle * L)$ の生成元 $\langle b\rangle, \sigma, \langle b\rangle * \sigma$ に対し、

$$\begin{aligned} H(\langle b\rangle) &= 0 \\ H(\sigma) &= \langle b\rangle * \sigma \\ H(\langle b\rangle * \sigma) &= 0 \end{aligned}$$

とする。

$$\begin{aligned} (\partial H + H\partial)(\langle b\rangle) &= 0 \\ (\partial H + H\partial)(\sigma) &= \partial(\langle b\rangle * \sigma) + H(\partial\sigma) \\ &= \begin{cases} \sigma - \langle b\rangle & \dim\sigma = 0 \\ \sigma - \langle b\rangle * (\partial\sigma) + H(\partial\sigma) = \sigma & \dim\sigma > 0 \end{cases} \\ (\partial H + H\partial)(\langle b\rangle * \sigma) &= H(\sigma - \langle b\rangle * (\partial\sigma)) \\ &= H(\sigma) = \langle b\rangle * \sigma \end{aligned}$$

である。この結果、$r : C_*(\langle b\rangle * L) \longrightarrow C_*(\langle b\rangle * L)$ を、$r(\langle b\rangle) = \langle b\rangle, r(\sigma^0) = \langle b\rangle, i > 0$ のとき、$r(\sigma^i) = 0, r(\langle b\rangle * \sigma) = 0$ で定義すると、$r$ はチェイン写像である。$\mathrm{id} - r = \partial H + H\partial$ となるが、このとき、$\mathrm{id}_* = r_* : H_*(C_*(\langle b\rangle * L)) \longrightarrow H_*(C_*(\langle b\rangle * L))$ となる。$c : C_*(\langle b\rangle * L) \longrightarrow C_*(\langle b\rangle), i : C_*(\langle b\rangle) \longrightarrow C_*(\langle b\rangle * L)$ について、$c \circ i = \mathrm{id}_{C_*(\langle b\rangle)}$ だから、$c_* \circ i_* = \mathrm{id}_{H_*(C_*(\langle b\rangle))}$. $i \circ c = r$ だから、$i_* \circ c_* = r_* = \mathrm{id}_{H_*(C_*(\langle b\rangle * L))}$ となり、$H_*(C_*(\langle b\rangle * L)) = H_*(C_*(\langle b\rangle))$ を得る。
**【問題 33.1 の解答】**

$$\begin{aligned} \partial P\sigma + P\partial\sigma &= \partial\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\langle v_0^0 \cdots v_i^0 v_i^1 \cdots v_k^1\rangle + P\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\langle v_0 \cdots \widehat{v_j} \cdots v_k\rangle \\ &= \sum_{i=0}^{k}(-1)^i\sum_{j=0}^{i}(-1)^j\langle v_0^0 \cdots \widehat{v_j^0} \cdots v_i^0 v_i^1 \cdots v_k^1\rangle \\ &\quad + \sum_{i=0}^{k}(-1)^i\sum_{j=i}^{k}(-1)^{j+1}\langle v_0^0 \cdots v_i^0 v_i^1 \cdots \widehat{v_j^1} \cdots v_k^1\rangle \\ &\quad + \sum_{j=0}^{k}(-1)^j\sum_{i=0}^{j-1}(-1)^i\langle v_0^0 \cdots v_i^0 v_i^1 \cdots \widehat{v_j^1} \cdots v_k^1\rangle \\ &\quad + \sum_{j=0}^{k}(-1)^j\sum_{i=j+1}^{k}(-1)^{i-1}\langle v_0^0 \cdots \widehat{v_j^0} \cdots v_i^0 v_i^1 \cdots v_k^1\rangle \\ &= \sum_{i=0}^{k}(-1)^i(-1)^i\langle v_0^0 \cdots v_{i-1}^0 v_i^1 \cdots v_k^1\rangle \\ &\quad + \sum_{i=0}^{k}(-1)^i(-1)^{i+1}\langle v_0^0 \cdots v_i^0 v_{i+1}^1 \cdots v_k^1\rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

**【問題 33.2 の解答】**$\partial\,\mathrm{BSD}(\langle v\rangle) + \mathrm{BSD}\,\partial(\langle v\rangle) = \partial(-\langle b_v\rangle * \langle v\rangle) = -\partial\langle b_v v\rangle = \langle b_v\rangle - \langle v\rangle$ である。$\partial\,\mathrm{BSD}\,\sigma + \mathrm{BSD}\,\partial\sigma = \mathrm{bsd}\,\sigma - \sigma$ が $k-1$ 単体に対しては成立していれば、$k$ 単体 $\sigma$ の境界 $\partial\sigma$ について $\partial\,\mathrm{BSD}(\partial\sigma) + \mathrm{BSD}\,\partial(\partial\sigma) = \mathrm{bsd}(\partial\sigma) - (\partial\sigma)$, すなわち，$\partial\,\mathrm{BSD}(\partial\sigma) = \mathrm{bsd}(\partial\sigma) - (\partial\sigma)$ が成立している。このとき、

$$\begin{aligned} \partial\,\mathrm{BSD}\,\sigma + \mathrm{BSD}\,\partial\sigma &= \partial(-\langle b_\sigma\rangle * (\mathrm{BSD}(\partial\sigma) + \sigma)) + \mathrm{BSD}\,\partial\sigma \\ &= -(\mathrm{BSD}(\partial\sigma) + \sigma) + \langle b_\sigma\rangle * \partial(\mathrm{BSD}(\partial\sigma) + \sigma) + \mathrm{BSD}\,\partial\sigma \\ &= -\sigma + \langle b_\sigma\rangle * (\mathrm{bsd}(\partial\sigma) - (\partial\sigma) + \partial\sigma) = \mathrm{bsd}\,\sigma - \sigma \end{aligned}$$