

演習問題7 - 1 . $n \geq 2$ とする。

(1) $f : (D^n, S^{n-1}) \rightarrow (D^n, S^{n-1})$ について、 $\deg(f) = \deg(f|_{S^{n-1}})$ を示せ。

(2) $f : (S^n, S_+^n) \rightarrow (S^n, S_+^n)$ について、 $\deg(f : S^n \rightarrow S^n) = \deg(f : (S^n, S_+^n) \rightarrow (S^n, S_+^n))$ を示せ。

(3) $k \in \mathbb{Z}$ に対して、 $\deg(f) = k$ となる $f : S^n \rightarrow S^n$ を構成せよ。

ヒント : $f : S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$ について $\deg(f) = k$ となるものが構成できているとする (S^1 については、構成している)。次の式で定義する $Sf : S^n \rightarrow S^n$ の写像度を計算する。

$$(Sf)(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = (\sqrt{1-x_{n+1}^2} f(\frac{(x_1, \dots, x_n)}{\sqrt{1-x_{n+1}^2}}), x_{n+1})$$

演習問題7 - 2 . $n \geq 2$ とする。 n 次元の円板 $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$ の境界を ∂D^n とする。微分同相写像 $f : (D^n, \partial D^n) \rightarrow (D^n, \partial D^n)$ について、 $f|_{\partial D^n} : \partial D^n \rightarrow \partial D^n$ は f の ∂D^n への制限を表す。

(1) $f : D^n \rightarrow D^n$, $f|_{\partial D^n} : \partial D^n \rightarrow \partial D^n$ が向きを保つ、向きを反対にするということの定義を延べよ。

(2) f が向きを保つことと、 $f|_{\partial D^n}$ が向きを保つことは同値であることを示せ。

演習問題7 - 3 . (1) 微分同相写像 $f : (D^n, \partial D^n) \rightarrow (D^n, \partial D^n)$ ($n \geq 1$) について、 f が向きを保つことと $f_* = 1 : H_n(D^n, \partial D^n) \rightarrow H_n(D^n, \partial D^n)$ と同値であることを示せ。

(2) n 次元の球面 $S^n = \partial D^{n+1}$ について、微分同相写像 $g : S^n \rightarrow S^n$ が向きを保つことと $g_* = 1 : H_n(S^n) \rightarrow H_n(S^n)$ と同値であることを示せ。

問題7 - 4 . $f : S^n \rightarrow S^n$ に対し、点 $y \in S^n$ で次の性質を持つものがあるとする。 y の D^n と同相な閉近傍 U が存在し、 $f^{-1}(U)$ が連結成分 V_j ($j = 1, \dots, k$) の直和 $f^{-1}(U) = V_1 \sqcup \dots \sqcup V_k$ であるとするとき、 $f|_{V_i} : V_i \rightarrow U$ は同相写像である。

$f|_{V_j}$ が向きを保つ同相写像のとき $\sigma(f|_{V_j}) = +1$, $f|_{V_j}$ が向きを裏返す同相写像のとき $\sigma(f|_{V_j}) = -1$ と σ を定義するとき、 $\deg(f) = \sum_{j=1}^k \sigma(f|_{V_j})$ を示せ。

ヒント :

$$\begin{array}{ccccccc} \sqcup(V_j, \partial V_j) & \longrightarrow & (S^n, S^n \setminus \text{Int}(f^{-1}(U))) & \xrightarrow{f} & (S^n, S^n \setminus U) & \longleftarrow & (U, \partial U) \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ (V_j, \partial V_j) \rightarrow (S^n, S^n \setminus \text{Int}(V_j)) & \longleftarrow & S^n & \xrightarrow{f} & S^n & \longrightarrow & (U, \partial U) \end{array}$$

が H_n に誘導する準同型を考える。