

2010年度幾何学特別演習II 問題 10月20日

演習問題3 - 1 . $D^2 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$,
 $S^1 = \partial D^2 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$, 基点を $b = (1, 0)$ とし, 包含写像を
 $i : (S^1, b) \rightarrow (D^2, b)$ とする。

$i_* : \pi_1(S^1, b) \rightarrow \pi_1(D^2, b)$ を考えて, 連続写像 $r : D^2 \rightarrow S^1$ で, $r \circ i = \text{id}_{S^1}$ となるものが存在しないことを示せ。

演習問題3 - 2 . $D^2 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ とし, $f : D^2 \rightarrow D^2$ を連続写像とする。 $f(x, y) = (x, y)$ となる点 (x, y) が存在すること (ブラウアーの固定点定理) を以下の手順で示せ。

すべての $(x, y) \in D^2$ に対し, $f(x, y) \neq (x, y)$ と仮定する。 $(x', y') \in S^1 = \partial D^2 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ を, (x', y') , (x, y) , $f(x, y)$ が直線上にこの順序で並ぶようにとる。写像 $r(x, y) = (x', y')$ について演習問題3 - 1の結果をつかう。

位相空間 X, Y に対して, 連続写像 $f : X \rightarrow Y, g : Y \rightarrow X$ であって, $f \circ g \simeq \text{id}_Y, g \circ f \simeq \text{id}_X$ を満たすものがあるとき, X と Y は同じホモトピー型を持つといい, $X \simeq Y$ と書く。 X と Y はホモトピー同値であるとも言う。 f (または g) のことをホモトピー同値 (写像) と呼び, このとき g (または f) を f (または g) のホモトピー逆写像と呼ぶ。

演習問題3 - 3 . 位相空間の間のホモトピー同値という関係 \simeq は位相空間全体の上で同値関係であることを示せ。

注意 : 同値関係という概念は, 集合のクラスに対しても意味を持つ。

演習問題3 - 4 .

$$X = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid ((x^2 + y^2)^{1/2} - 2)^2 + z^2 = 1\} \\ \cup \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid y = 0, (x - 2)^2 + z^2 \leq 1\} \\ Y = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid (x + 1)^2 + y^2 + z^2 = 1\} \\ \cup \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid y = 0, (x - 1)^2 + z^2 = 1\}$$

とする。 X, Y を図示せよ。 X, Y はホモトピー同値であることを示せ。写像の構成が難しければ写像の構成の仕方を図によって説明せよ。

演習問題3 - 5 .

- (1) $\mathbf{R}^2 - \{\text{two points}\}$ と $S^1 \times S^1 - \{\text{one point}\}$ は同じホモトピー型を持つことを示せ。

(ヒント : とともに $S^1 \vee S^1$ と同じホモトピー型を持つことを示せ。 $S^1 \vee S^1$ は2つの基点をもつ円周の基点を同一視して得られる空間である。)

(2) ジョルダンの閉曲線定理を用いて $\mathbf{R}^2 - \{\text{two points}\}$ と $S^1 \times S^1 - \{\text{one point}\}$ は同相でないことを示せ。

- ジョルダンの閉曲線定理とは「平面上の単純閉曲線（円周の連続な単射による像） Γ の補集合は2つの弧状連結成分 U, V をもち、 $\Gamma = \overline{U} \setminus U, \Gamma = \overline{V} \setminus V$ 」 というものである。

問題3 - 6 . 写像 $f : S^1 \cong \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{R}^3$ を

$$f(\theta) = (\cos(2\theta)\{2 + \cos(3\theta)\}, \sin(2\theta)\{2 + \cos(3\theta)\}, \sin(3\theta))$$

で定める。

- (1) 像 $f(S^1)$ を図示せよ。
- (2) $\mathbf{R}^3 - f(S^1)$ の基本群を求めよ。
- (3) この群のアーベル化を求めよ。

(ヒント: $\{(x, y, z) \mid ((x^2 + y^2)^{1/2} - 2)^2 + z^2 = 1\}$ という曲面に注目する。ファン・カンペンの定理を使う。)

時間のある人は次の問題を考えてみてください。

上の問題の $\mathbf{R}^3 - f(S^1)$ の基本群が \mathbf{Z} と異なること、つまり可換群でないことはどうすればわかるか。

問題3 - 7 . n 次元立方体 I^n から m 次元ユークリッド空間 \mathbf{R}^m の開集合 U への連続写像 $f : I^n \rightarrow U$ を考える。この f に対し、ある実数 ε が存在し、 $g : I^n \rightarrow U$ が $\sup_{t \in I^n} \|g(t) - f(t)\| < \varepsilon$ を満たす連続写像ならば、 $(1-s)g(t) + sf(t) \in U$ ($s \in [0, 1]$) となることを示せ。

問題3 - 8 . n 次元立方体 I^n について、その境界を ∂I^n とする。 m 次元ユークリッド空間 \mathbf{R}^m の開集合 U とその上の点 $b \in U$ について、写像 $f : (I^n, \partial I^n) \rightarrow (U, b)$ を考える。 $f : (I^n, \partial I^n) \rightarrow (U, b)$ とホモトピックな滑らかな写像 $g : (I^n, \partial I^n) \rightarrow (U, b)$, $f : (I^n, \partial I^n) \rightarrow (U, b)$ とホモトピックな区分線形な写像 $\bar{f} : (I^n, \partial I^n) \rightarrow (U, b)$ が存在することを示せ。ただし、区分線形な写像とは、 I^n を n 単体に分割できて、各単体の上では1次写像（アフィン写像）であるような連続写像のことである。

問題3 - 9 . (1) $k < n - 1$ ならば、 $\pi_k(\mathbf{R}^n \setminus \{0\}, b_{\mathbf{R}^n \setminus \{0\}}) \cong 0$ であることを示せ。
(2) $k < n$ ならば、 $\pi_k(S^n, b_{S^n}) \cong 0$ であることを示せ。