資料.

群の表示

群を生成元と関係式で表示する方法を説明しよう。

群 G は、集合 G で、演算 $G \times G \longrightarrow G$ が指定され、それが、結合律を満たし、単位元 $\mathbf{1}$、各元 g の逆元 g^{-1} が存在するというものである。群 G の部分集合 S が、任意の G の元は S の元とその逆元の積で書かれるという性質をもつとき、S を生成元の集合と呼ぶ。このとき、G の元は S の元をアルファベットとする語（S の元の語（ワード））で表されるという。2 つの S の元の語 w_1, w_2 の積は、語を並べた語 $w_1 w_2$ で表される。2 つの語がいつ等しいか、すなわち、G の同じ元を表すかを表せば、群が表示できることになる。$w = s_1 \cdots s_k$ $(s_i \in S,\, i = 1, \ldots, k)$ に対して、$w^{-1} = {s_k}^{-1} \cdots {s_1}^{-1}$ とすると、$w_1 = w_2$ という関係式は、$w_1 {w_2}^{-1} = \mathbf{1}$ と書かれるから、どのような語が、$\mathbf{1}$ を表すかを指定すればよい。$\mathbf{1}$ を表す語の逆の語、2 つの語の積や、共役の語は、$\mathbf{1}$ を表すから、このことを勘案して、できるだけ少ない関係式、すなわち、$\mathbf{1}$ を表すアルファベットを与えて、群を表示することを考える。このとき、自明な関係式 $s_i {s_i}^{-1} = {s_i}^{-1} s_i = \mathbf{1}$ は、明示しなくても成立していると考える。

例えば、S が 1 つの元 a からなり、関係式が自明なものしかないときには、群の元は $\mathbf{1} = a^0,\, k \in \mathbf{Z}_{>0}$ に対して、$a^k = \overbrace{a \cdots a}^{k},\, a^{-k} = (a^k)^{-1}$ からなり、$a^j a^k = a^{j+k}$ という計算法則を持つから、無限巡回群 $\mathbf{Z}$ と同型な群を表す。

S が k 個の元 $s_1, \ldots, s_k$ からなり、関係式が自明なものしかないときには、群の元は、$\mathbf{1}$ または ${s_{i_1}}^{e_1} \cdots {s_{i_j}}^{e_j}$ で $e_\ell = \pm 1$ $(\ell = 1, \ldots, j)$ であり、隣り合うアルファベットについて $s_{i_\ell} = s_{i_{j+\ell}}$ かつ $e_\ell + e_{\ell+1} = 0$ となる ℓ がないという語の全体となる。これらを簡約された語と呼ぶ。2 つの簡約された語の積は、それらを並べて、自明な関係式で簡約したものとなる。この群を k 元生成自由群と呼ぶ。

群 G の生成元の集合を S とし、$\mathbf{1}$ を表す関係式が、S の元の語の集合 R から、逆、積、共役を取ることで得られるとする。k 元生成自由群と同様に定義される S の元で生成される自由群を F_S と書くと、R は F_S の部分集合であるが、N_R を R を含む F_S の正規部分群で最小のものとする。このとき、G は商の群 F_S/N_R と同型となる。商の群 F_S/N_R を $\langle S \mid R \rangle$ と書く。

例えば、$\mathbf{Z}/3\mathbf{Z} = \langle a \mid a^3 \rangle,\, \mathbf{Z}^2 = \langle a, b \mid aba^{-1}b^{-1} \rangle$ と書かれる。

定義 (自由積，融合積)
2つの群 G_1, G_2 に対し、G_1 と G_2 の自由積 $G_1 * G_2$ は、$G_1 = \langle S_1 \mid R_1 \rangle$, $G_2 = \langle S_2 \mid R_2 \rangle$ とするとき、

$$G_1 * G_2 = \langle S_1 \sqcup S_2 \mid R_1 \sqcup R_2 \rangle$$

で表される群である。

群 G_{12} からの準同型 $i_1 : G_{12} \longrightarrow G_1$, $i_2 : G_{12} \longrightarrow G_2$ が与えられたとき、融合積 $G_1 \underset{G_{12}}{*} G_2$ は、

$$G_1 \underset{G_{12}}{*} G_2 = \langle S_1 \sqcup S_2 \mid R_1 \sqcup R_2 \sqcup \{ i_1(g_{12}) \bigl(i_2(g_{12})\bigr)^{-1} \mid g_{12} \in G_{12} \} \rangle$$

で表される群である。

例えば2元生成自由群は $\langle a, b \rangle = \mathbf{Z} * \mathbf{Z}$ である。$G = \langle S \mid R \rangle$ に対し、S, R の元で生成される自由群 F_S, F_R に対して、$i_1 : F_R \longrightarrow F_S$ を包含写像から誘導される準同型, $i_2 : F_R \longrightarrow \{\mathbf{1}\}$ を自明な準同型とするとき、$G = \langle S \mid R \rangle = F_S \underset{F_R}{*} \{\mathbf{1}\}$ である。

ファン・カンペンの定理の証明

$X = U_1 \cup U_2$, U_1, U_2 は開集合で、U_1, U_2, $U_{12} = U_1 \cap U_2$ は弧状連結とする。基点 $b \in U_{12} = U_1 \cap U_2$ をとり、包含写像を $i_1 : U_{12} \longrightarrow U_1$, $i_2 : U_{12} \longrightarrow U_2$ とし、これにより誘導される準同型写像を $i_{1*} : \pi_1(U_{12}, b) \longrightarrow \pi_1(U_1, b)$, $i_{2*} : \pi_1(U_{12}, b) \longrightarrow \pi_1(U_2, b)$ とする。次の群の完全列があることを示す。

$$1 \longrightarrow \mathcal{N} \longrightarrow \pi_1(U_1, b) * \pi_1(U_2, b) \longrightarrow \pi_1(X, b) \longrightarrow 1$$

ここで、$\pi_1(U_1, b) * \pi_1(U_2, b)$ は群の自由積、$\mathcal{N}$ は、$\pi_1(U_1, b) * \pi_1(U_2, b)$ の部分集合 $\{i_{1*}\alpha(i_{2*}\alpha)^{-1} \mid \alpha \in \pi_1(U_{12}, b)\}$ を含む最小の正規部分群である。（このように定義される群は融合積と呼ばれ、$\pi_1(U_1, b) \underset{\pi_1(U_{12},b)}{*} \pi_1(U_2, b)$ と書かれる。）

証明。

(1)　$f : ([0,1], \{0,1\}) \longrightarrow (U_1 \cup U_2, b)$ に対し、$f^{-1}(U_1)$, $f^{-1}(U_2)$ に対するルベーグ数を考えると、十分大きな自然数 N に対し、$[0,1]$ 区間を N 等分すると、$[\dfrac{m-1}{N}, \dfrac{m}{N}]$ の像は U_1 または U_2 に含まれる。$f(\dfrac{m}{N})$ が $U_1 \setminus U_{12}$, $U_2 \setminus U_{12}$, U_{12} の点の時、$f(\dfrac{m}{N})$ と b を結ぶ曲線 γ_m を U_1, U_2, U_{12} 内に取る。$f|[\dfrac{m-1}{N}, \dfrac{m}{N}] = f_m$ とおいて、

$$f \simeq f_1 \natural \overline{\gamma_1} \natural \gamma_1 \natural f_2 \natural \overline{\gamma_2} \natural \gamma_2 \natural f_3 \natural \overline{\gamma_3} \natural \dots \natural \gamma_{N-1} \natural f_N$$

とすると $\gamma_{m-1} \natural f_m \natural \overline{\gamma_m}$ は U_1 または U_2 のループである。これから自由積からの全射があることがわかる。

(2)　自由積として得られた $f : ([0,1], \{0,1\}) \longrightarrow (U_1 \cup U_2, b)$ が b への定値写像にホモトピックとすると、写像 $F : [0,1]^2 \longrightarrow U_1 \cup U_2$ で、$F(1,t) = f(t)$, $F(0,t) = b$, $F(s,0) = F(s,1) = b$ をみたすものが存在する。$F^{-1}(U_1)$, $F^{-1}(U_2)$ についてのルベーグ数を考えると、十分大きな自然数 N に対し、正方形 $[0,1]^2$ を N^2 等分すると、$[\dfrac{m-1}{N}, \dfrac{m}{N}] \times [\dfrac{n-1}{N}, \dfrac{n}{N}]$ の像は U_1 または U_2 に含まれる。$F(\dfrac{m}{N}, \dfrac{n}{N})$ が $U_1 \setminus U_{12}$, $U_2 \setminus U_{12}$, U_{12} の点の時、$F(\dfrac{m}{N}, \dfrac{n}{N})$ と b を結ぶ曲線 γ_{mn} を U_1, U_2, U_{12} 内に取る。この γ_{mn} を使って、F をホモトピーで変形して、$G(\dfrac{m}{N}, \dfrac{n}{N}) = b$ となる写像 $G : [0,1]^2 \longrightarrow U_1 \cup U_2$ をつくる。$G(1,t) = f_{N1} \natural \dots \natural f_{NN}$ の f_{Nn} は、$\pi_1(U_1, b)$ または $\pi_1(U_2, b)$ の元を表すが、この書き方は、もとの f を $\pi_1(U_1, b)$ または $\pi_1(U_2, b)$ の関係式で書き換えたものである。（$[f]$ と自由積の中で同じ元である。）

小正方形は U_1, U_2 のいずれかに写されるから、隣り合う小正方形の共通部分となる辺は、小正方形がともに U_1 または U_2 に写されれば、U_1 または U_2 に写され、一方が U_1、他方が U_2 に写されるときには、U_{12} に写される。このとき、この辺に対応する $\alpha \in \pi_1(U_{12}, b)$ をとると、U_1 に写る正方形の側では、この元を $\pi_1(U_1, b)$ の元と見た $i_{1*}\alpha$ と書き、U_2 に写る正方形の側では、$\pi_1(U_2, b)$ の元と見た $i_{2*}\alpha$ と書いているはずである。

図のように、辺からの写像に、それぞれの小正方形の側から名前が付けられているとする。f_{mn}, g_{mn}, h_{mn}, k_{mn} は、それぞれ小正方形の写る先の $\pi_1(U_1, b)$ または $\pi_1(U_2, b)$ の元を表す。

小正方形によるホモトピーによって、$f_{mn} \simeq \overline{k_{m,n-1}} \natural g_{m-1,n} \natural h_{mn}$ であるが、これは小正方形が写される U_1, U_2 の基本群 $\pi_1(U_1,b)$, $\pi_1(U_2,b)$ のなかの関係式である。一方、$h_{m,n}\natural\overline{k_{m,n}}$, $\overline{f_{m,n}}\natural g_{m,n}$ は、その辺の両側が、ともに U_1 または U_2 に写されていれば、$\pi_1(U_1,b)$, $\pi_1(U_2,b)$ のなかの関係式であるが、その辺の一方が U_1、他方が U_2 に写されるときには、その辺のあらわす $\alpha \in \pi_1(U_{12},b)$ を使って $i_{1*}\alpha(i_{2*}\alpha)^{-1}$ の形にかかれている。

次のように変形すると、$f_{N1}\natural f_{N2}\natural\ldots\natural f_{NN}$ は $g_{N-1,1}\natural g_{N-1,2}\natural\ldots\natural g_{N-1,N}$ に $\mathcal{N}$ の元を掛けたものである事がわかる。

$$
\begin{aligned}
& f_{N1}\natural f_{N2}\natural\ldots\natural f_{NN} \\
\simeq\ & (g_{N-1,1}\natural h_{N1})\natural(\overline{k_{N1}}\natural g_{N-1,2}\natural h_{N2})\natural\ldots\natural(\overline{k_{N,N-1}}\natural g_{N-1,N}) \\
=\ & g_{N-1,1}\natural(h_{N1}\natural\overline{k_{N1}})\natural g_{N-1,2}\natural h_{N2}\natural\ldots\natural(h_{N,N-1}\natural\overline{k_{N,N-1}})\natural g_{N-1,N} \\
\simeq\ & g_{N-1,1}\natural g_{N-1,2}\natural\ldots\natural g_{N-1,N} \\
& \quad \natural\overline{g_{N-1,2}\natural\ldots\natural g_{N-1,N}}\natural(h_{N1}\natural\overline{k_{N1}})\natural g_{N-1,2}\natural\ldots\natural g_{N-1,N} \\
& \quad \natural\overline{g_{N-1,3}\natural\ldots\natural g_{N-1,N}}\natural\ldots \\
& \quad \natural\overline{g_{N-1,N}}\natural(h_{N,N-1}\natural\overline{k_{N,N-1}})\natural g_{N-1,N}
\end{aligned}
$$

さらに次のように変形すると、$g_{N-1,1}\natural g_{N-1,2}\natural\ldots\natural g_{N-1,N}$ は $f_{N-1,1}\natural f_{N-1,2}\natural\ldots\natural f_{N-1,N}$ に $\mathcal{N}$ の元を掛けたものである事がわかる。

$$
\begin{aligned}
& g_{N-1,1}\natural g_{N-1,2}\natural\ldots\natural g_{N-1,N} \\
\simeq\ & f_{N-1,1}\natural f_{N-1,2}\natural\ldots\natural f_{N-1,N} \\
& \quad \natural\overline{f_{N-1,2}\natural\ldots\natural f_{N-1,N}}(\overline{f_{N-1,1}}\natural g_{N-1,1})\natural f_{N-1,2}\natural\ldots\natural f_{N-1,N} \\
& \quad \natural\overline{f_{N-1,3}\natural\ldots\natural f_{N-1,N}}(\overline{f_{N-1,2}}\natural g_{N-1,2})\natural f_{N-1,3}\natural\ldots\natural f_{N-1,N}\natural\ldots \\
& \quad \natural(\overline{f_{N-1,N}}\natural g_{N-1,N})
\end{aligned}
$$

これを続けると、$g_{1,1}\natural g_{1,2}\natural\ldots\natural g_{1,N}$ は b への定値写像で単位元を表すから、もとの元は $\mathcal{N}$ の元であったことがわかる。