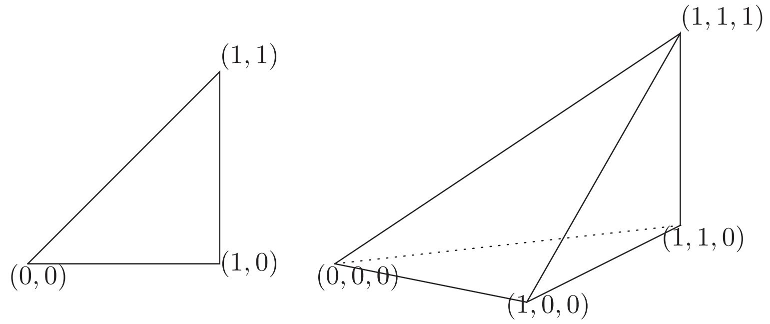

図 13: 2 次元標準単体 Δ^2, 3 次元標準単体 Δ^3

位相空間のホモロジー群の公理を満たすホモロジー理論の存在を示す。

34　特異単体複体

X を位相空間とする。まず標準単体 Δ^k を

$$\Delta^k = \{(x_1, \ldots, x_k) \in \boldsymbol{R}^k \mid 1 \geqq x_1 \geqq \cdots \geqq x_k \geqq 0\}$$

により定義する。

定義 34.1 連続写像 $\sigma : \Delta^k \longrightarrow X$ を X の k 次元特異単体あるいは特異 k 単体 *(singular k-simplex)* と呼ぶ。X の特異 k 単体を基底とする自由加群を $S_k(X)$ と書く。$S_k(X)$ の元は有限和 $c = \sum a_i c_i$ であり、k 次元特異チェインあるいは特異 k チェイン *(singular k-chain)* と呼ばれる。

X が単体複体ならば、k 単体が像であるような写像はもちろん特異 k 単体である。感覚的には、X に対して考えられるすべての単体分割を同時に考えている。特異 k 単体を Δ^k の面に制限したものは、特異 $k-1$ 単体と考えられる。これを定式化して境界準同型 $S_k(X) \longrightarrow S_{k-1}(X)$ を定義するために、次の写像を用意する。

$i = 0, \ldots, k$ に対して，$\varepsilon_i : \Delta^{k-1} \longrightarrow \Delta^k$ を次で定義する．図 14 参照.

$$\begin{aligned}
\varepsilon_0(x_1, \ldots, x_{k-1}) &= (1, x_1, \ldots, x_{k-1}), \\
\varepsilon_i(x_1, \ldots, x_{k-1}) &= (x_1, \ldots, x_i, x_i, \ldots, x_{k-1}) \quad (0 < i < k), \\
\varepsilon_k(x_1, \ldots, x_{k-1}) &= (x_1, \ldots, x_{k-1}, 0)
\end{aligned}$$

$\varepsilon_i : \Delta^{k-1} \longrightarrow \Delta^k$ はアフィン写像で、$v_i = \sum_{j=1}^{i} e_j$ について、$\varepsilon_i(v_\ell) = \begin{cases} v_\ell & (\ell < i) \\ v_{\ell+1} & (\ell \geqq i) \end{cases}$ を満たしている。

特異 k 単体 $\sigma : \Delta^k \longrightarrow M$ の**境界** $\partial\sigma$ を $\partial\sigma = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \sigma \circ \varepsilon_i$ により定義する.

この境界の定義により境界準同型 $\partial : S_k(X) \longrightarrow S_{k-1}(X)$ が定義される。

【問題 34.2】 $0 \leqq i \leqq j \leqq k-1$ のとき、$\varepsilon_i \circ \varepsilon_j = \varepsilon_{j+1} \circ \varepsilon_i$ を示し、$S_{k-2}(X) \xleftarrow{\partial} S_{k-1}(X) \xleftarrow{\partial} S_k(X)$ について $\partial \circ \partial = 0$ を示せ。

定義 34.3 特異単体複体 $S_*(X)$ のホモロジー群を特異ホモロジー群と呼び、$H_*(X)$ で表す。

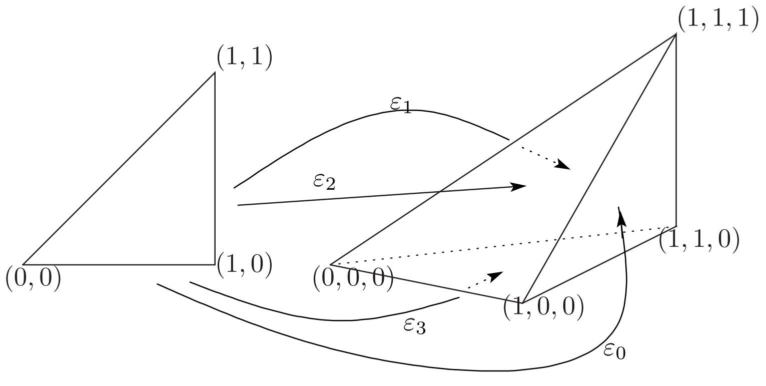

図 14: $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 : \Delta^2 \longrightarrow \Delta^3$

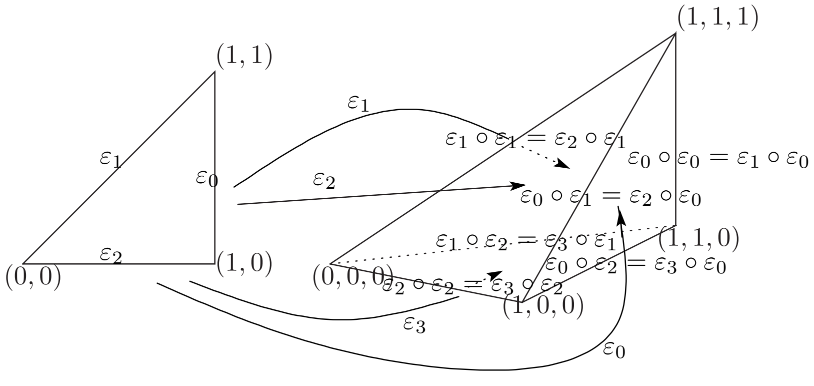

図 15: $\varepsilon_i \circ \varepsilon_j = \varepsilon_{j+1} \circ \varepsilon_i \ (0 \leqq i \leqq j \leqq k-1)$

空間対 (X,A) に対しては, 特異単体複体 $S_*(A)$, $S_*(X)$ が構成されるが、$S_*(A)$ は、$S_*(X)$ の部分チェイン複体である。$S_k(X,A)=S_k(X)/S_k(A)$ として、$S_k(X,A)$ はチェイン複体となる。

定義 34.4 チェイン複体 $S_k(X,A)$ のホモロジー群を空間対 (X,A) の特異ホモロジー群と呼び、$H_*(X,A)$ と書く。

チェイン写像の短完全系列 $0 \longrightarrow S_k(A) \xrightarrow{i_*} S_k(X) \xrightarrow{j_*} S_k(X,A) \longrightarrow 0$ から、空間対のホモロジー群の完全系列が得られる。

34.1 特異ホモロジー群の関手性と次元公理

$f: X \longrightarrow Y$, $f_*: S_*(X) \longrightarrow S_*(Y)$ を $S_k(X)$ の生成元 $\sigma: \Delta^k \longrightarrow X$ に対し、$S_k(Y)$ の生成元 $f_*(\sigma)=f\circ\sigma$ を対応させることで定義する。

$$\begin{aligned}\partial(f_*\sigma)=\partial(f\circ\sigma)&=\sum_{i=0}^{k}(-1)^i(f\circ\sigma)\circ\varepsilon_i\\&=\sum_{i=0}^{k}(-1)^i f\circ(\sigma\circ\varepsilon_i)\\&=f_*(\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\sigma\circ\varepsilon_i)=f_*(\partial\sigma)\end{aligned}$$

だから、f_* はチェイン写像である。チェイン写像 $f_*: S_*(X) \longrightarrow S_*(Y)$ はホモロジー群の準同型 $f_*: H_*(X) \longrightarrow H_*(Y)$ を誘導する。

空間対の間の連続写像 $f:(X,A) \longrightarrow (Y,B)$ は、チェイン写像 $f_*: S_*(X,A) \longrightarrow S_*(Y,B)$ を導き、ホモロジー群の準同型 $f_*: H_*(X,A) \longrightarrow H_*(Y,B)$ を誘導する。

$\sigma: \Delta^k \longrightarrow X$, $f: X \longrightarrow Y$, $g: Y \longrightarrow Z$ に対して、$(g\circ f)\circ\sigma = g\circ(f\circ g)$ だから、チェイン写像 $f_*: S_*(X) \longrightarrow S_*(Y)$, $g_*: S_*(Y) \longrightarrow S_*(Z)$ $(g\circ f)_*: S_*(X) \longrightarrow S_*(Z)$ について $(g\circ f)_* = g_*\circ f_*$ である。従って、ホモロジー群の準同型 $f_*: H_*(X) \longrightarrow H_*(Y)$, $g_*: H_*(Y) \longrightarrow H_*(Z)$ $(g\circ f)_*: H_*(X) \longrightarrow H_*(Z)$ について、$(g\circ f)_* = g_*\circ f_*$ である。

この議論は、空間対 (X,A), (Y,B), (Z,C) の間の写像についても全く同様に成立する。

以上で、特異ホモロジー群の関手性が分かった。

１点からなる空間 $\{p\}$ について、$S_k(\{p\}) \cong \boldsymbol{Z}$ で、生成元は定値写像 $c_p^k: \Delta^k \longrightarrow \{p\}$ である。

$$S_*(\{p\}): 0 \longleftarrow \boldsymbol{Z}c_p^0 \xleftarrow{\partial} \boldsymbol{Z}c_p^1 \xleftarrow{\partial} \boldsymbol{Z}c_p^2 \xleftarrow{\partial} \cdots$$

$\partial: S_k(\{p\}) \longrightarrow S_{k-1}(\{p\})$ は、

$$\partial c_p^k = \sum_{i=0}^{k} c_p^k\circ\varepsilon_i = \sum_{i=0}^{k} c_p^{k-1} = \begin{cases}0 & (k\text{ が奇数または }k=0)\\ c_p^{k-1} & (k\text{ が 2 以上の偶数})\end{cases}$$

により計算され、$\partial: S_k(\{p\}) \longrightarrow S_{k-1}(\{p\})$ は、k が奇数または $k=0$ のとき、零写像、k が 2 以上の偶数のとき同型写像である。従って、$H_k(\{p\}) \cong \begin{cases}\boldsymbol{Z} & (k=0)\\ 0 & (k\neq 0)\end{cases}$ となる。

34.2　特異ホモロジー群のホモトピー不変性

単体複体 K の実現 $|K|$ において、k 単体 $\langle v_0 \cdots v_k\rangle$ はアフィン写像 $\Delta^k \longrightarrow |K|$ で、Δ^k の頂点 $\displaystyle\sum_{j=1}^{i} e_j$ を $|K|$ の点 v_i に写すものと考える。そうすると $\langle v_0 \cdots v_k\rangle \in S_k(|K|)$ である。

$[0,1]\times\Delta^k$ の単体分割 $K_{[0,1]\times\Delta^k}$ について、$P\Delta^k = \displaystyle\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\langle v_0^0 \cdots v_i^0 v_i^1 \cdots v_k^1\rangle \in S_{k+1}([0,1]\times\Delta^k)$ である。$\Delta^k \in S_k(\Delta^k)$ は、恒等写像 id_{Δ^k} のことである。恒等写像 id_{Δ^k} に対し、$\partial\,\mathrm{id}_{\Delta^k} = \displaystyle\sum_{i=0}^{k}\varepsilon_i \in S_{k-1}(\Delta^k)$ となる。$(\partial P + P\partial)\,\mathrm{id}_{\Delta^k} = i_1 - i_0$ である。ここで、$i_1 = \langle v_0^1 \cdots v_k^1\rangle$, $i_0 = \langle v_0^0 \cdots v_k^0\rangle$ は $\{0\}\times\Delta$, $\{0\}\times\Delta$ への包含写像である。

ホモトピックな連続写像 $f_0 \simeq f_1 : X \longrightarrow Y$ に対し、$F : [0,1]\times X \longrightarrow Y$ を f_0 と f_1 の間のホモトピーとする。$\sigma : \Delta^k \longrightarrow X$ に対し、$(f_0)_*\sigma = f_0\circ\sigma$, $(f_1)_*\sigma = f_1\circ\sigma \in S_k(Y)$ が定まっている。

$$P_F(\sigma) = F_*(\mathrm{id}_{[0,1]}\times\sigma)_* P\,\mathrm{id}_{\Delta^k}$$

とおく。

$$P_F(\sigma\circ\varepsilon_i) = F_*(\mathrm{id}_{[0,1]}\times(\sigma\circ\varepsilon_i))_* P\,\mathrm{id}_{\Delta^{k-1}} = F_*(\mathrm{id}_{[0,1]}\times\sigma)_* P\varepsilon_i$$

に注意すると、

$$\begin{aligned}
\partial P_F(\sigma) + P_F(\partial\sigma) &= \partial F_*(\mathrm{id}_{[0,1]}\times\sigma)_* P\,\mathrm{id}_{\Delta^k} + P_F\Big(\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\sigma\circ\varepsilon_i\Big)\\
&= F_*(\mathrm{id}_{[0,1]}\times\sigma)_*(\partial P\,\mathrm{id}_{\Delta^k}) + \sum_{i=0}^{k}(-1)^i F_*(\mathrm{id}_{[0,1]}\times\sigma)_* P\varepsilon_i\\
&= F_*(\mathrm{id}_{[0,1]}\times\sigma)_*((\partial P + P\partial)\,\mathrm{id}_{\Delta^k})\\
&= F_*(\mathrm{id}_{[0,1]}\times\sigma)_*(i_1 - i_0)\\
&= f_1\circ\sigma - f_0\circ\sigma\\
&= (f_1)_*\sigma - (f_0)_*\sigma
\end{aligned}$$

34.3　特異ホモロジー群の切除公理

$X = X_1\cup X_2$, X_1, X_2 は開集合とする。$X_{12} = X_1\cap X_2$ として、チェイン写像 $i_* : S_*(X_1, X_{12}) \longrightarrow S_*(X, X_2)$ が存在する。この i_* がホモロジー群の同型 $i_* : H_*(X_1, X_{12}) \longrightarrow H_*(X, X_2)$ を誘導し、対のホモロジー完全系列の連結準同型と可換になることが切除公理の内容である。

単体複体の場合は、$i_* : C_*(K_1, K_{12}) \longrightarrow C_*(K, K_2)$ が同型写像であり、i_* がホモロジー群の同型を誘導することはほとんど自明であったが、$\sigma : \Delta^k \longrightarrow X$ で、X_1, X_2 のどちらにも含まれないものがあるので、証明のためには、$r\circ i_* = \mathrm{id}_{S_*(X_1,X_{12})}$, $i_*\circ r$ と $\mathrm{id}_{S_*(X_1,X_{12})}$ がチェインホモトピックとなるようなチェイン写像 $r : S_*(X, X_2) \longrightarrow S_*(X_1, X_{12})$ を工夫して作る必要がある。

定義のために問題 32.2 の bsd, BSD を用いる。ただし、$b_\sigma \in \sigma$ と考え、$\mathrm{bsd}(\mathrm{id}_{\Delta^k}) \in S_k(\Delta)$, また、$\mathrm{BSD}(\mathrm{id}_{\Delta^k}) \in S_{k+1}(\Delta)$ と考える。

$\sigma : \Delta^k \longrightarrow X$ に対し、σ の重心細分を $\mathrm{bsd}\,\sigma = \sigma_*\,\mathrm{bsd}(\mathrm{id}_{\Delta^k})$ で定義する。

Δ^k の開被覆 $\{\sigma^{-1}(X_1), \sigma^{-1}(X_2)\}$ のルベーグ数を考えると、十分大きな m をとると $\mathrm{bsd}^m\,\sigma$ の各特異単体の像が X_1 または X_2 に含まれることがわかる。このような m の最小のものを m_σ とおく。

$A\sigma = \mathrm{BSD}\,\sigma + \cdots + \mathrm{BSD}\,\mathrm{bsd}^{m_\sigma - 1}\,\sigma$ を考える。

$\partial A\sigma + A\partial\sigma + \sigma$ に現れる特異単体は、X_1 または X_2 に像を持つ。実際、特異単体 τ が X_1 または X_2 に像をもつならば、$\mathrm{BSD}\,\tau$ に現れる特異単体は、X_1 または X_2 に像を持つ。$\tau \prec \sigma$ に対して、$m_\tau \leqq m_\sigma$ だから、

$$\begin{aligned}\partial A\sigma + A\partial\sigma + \sigma &= \mathrm{bsd}^{m_\sigma}\,\sigma \\ &\qquad + \sum_{i=0}^{k}(-1)^i(\mathrm{BSD}\,\mathrm{bsd}^{m_{\partial_i\sigma}}\,\partial_i\sigma + \cdots + \mathrm{BSD}\,\mathrm{bsd}^{m_\sigma - 1}\,\partial_i\sigma)\end{aligned}$$

であるが、ここに現れる特異単体は、X_1 または X_2 に像を持つ。

そこで、$r\sigma = \partial A\sigma + A\partial\sigma + \sigma$ と定義する。このとき、

$$\partial(r\sigma) - r(\partial\sigma) = \partial(\partial A\sigma + A\partial\sigma + \sigma) - (\partial A(\partial\sigma) + A\partial(\partial\sigma) + \partial\sigma) = 0$$

であるから、r はチェイン写像である。σ の像が X_1 に含まれれば、$m_\sigma = 0$ だから、A の定義により、$r \circ i_* = \mathrm{id}_{S_*(X_1, X_{12})}$ である。また、$i_* \circ r(\sigma) - \sigma = \partial A\sigma + A\partial\sigma$ だから、$i_* \circ r$ と $\mathrm{id}_{S_*(X_1, X_{12})}$ はチェインホモトピックである。

以上で、$i_* : H_*(X_1, X_{12}) \longrightarrow H_*(X, X_2)$ が同型写像となることが示された。

対のホモロジー完全系列の連結準同型と可換になることは容易に分かる。実際、単体複体の場合と同様に次のチェイン複体とチェイン写像の図式

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & S_*(X_{12}) \arrow[r, "i_*"] \arrow[d] & S_*(X_1) \arrow[r, "j_*"] \arrow[d] & S_*(X_1, X_{12}) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & S_*(X_2) \arrow[r, "i_*"] & S_*(X) \arrow[r, "j_*"] & S_*(X, X_2) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

は可換であるから次の図式は可換となる。

$$\begin{tikzcd} H_k(X_1, X_{12}) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d] & H_{k-1}(X_{12}) \arrow[d] \\ H_k(X, X_2) \arrow[r, "\partial"] & H_{k-1}(X_2) \end{tikzcd}$$

35 問題の解答

【問題 34.2 の解答】 $0 \leqq i \leqq k$, $0 \leqq j \leqq k-1$ について $\varepsilon_i \circ \varepsilon_j$ を考える。$\varepsilon_i \circ \varepsilon_j : \Delta^{k-2} \longrightarrow \Delta^k$ はアフィン写像で、$v_\ell = \sum_{m=1}^{\ell} e_m$ について、

$$i \leqq j \text{ のとき、} (\varepsilon_i \circ \varepsilon_j)(v_\ell) = \begin{cases} v_\ell & (\ell < i) \\ v_{\ell+1} & (i \leqq \ell < j) \\ v_{\ell+2} & (j \leqq \ell) \end{cases},$$

$$j < i \text{ のとき、} (\varepsilon_i \circ \varepsilon_j)(v_\ell) = \begin{cases} v_\ell & (\ell < j) \\ v_{\ell+1} & (j \leqq \ell < i+1) \\ v_{\ell+2} & (i+1 \leqq \ell) \end{cases}$$

である。従って、$i \leqq j$ のとき、$\varepsilon_i \circ \varepsilon_j = \varepsilon_{j+1} \circ \varepsilon_i$ となる。

$$\begin{aligned}\partial\partial\sigma &= \sum_{j=0}^{k-1}\sum_{i=0}^{k}(-1)^{i+j}\sigma \circ \varepsilon_i \circ \varepsilon_j \\ &= \sum_{0 \leqq j < i \leqq k}(-1)^{i+j}\sigma \circ \varepsilon_i \circ \varepsilon_j + \sum_{0 \leqq i \leqq j \leqq k-1}(-1)^{i+j}\sigma \circ \varepsilon_i \circ \varepsilon_j \\ &= \sum_{0 \leqq j < i \leqq k}(-1)^{i+j}\sigma \circ \varepsilon_i \circ \varepsilon_j + \sum_{0 \leqq i \leqq j \leqq k-1}(-1)^{i+j}\sigma \circ \varepsilon_{j+1} \circ \varepsilon_i = 0\end{aligned}$$