２００９年度幾何学特別演習 II　問題　　10月７日

演習問題１－１. X, Y を位相空間とする。X が有限個の閉集合 $X_1, \ldots, X_k$ で被覆されているとし、X_i には、X の部分空間としての位相を考える：$X = \bigcup_{i=1}^{k} X_i$.
写像 $f : X \longrightarrow Y$ が連続であることと、$i = 1, \ldots, k$ に対し、$f|X_i : X_i \longrightarrow Y$ が連続であることは同値であることを示せ。

演習問題１－２（ホモトピー群の定義）. 閉区間 $[0,1]$ を I で表す。n 次元立方体 $I^n = \overbrace{I \times \cdots \times I}^{n} = [0,1]^n$ の内部は、開区間 $(0,1)$ の直積 $(0,1)^n$ であり、境界は $\partial I^n = [0,1]^n \setminus (0,1)^n$ である。基点付きの位相空間 (X, b_X) に対し、空間対 $(I^n, \partial I^n)$ からの連続写像の全体 $\mathrm{Map}((I^n, \partial I^n), (X, b_X))$ を考える。
f_1, $f_2 \in \mathrm{Map}((I^n, \partial I^n), (X, b_X))$ に対し、$f_1 \natural f_2$ を次で定義する。

$$(f_1 \natural f_2)(t_1, t_2, \ldots, t_n) = \begin{cases} f_1(2t_1, t_2, \ldots, t_n) & \text{if} \quad t_1 \in [0, \frac{1}{2}] \\ f_2(2t_1 - 1, t_2, \ldots, t_n) & \text{if} \quad t_1 \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

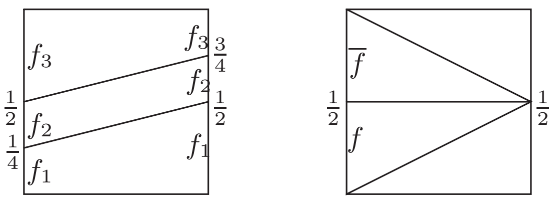
空間対の写像のホモトピー類の集合 $[(I^n, \partial I^n), (X, b_X)]$ を $\pi_n(X, b_X)$ と書く。
$\pi_n(X, b_X) = [(I^n, \partial I^n), (X, b_X)]$ の元の演算 $(\alpha_1, \alpha_2) \longmapsto \alpha_1\alpha_2$ を $\alpha_1 = [f_1]$, $\alpha_2 = [f_2]$ となる f_1, f_2 を使って、$\alpha_1\alpha_2 = [f_1 \natural f_2]$ で定義する。

(1) 上の演算が適切に定義されている (well defined) とはどういうことか？　また演算が定義できていることを確かめよ。

(2) この演算について、結合律が成り立つことを示せ（下の左図参照）。

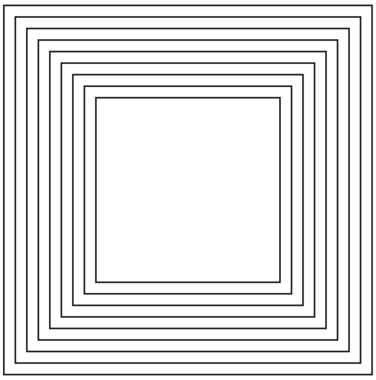
(3) b_X への定値写像を c とする。c のホモトピー類 $[c]$ が上の演算の単位元であることを示せ。

(4) $f \in \mathrm{Map}((I^n, \partial I^n), (X, b_X))$ に対し、$\overline{f}(t_1, t_2, \ldots, t_n) = f(1 - t_1, t_2, \ldots, t_n)$ とおくと、上の演算について、ホモトピー類 $[f]$ の逆元がホモトピー類 $[\overline{f}]$ で与えられることを示せ（下の右図参照）。



問題１－３. $n \geqq 2$ のとき、$\pi_n(X, b_X)$ は可換群であることを示せ。

問題１－４. 弧状連結な空間 X と連続写像 $\gamma : [0,1] \longrightarrow X$ に対し、γ から誘導される同型 $\pi_n(X, \gamma(1)) \longrightarrow \pi_n(X, \gamma(0))$ が存在することを示せ。



問題１－３、１－４のヒント

問題１－５. k を 2 以上の自然数とする。

$$S^{k-1} = \{x \in \mathbf{R}^k \bigm| \|x\| = 1\}, \quad D^k = \{x \in \mathbf{R}^k \bigm| \|x\| \leqq 1\}$$

とする。S^{k-1} は境界をもつ多様体 D^k の境界 ∂D^k である。

(1) 空間対 (D^k, S^{k-1}) と $(I^k, \partial I^k)$ は同相であることを示せ。

(2) 基点つき空間 $(D^k/S^{k-1}, S^{k-1}/S^{k-1})$ は、(S^k, b_{S^k}) と同相であることを示せ。
ヒント:連続写像 $f : (D^k, S^{k-1}) \longrightarrow (S^k, b_{S^k})$ で、$f|(D^k \setminus S^{k-1})$ が: $D^k \setminus S^{k-1}$ から $S^k \setminus b_{S^k}$ への同相写像であるものを作る。

(3) 空間対 $([0,1] \times S^{k-1}, \{0\} \times S^{k-1})$ に対し、基点つき空間 $([0,1] \times S^{k-1}/\{0\} \times S^{k-1}, \{0\} \times S^{k-1}/\{0\} \times S^{k-1})$ は、$(D^k, \{\mathbf{0}\})$ と同相であることを示せ。

(4) 位相空間 X に対し、連続写像 $f : S^{k-1} \longrightarrow X$ に対し、$g : D^k \longrightarrow X$ で $g|\partial D^k = f$ を満たすものが存在することと f がある定値写像とホモトピックであることは同値であることを示せ。

(5) 弧状連結な空間 X とその上の点 b_X を考える。「$\pi_{k-1}(X, b_X)$ が単位群であること」と「任意の写像 $f : S^{k-1} \longrightarrow X$ に対し、$g : D^k \longrightarrow X$ で $g|\partial D^k = f$ を満たすものが存在すること」は同値であることを示せ。