ここでは、まずホモロジー理論の公理を述べる。すべての位相空間、空間対に対して、この公理を満たすホモロジー理論が存在することは、特異ホモロジー理論を定義して、この公理を満たすことを示すことにより示される。しかし、ホモロジー群の多くの計算は公理を知ればすぐにできることが多い。そこで、ホモロジー理論の公理を説明して、容易に導かれる計算をおこなうことをこの章の目的とする。

6　ホモロジー理論の公理

6.1　完全系列

群の完全系列については、説明しているが、今後、ホモロジー群の計算のために特に必要なので、アーベル群の完全系列について説明する。

定義 6.1 (完全系列) アーベル群 A_k $(k = 0, \ldots, n)$ と準同型 $h_k : A_k \longrightarrow A_{k+1}$ $(k = 0, \ldots, n-1)$ からなる系列 $A_0 \xrightarrow{h_0} A_1 \xrightarrow{h_1} \cdots \xrightarrow{h_{n-2}} A_{n-1} \xrightarrow{h_{n-1}} A_n$ が完全系列であるとは $\ker(h_j) = \mathrm{im}(h_{j-1})$ が任意の整数 $j = 1, \ldots n-1$ に対して成立することである。アーベル群 A_k と準同型 $h_k : A_k \longrightarrow A_{k+1}$ の無限列に対しても、完全系列であることは、$\ker(h_j) = \mathrm{im}(h_{j-1})$ が定義されているところで成立することとする。

場合によって、準同型は $h_k : A_k \longrightarrow A_{k-1}$ の方向のこともある。

【例 6.2】　次のことは ker, im の定義、商の群の定義からわかる。

(0)　$0 \longrightarrow A \xrightarrow{h} B$ が完全系列であることと、h が単射準同型であることは同値である。$A \xrightarrow{h} B \longrightarrow 0$ が完全系列であることと、h が全射準同型であることは同値である。

(1)　$0 \longrightarrow A \longrightarrow 0$ が完全系列ならば $A \cong 0$ である。

(2)　$0 \longrightarrow A_0 \xrightarrow{h_0} A_1 \longrightarrow 0$ が完全系列ならば、h_0 は同型写像 $A_0 \cong A_1$ である。

(3)　$0 \longrightarrow A_0 \xrightarrow{h_0} A_1 \xrightarrow{h_1} A_2 \longrightarrow 0$ が完全系列ならば $A_2 \cong A_1/h_0(A_0)$ である。

【問題 6.3】　$0 \longrightarrow A_0 \xrightarrow{h_0} A_1 \xrightarrow{h_1} \boldsymbol{Z}^k \longrightarrow 0$ が完全系列ならば $A_1 \cong A_0 \oplus \boldsymbol{Z}^k$ を示せ。

定義 6.4 2つの完全系列 $A_k \xrightarrow{h_k} A_{k+1}$, $A'_k \xrightarrow{h'_k} A'_{k+1}$ $(k = 0, \ldots, n-1)$ の間の準同型とは、準同型 $f_k : A_k \longrightarrow A'_k$ $(k = 0, \ldots, n)$ で、$h'_k \circ f_k = f_{k+1} \circ h_k$ を満たすもののことである。

$$\begin{array}{ccccccccc}
A_0 & \xrightarrow{h_0} & A_1 & \xrightarrow{h_1} & \cdots & \xrightarrow{h_{n-2}} & A_{n-1} & \xrightarrow{h_{n-1}} & A_n \\
\downarrow{\scriptstyle f_0} & & \downarrow{\scriptstyle f_1} & & & & \downarrow{\scriptstyle f_{n-1}} & & \downarrow{\scriptstyle f_n} \\
A'_0 & \xrightarrow{h'_0} & A'_1 & \xrightarrow{h'_1} & \cdots & \xrightarrow{h'_{n-2}} & A'_{n-1} & \xrightarrow{h'_{n-1}} & A'_n
\end{array}$$

【問題 6.5】　**(ファイブ・レンマ)**　2つの完全系列 $A_k \xrightarrow{h_k} A_{k+1}$, $A'_k \xrightarrow{h'_k} A'_{k+1}$ $(k = 1, \ldots, 4)$ の間の準同型 $f_k : A_k \longrightarrow A'_k$ $(k = 1, \ldots, 5)$ について

f_1, f_2, f_4, f_5 が同型写像ならば f_3 も同型写像であることを示せ。

【解】

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r, "h_1"] \arrow[d, "f_1"] & A_2 \arrow[r, "h_2"] \arrow[d, "f_2"] & A_3 \arrow[r, "h_3"] \arrow[d, "f_3"] & A_4 \arrow[r, "h_4"] \arrow[d, "f_4"] & A_5 \arrow[d, "f_5"] \\
A_1' \arrow[r, "h_1'"] & A_2' \arrow[r, "h_2'"] & A_3' \arrow[r, "h_3'"] & A_4' \arrow[r, "h_4'"] & A_5'
\end{tikzcd}$$

について、まず f_3 が単射であることを示す。$f_3(x_3) = 0$ とすると、$0 = h_3'(f_3(x_3)) = f_4(h_3(x_3))$ で、f_4 は同型だから、$h_3(x_3) = 0$ を得る（　）。上側の系列の完全性から $x_2 \in A_2$ で $x_3 = h_2(x_2)$ となるものがある（　）。ここで、$h_2'(f_2(x_2)) = f_3(h_2(x_2)) = 0$ だから、下側の系列の完全性から $y_1 \in A_1'$ で、$h'(y_1) = f_2(x_2)$ となるものがある（　）。さらに、f_1 は同型だから $x_1 \in A_1$ で $f_1(x_1) = y_1$ となるものがある（　）。ここで $f_2(x_2) = h_1'(f_1(x_1)) = f_2(h_1(x_1))$ で、f_2 は同型だから、$h_1(x_1) = x_2$ である。従って、$x_3 = h_2(x_2) = h_2(h_1(x_1)) = 0$ となる。

$$\begin{array}{ccccccccc}
x_1 & \longmapsto & x_2 & \longmapsto & x_3 & \longmapsto & 0 & \longmapsto & \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
y_1 & \longmapsto & f_2(x_2) & \longmapsto & \underset{\text{仮定}}{0} & \longmapsto & 0 & \longmapsto &
\end{array}$$

全射であることは次のように示される。$y_3 \in A_3'$ について、f_4 が同型だから、$x_4 = f_4{}^{-1}h_3'(y_3) \in A_4$ をとる（　）。f_5 が同型であることと、下側の系列の完全性から、$h_4(x_4) = f_5{}^{-1}h_4'f_4(x_4) = f_5{}^{-1}h_4'h_3'(y_3) = 0$ だから、$x_3 \in A_3$ で $h_3(x_3) = x_4$ となるものがある（　）。$y_3 - f_3(x_3)$ について考える（　）。$h_3'(y_3 - f_3(x_3)) = h_3'(y_3) - h_3'(f_3(x_3)) = h_3'(y_3) - f_4(h_3(x_3)) = h_3'(y_3) - f_4(x_4) = 0$ だから、下側の系列の完全性から、$y_2 \in A_2'$ で、$h_2'(y_2) = y_3 - f_3(x_3)$ となるものがある（　）。$x_2 = f_2{}^{-1}(y_2)$ とおく（　）。ここで、$x_3 + h_2(x_2)$ をとると、

$$\begin{aligned}
f_3(x_3 + h_2(x_2)) &= f_3(x_3) + f_3(h_2(x_2)) = f_3(x_3) + h_2'(f_2(x_2)) \\
&= f_3(x_3) + y_3 - f_3(x_3) = y_3
\end{aligned}$$

となる。

$$\begin{array}{cccccccc}
 & x_2 \longmapsto & h_2(x_2) & & & & \\
\longmapsto & & x_3 & \longmapsto & x_4 & \longmapsto & 0 \\
\downarrow & \downarrow & & & \downarrow & & \downarrow \\
\longmapsto & & y_3 & \longmapsto & h_3'(y_3) & \longmapsto & 0 \\
 & y_2 \longmapsto & y_3 - f_3(x_3) & \longmapsto & 0 & &
\end{array}$$

6.2　公理

まず、ホモロジー理論とは、空間対 (X, A), 非負整数 n に対して、$H_n(X, A)$ というアーベル群がを対応させ、空間対の間の連続写像 $f : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$ に対して、準同型写像 $f_* : H_n(X, A) \longrightarrow H_n(Y, B)$ を対応させる対応であり、次の公理を満たす。$A = \emptyset$ の空間対 $(X, \emptyset)$ を空間 X と考え、$H_n(X, \emptyset)$ を $H_n(X)$ と書く。まず、名前を並べておく。

(F) この対応は共変関手である。

(H) この対応はホモトピー公理を満たす。

(P) 対の完全系列が存在する。この対の完全系列への対応も共変関手となる。

(E) 切除公理を満たす。

(D) 次元公理を満たす。

これらを順に説明しよう。

- 共変関手 (covariant functor)。

  「この対応は共変関手である」とは次のことである。

  (1) 空間対の間の連続写像 $f:(X,A)\longrightarrow(Y,B)$, $g:(Y,B)\longrightarrow(Z,C)$ に対し、その結合 $g\circ f:(X,A)\longrightarrow(Z,C)$ に対応する $(g\circ f)_*:H_n(X,A)\longrightarrow H_n(Z,C)$ について、$(g\circ f)_*=g_*\circ f_*$ が成立する。ここで、$f_*:H_n(X,A)\longrightarrow H_n(Y,B)$, $g_*:H_n(Y,B)\longrightarrow H_n(Z,C)$ である。

  (2) 空間対 (X,A) の恒等写像 $\mathrm{id}_X:(X,A)\longrightarrow(X,A)$ に対して、$(\mathrm{id}_X)_*=\mathrm{id}_{H_n(X,A)}:H_n(X,A)\longrightarrow H_n(X,A)$ である。

  関手性により、(X,A), (Y,B) が同相ならば、各 n についてホモロジー群 $H_n(X,A)$, $H_n(Y,B)$ は同型である。

- ホモトピー公理 (homotopy axion, homotopy invariance).

  「この対応はホモトピー公理を満たす」とは、$f_0,f_1:(X,A)\longrightarrow(Y,B)$ がホモトピックであるとき、$(f_0)_*=(f_1)_*:H_n(X,A)\longrightarrow H_n(Y,B)$ となることである。

  この結果、(X,A) と (Y,B) がホモトピー同値ならば、各 n についてホモロジー群 $H_n(X,A)$, $H_n(Y,B)$ は同型である。

- 対の完全系列 (long exact sequence for space pair)。

  対の完全系列は以下のものである。

  空間対 (X,A) に対して連結準同型と呼ばれる準同型 $\partial_*:H_n(X,A)\longrightarrow H_{n-1}(A)$ が定まり、次の列が完全系列となる。

$$
\begin{array}{lllllll}
 & & & \cdots & \xrightarrow{j_*} & H_{n+1}(X,A) & \\
\xrightarrow{\partial_*} & H_n(A) & \xrightarrow{i_*} & H_n(X) & \xrightarrow{j_*} & H_n(X,A) & \\
\xrightarrow{\partial_*} & H_{n-1}(A) & \xrightarrow{i_*} & H_{n-1}(X) & \xrightarrow{j_*} & H_{n-1}(X,A) & \\
\xrightarrow{\partial_*} & H_{n-2}(A) & \xrightarrow{i_*} & \cdots & & & \\
 & & & \cdots & \xrightarrow{j_*} & H_2(X,A) & \\
\xrightarrow{\partial_*} & H_1(A) & \xrightarrow{i_*} & H_1(X) & \xrightarrow{j_*} & H_1(X,A) & \\
\xrightarrow{\partial_*} & H_0(A) & \xrightarrow{i_*} & H_0(X) & \xrightarrow{j_*} & H_0(X,A) & \longrightarrow 0
\end{array}
$$

  ここで、$i:A\longrightarrow X$ は包含写像、$j:X=(X,\emptyset)\longrightarrow(X,A)$ である。連結準同型は、空間対の間の連続写像 $f:(X,A)\longrightarrow(Y,B)$ に対して、$\partial_*\circ f_*=\partial_*\circ(f|A)_*$ を満たし、空間対の間の連続写像に、完全系列の間の準同型が対応する。

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
\xrightarrow{\partial_*} & H_n(A) & \xrightarrow{i_*} & H_n(X) & \xrightarrow{j_*} & H_n(X,A) & \xrightarrow{\partial_*} & H_{n-1}(A) & \xrightarrow{i_*} \\
& \Big\downarrow{\scriptstyle (f|A)_*} & & \Big\downarrow{\scriptstyle f_*} & & \Big\downarrow{\scriptstyle f_*} & & \Big\downarrow{\scriptstyle (f|A)_*} & \\
\xrightarrow{\partial_*} & H_n(B) & \xrightarrow{i_*} & H_n(Y) & \xrightarrow{j_*} & H_n(Y,B) & \xrightarrow{\partial_*} & H_{n-1}(B) & \xrightarrow{i_*}
\end{array}
$$

- 切除公理 (excision axiom).

  切除公理は次のものである（A, B の条件については、特異ホモロジー理論で満たされるもっと緩やかなものを採用することも多い)。

  $X \supset A \supset B$, A は開集合、B は閉集合とする。このとき、包含写像 $\iota : (X \backslash B, A \backslash B) \longrightarrow (X, A)$ に同型 $\iota_* : H_n(X \backslash B, A \backslash B) \longrightarrow H_n(X, A)$ が対応する。

  この形では使いよいとは限らないので問題 6.9、6.11 を参照。

- 次元公理 (dimension axiom).

  次元公理とは次のものである。

  １点 p からなる位相空間 $\{p\}$ に対して、$H_n(\{p\}) \cong \begin{cases} \boldsymbol{Z} & (n = 0) \\ 0 & (n > 0) \end{cases}$

6.3　公理の帰結

多くの空間 (X, A) に対して，計算は上の性質だけからでもできる。

【例 6.6】　$H_n(X, X) \cong H_n(\emptyset, \emptyset) = H_n(\emptyset) \cong 0$ $(n \geqq 0)$.

空間対 (X, X) に対して、切除公理を用いれば、$H_n(X, X) \cong H_n(\emptyset, \emptyset) = H_n(\emptyset)$ である。対の完全系列、

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & \cdots & \xrightarrow{j_*} & H_{n+1}(X,X) \\
\xrightarrow{\partial_*} & H_n(X) & \xrightarrow{i_*} & H_n(X) & \xrightarrow{j_*} & H_n(X,X) \\
\xrightarrow{\partial_*} & H_{n-1}(X) & \xrightarrow{i_*} & H_{n-1}(X) & \xrightarrow{j_*} & H_{n-1}(X,X) \\
\xrightarrow{\partial_*} & H_{n-2}(X) & \xrightarrow{i_*} & \cdots & &
\end{array}
$$

であるが、$i_* = (\mathrm{id}_X)_*$ で、関手性から、$(\mathrm{id}_X)_* = \mathrm{id}_{H_n(X)}$ であるから、∂_*, j_* はともに零準同型であり、$H_n(X, X) \cong 0$ となる。従って、$H_n(\emptyset) \cong 0$ である。

【例 6.7】　位相空間 X が 1 点 $\{p\}$ とホモトピー同値ならば、ホモトピー公理と次元公理から、$H_n(X) \cong \begin{cases} \boldsymbol{Z} & (n = 0) \\ 0 & (n > 0) \end{cases}$ となる。このとき、任意の写像 $c : \{p\} \longrightarrow X$ は、同型写像 $\boldsymbol{Z} \cong H_0(\{p\}) \longrightarrow H_0(X) \cong \boldsymbol{Z}$ を導く。$x \in X$ に対して $c_x : \{p\} \longrightarrow X$ を x を値とする定値写像とすると、c_x は互いにホモトピックであるから、$(c_x)_*(1)$ は $H_0(X)$ の同じ元である。この元を $H_0(X) \cong \boldsymbol{Z}$ の 1 に対応する生成元とすることにする。

【問題 6.8】　$X = X_1 \cup X_2$, X_1, X_2 は開集合とすると、各 n に対して $H_n(X) \cong H_n(X_1) \oplus H_n(X_2)$ を示せ。

【問題 6.8 の解答】 空間対の間の写像、$(X_1, \emptyset) \longrightarrow (X, X_2)$, $(X_2, X_2) \longrightarrow (X, X_2)$ がそれぞれの完全系列に誘導する準同型写像から、空間対 $(X_1, \emptyset)$ のホモロジー完全系列と空間対 (X_2, X_2) のホモロジー完全系列の直和から空間対 (X, X_2) のホモロジー完全系列への準同型写像が得られる。

$$\begin{array}{ccccccccc}
H_{n+1}(X,X_2) & \xrightarrow{\partial_*} & H_n(X_2) & \xrightarrow{i_*} & H_n(X) & \xrightarrow{j_*} & H_n(X,X_2) & \xrightarrow{\partial_*} & H_{n-1}(X_2) \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
H_{n+1}(X_1) & & H_n(\emptyset) & & H_n(X_1) & & H_n(X_1) & & H_{n-1}(\emptyset) \\
\oplus & \xrightarrow{\partial_*} & \oplus & \xrightarrow{i_*} & \oplus & \xrightarrow{j_*} & \oplus & \xrightarrow{\partial_*} & \oplus \\
H_{n+1}(X_2,X_2) & & H_n(X_2) & & H_n(X_2) & & H_n(X_2,X_2) & & H_{n-1}(X_2)
\end{array}$$

ここで、例 6.6 により、$H_n(X_2,X_2)\cong \mathbf{0}$ であり、$H_n(X_1)\longrightarrow H_n(X,X_2)$ は切除公理により同型である。ファイブ・レンマから $H_n(X)\cong H_n(X_1)\oplus H_n(X_2)$ が得られる。

【問題 6.9】 $X\supset A\supset V$, A は閉集合、V は開集合とする。$X\supset U\supset A\supset V\supset B$ となる開集合 U, 閉集合 B が存在し、包含写像 $(X,A)\longrightarrow (X,U)$, $(X\setminus V,A\setminus V)\longrightarrow (X\setminus B,U\setminus B)$ がホモトピー同値となるとする。

このとき、包含写像 $(X\setminus V,A\setminus V)\longrightarrow (X,A)$ は、同型 $H_*(X\setminus V,A\setminus V)\cong H_*(X,A)$ を導くことを示せ。

【問題 6.9 の解答】 ホモトピー不変性により、$(X,A)\longrightarrow (X,U)$, $(X\setminus V,A\setminus V)\longrightarrow (X\setminus B,U\setminus B)$ は同型 $H_*(X,A)\cong H_*(X,U)$, $H_*(X\setminus V,A\setminus V)\cong H_*(X\setminus B,U\setminus B)$ を誘導する。切除公理により、包含写像 $(X\setminus B,U\setminus B)\longrightarrow (X,U)$ は同型 $H_*(X\setminus B,U\setminus B)\longrightarrow H_*(X,U)$ を誘導する。従って、$H_*(X\setminus V,A\setminus V)\cong H_*(X,A)$ となる。この同型は、包含写像 $(X\setminus V,A\setminus V)\longrightarrow (X\setminus B,U\setminus B)\longrightarrow (X,U)$ の結合により誘導される写像と、包含写像 $(X,A)\longrightarrow (X,U)$ が誘導する同型写像の逆写像の結合であるが、包含写像の間の可換図式

$$\begin{array}{ccc}
(X\setminus V,A\setminus V) & \longrightarrow & (X,A) \\
\downarrow & & \downarrow \\
(X\setminus B,U\setminus B) & \longrightarrow & (X,U)
\end{array}$$

から、包含写像 $(X\setminus V,A\setminus V)\longrightarrow (X,A)$ により誘導される。

【問題 6.10】 $D^n=\{\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^n\mid \|\boldsymbol{x}\|\leqq 1\}$, $S^{n-1}=\{\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^n\mid \|\boldsymbol{x}\|=1\}$ とし、M^n を n 次元多様体とする。$\iota:D^n\longrightarrow M^n$ を、像への微分同相写像とする。すなわち、$D^n\subset\boldsymbol{R}^n$ を含む開集合 U からの微分同相写像 $\widehat{\iota}$ の D^n への制限となる写像とする。このとき、$H_*(D^n,S^{n-1})\cong H_*(M^n,M^n\setminus\mathrm{Int}(D^n))$ を示せ。

【問題 6.10 の解答】 $D^n_{1+\varepsilon}=\{\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^n\mid \boldsymbol{x}\leqq 1+\varepsilon\}$ とおく。$D^n\subset U$ に対し、正実数 $\varepsilon<\dfrac{1}{2}$ で、$D^n_{1+2\varepsilon}\subset U$ となるものがある。$\varphi:[-2,2]\longrightarrow[0,1]$ を $\{-2,2\}$ の近傍で 0, $[-1,1]$ で 1 となる (C^∞ 級) 関数とする。$h_t:D^n_{1+2\varepsilon}\longrightarrow D^n_{1+2\varepsilon}$ を $h_t(\boldsymbol{x})=\dfrac{\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|^{\varphi((\|\boldsymbol{x}\|-1)/\varepsilon)t}}$ $(\boldsymbol{x}\in D^n_{1+2\varepsilon}\setminus D^n_{1-2\varepsilon})$, で定義する。$h_t$ を $M^n\setminus\widehat{\iota}(D^n_{1+2\varepsilon})$ 上では恒等写像であるように拡張して、ホモトピー $h_t:M^n\longrightarrow M^n$ を得る。

$$M^n\supset M^n\setminus\iota(D^n_{1-\varepsilon})\supset M^n\setminus\mathrm{Int}(\iota(D^n))\supset M^n\setminus\iota(D^n)\supset M^n\setminus\mathrm{Int}(\iota(D^n_{1+\varepsilon}))$$

に対して、$(M^n\setminus\mathrm{Int}(\iota(D^n)))\setminus(M^n\setminus\iota(D^n))=\iota(S^{n-1})$ に対して、$h_t|\iota(S^{n-1})=\mathrm{id}_{\iota(S^{n-1})}$, $W=(M^n\setminus\iota(D^n_{1-\varepsilon}))\setminus(M^n\setminus\mathrm{Int}(\iota(D^n_{1+\varepsilon})))=\mathrm{Int}(\iota(D^n_{1+\varepsilon})\setminus\iota(D^n_{1-\varepsilon})$ に対して、$h_t(W)\subset W$, $h_1(W)\subset\iota(S^{n-1})$ をみたすので、問題 6.9 により、$M^n\setminus\iota(D^n)$ は切除可能となり、包含写像 $(\iota(D^n),\iota(S^{n-1}))\longrightarrow(M^n,M^n\setminus\mathrm{Int}(\iota(D^n)))$ はホモロジー群の同型を誘導する。

問題 6.9 よりも、次の問題の状況のほうが、しばしば現れる。この問題からも、問題 6.10 が導かれる。

【問題 6.11】 位相空間 X の閉集合 A とそれを含む開集合 U に対し、ホモトピー $f_t:X\longrightarrow X$ $(t\in[0,1])$ で、$f_0=\mathrm{id}_X$, $f_t|A=\mathrm{id}_A$ $(t\in[0,1])$, $f_t(U)\subset U$, $f_1(U)\subset A$ を満たすものが存在すると仮定する。$i:X\longrightarrow Y$ を像への同相写像で、$i(X)$ は閉集合、$V=X\setminus A$ に対して $i|V$ は Y の開集合

$i(V)$ への同相写像とする。このとき、$i:(X,A)\longrightarrow(Y,Y\setminus i(V))$ は、ホモロジー群の同型を誘導することを示せ。

【問題 6.11 の解答】 まず、包含写像 $j:(X,A)\longrightarrow(X,U)$ は、ホモトピー同値写像となる。実際、$f_1:(X,U)\longrightarrow(X,A)$ について、$j\circ f_1\simeq j\circ f_0=\mathrm{id}:(X,U)\longrightarrow(X,U)$, また、$f_1\circ j\simeq f_0\circ j=\mathrm{id}:(X,A)\longrightarrow(X,A)$ である。従って、$j_*:H_*(X,A)\longrightarrow H_*(X,U)$ は同型写像である。切除公理により、$(V,U\setminus A)\longrightarrow(X,U)$ はホモロジー群の同型 $H_*(V,U\setminus A)\longrightarrow H_*(X,U)$ を誘導する。

$i(V)$ は Y の開集合だから、 同相写像による開集合の像 $i(U\setminus A)$ は Y の開集合である。$i(X)$ は Y の閉集合だから、同相写像による閉集合の像 $i(X\setminus U)$ は Y の閉集合であり、$Y\setminus i(X\setminus U)$ は開集合である。$Y\supset Y\setminus i(X\setminus U)\supset Y\setminus i(V)$ に対して、切除公理により、$(i(V),i(U\setminus A))\longrightarrow(Y,Y\setminus i(X\setminus U))$ は、ホモロジー群の同型 $H_*(i(V),i(U\setminus A))\longrightarrow H_*(Y,Y\setminus i(X\setminus U))$ を誘導する。

$F_t:Y\longrightarrow Y$ を $Y\setminus i(V)$ 上で id, $i(X)$ 上で $F_t(y)=i(f_t(i^{-1}(y)))$ で定義すると、共通部分 $i(A)$ 上で一致し、補題 3.5 により、ホモトピーを与える。このホモトピーを用いて、$j:(Y,Y\setminus i(V))\longrightarrow(Y,Y\setminus i(X\setminus U))$ がホモトピー同値であることが分かる。実際 $F_1\circ j\simeq\mathrm{id}:(Y,Y\setminus i(V))\longrightarrow(Y,Y\setminus i(V))$, $j\circ F_1\simeq\mathrm{id}:(Y,Y\setminus i(X\setminus U))\longrightarrow(Y,Y\setminus i(X\setminus U))$ である。従って、$j_*:H_*(Y,Y\setminus i(V))\longrightarrow H_*(Y,Y\setminus i(X\setminus U))$ は同型である。

従って、可換図式

$$\begin{array}{ccc}
(X,A) & \xrightarrow{i} & (Y,Y\setminus i(V)) \\
\downarrow & & \downarrow \\
(X,U) & & (Y,Y\setminus i(X\setminus U)) \\
\uparrow & & \uparrow \\
(V,U\setminus A) & \xrightarrow{i} & (i(V),i(U\setminus A))
\end{array}$$

から、$i:(X,A)\longrightarrow(Y,Y\setminus i(V))$ は、ホモロジー群の同型を誘導する。

7　球面のホモロジー群

この小節では、次を示す。

命題 7.1 $n\geqq 1$ に対して、$D^n=\{\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^n \mid \|\boldsymbol{x}\|\leqq 1\}$, $S^{n-1}=\{\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^n \mid \|\boldsymbol{x}\|=1\}$ とする。このとき、

$$H_k(D^n,S^{n-1})\cong\begin{cases}\boldsymbol{Z} & (k=n)\\ 0 & (k\neq n)\end{cases},\qquad H_k(S^n)\cong\begin{cases}\boldsymbol{Z} & (k=0,\ n)\\ 0 & (k\neq 0,\ n)\end{cases}$$

2 点 S^0 のホモロジー群については、問題6.8 により、$H_*(S^0)\cong H_*(\{-1\})\oplus H_*(\{1\})$, すなわち、$H_n(S^0)\cong\begin{cases}\boldsymbol{Z}\oplus\boldsymbol{Z} & (n=0)\\ 0 & (n>0)\end{cases}$ がわかっている。

命題 7.1 の証明は次元の低いものから順に決めることで行われる。

最初に $(D^1,S^0)=([-1,1],\{-1,1\})$ を考える。

$$\begin{array}{l}
\xrightarrow{\partial_*} H_2(\{-1,1\}) \xrightarrow{i_*} H_2([-1,1]) \xrightarrow{j_*} H_2([-1,1],\{-1,1\})\\
\xrightarrow{\partial_*} H_1(\{-1,1\}) \xrightarrow{i_*} H_1([-1,1]) \xrightarrow{j_*} H_1([-1,1],\{-1,1\})\\
\xrightarrow{\partial_*} H_0(\{-1,1\}) \xrightarrow{i_*} H_0([-1,1]) \xrightarrow{j_*} H_0([-1,1],\{-1,1\}) \longrightarrow 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
\xrightarrow{\partial_*} \quad 0 \quad \xrightarrow{i_*} \quad 0 \quad \xrightarrow{j_*} H_2([-1,1],\{-1,1\})\\
\xrightarrow{\partial_*} \quad 0 \quad \xrightarrow{i_*} \quad 0 \quad \xrightarrow{j_*} H_1([-1,1],\{-1,1\})\\
\xrightarrow{\partial_*} \boldsymbol{Z}\oplus\boldsymbol{Z} \xrightarrow{i_*} \quad \boldsymbol{Z} \quad \xrightarrow{j_*} H_0([-1,1],\{-1,1\}) \longrightarrow 0
\end{array}$$

この完全系列から $H_k([-1,1],\{-1,1\})\cong 0$ $(k\geqq 2)$ がわかる。

例 6.7 の可縮な空間の H_0 の生成元の決め方により、$i_*(n_1,n_2)=n_1+n_2$ がわかる。従って

$$H_0([-1,1],\{-1,1\})\cong\boldsymbol{0},\quad H_1([-1,1],\{-1,1\})\cong\boldsymbol{Z}.$$

これが、命題 7.1 の (D^1, S^0) の場合である。

同型 $H_1([-1,1],\{-1,1\}) \cong \boldsymbol{Z}$ の定め方、すなわち $H_1([-1,1],\{-1,1\})$ の生成元のとりかたは、$m \in \boldsymbol{Z} \cong H_1([-1,1],\{-1,1\})$ に対し、$\partial_* m = (m,-m)$ とするものと、$\partial_* m = (-m,m)$ とするものの 2 通りある。この一方を定めることは $[-1,1]$ に向きを定めることである。通常 $\overrightarrow{[-1,1]}$ という向きを定めており、$H_1([-1,1],\{-1,1\}) = H_1(D^1,S^0)$ の生成元を $[D^1,S^0]$ とするとき、

$$\partial_*[D^1,S^0] = \langle 1\rangle - \langle -1\rangle = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{Z}\langle -1\rangle \oplus \boldsymbol{Z}\langle 1\rangle = H_0(\{-1,1\})$$

と向きをつける。

さて、$S^1 = \{(x_1,x_2) \in \boldsymbol{R}^2 \mid {x_1}^2 + {x_2}^2 = 1\}$ のホモロジー群を計算しよう。

$S^1_+ = \{x = (x_1,x_2) \in S^1 \mid x_1 \geqq 0\}$, $S^1_- = \{x = (x_1,x_2) \in S^1 \mid x_1 \leqq 0\}$ とする。

空間対 (S^1, S^1_-) のホモロジー完全系列は次のようになる。

$$\begin{array}{l}
\xrightarrow{\partial_*} H_2(S^1_-) \xrightarrow{i_*} H_2(S^1) \xrightarrow{j_*} H_2(S^1,S^1_-) \\
\xrightarrow{\partial_*} H_1(S^1_-) \xrightarrow{i_*} H_1(S^1) \xrightarrow{j_*} H_1(S^1,S^1_-) \\
\xrightarrow{\partial_*} H_0(S^1_-) \xrightarrow{i_*} H_0(S^1) \xrightarrow{j_*} H_0(S^1,S^1_-) \longrightarrow 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
\xrightarrow{\partial_*} 0 \xrightarrow{i_*} H_2(S^1) \xrightarrow{j_*} 0 \\
\xrightarrow{\partial_*} 0 \xrightarrow{i_*} H_1(S^1) \xrightarrow{j_*} \boldsymbol{Z} \\
\xrightarrow{\partial_*} \boldsymbol{Z} \xrightarrow{i_*} H_0(S^1) \xrightarrow{j_*} 0 \longrightarrow 0
\end{array}$$

下の列は上の列のわかっているところを書いたものである。ここで、切除公理（問題 6.10）から $H_1(S^1,S^1_-) \cong H_1(S^1_+, \partial S^1_+)$, また、写像 $(S^1_+, \partial S^1_+) \longrightarrow (D^1,S^0)$ を $(x_1,x_2) \longmapsto x_2$ により定めると、これは同相であるから、$H_1(S^1_+,\partial S^1_+) \cong H_1(D^1,S^0)$ となることを使っている。この完全系列から $H_k(S^1) \cong 0$ $(k \geqq 2)$ がわかる。

$\partial_* : H_1(S^1,S^1_-) \longrightarrow H_0(S^1_-)$ を調べるために包含写像 $(S^1_+,\partial S^1_+) \longrightarrow (S^1,S^1_-)$ が誘導する $(S^1_+,\partial S^1_+)$ の完全系列と (S^1,S^1_-) の完全系列の間の写像を見る。$\partial S^1_+ = \{b_-, b_+\}$ $(b_\pm = (0,\pm 1))$ として、$\partial_*[S^1_+,\partial S^1_+] = \langle b_+\rangle - \langle b_-\rangle$ となっている。例 6.7 により、$\langle b_+\rangle$, $\langle b_-\rangle$ は包含写像 $(S^1_+,\partial S^1_+) \longrightarrow (S^1,S^1_-)$ によって $H_0(S^1_-)$ の同じ生成元に写る。従って、$\partial_*[S^1_+,\partial S^1_+]$ は 0 に写るから、∂_* は零写像となる。

$$\begin{array}{ccccc}
\boldsymbol{Z} & \xrightarrow{(-1,1)} & \boldsymbol{Z} \oplus \boldsymbol{Z} & \xrightarrow{i_*} & \boldsymbol{Z} \\
H_1(S^1_+,\{b_-,b_+\}) & \xrightarrow{\partial_*} & H_0(\{b_-,b_+\}) & \xrightarrow{i_*} & H_0(S^1_+) \\
\downarrow \cong & & \downarrow & & \\
H_1(S^1,S^1_-) & \xrightarrow{\partial_*} & H_0(S^1_-) & & \\
\boldsymbol{Z} & \xrightarrow{\partial_*} & \boldsymbol{Z} & &
\end{array}$$

従って、$H_1(S^1) \cong \boldsymbol{Z}$, $H_0(S^1) \cong \boldsymbol{Z}$ が得られる。これが命題 7.1 の S^1 の場合である。ここで、$H_0(S^1)$ の生成元は、可縮な $H_0(S^1_-)$ の生成元の像であるから $x \in S^1$ について $H_0(\{x\})$ の生成元 $\langle x\rangle$ の像である。あるいは、定値写像 $c_x : \{p\} \longrightarrow S^1$ について $(c_x)_*1$ である。$H_1(S^1)$ の生成元 $[S^1]$ は $j_*[S^1] = [S^1,S^1_-] \longleftarrow [S^1_+,\partial S^1_+]$ により定まっている。

次に (D^2, S^1) を考えよう。ホモロジー完全系列を書き、わかっているところを書き換えると以下のようになる。

$$
\begin{array}{lllll}
\xrightarrow{\partial_*} H_2(S^1) & \xrightarrow{i_*} H_2(D^2) & \xrightarrow{j_*} H_2(D^2, S^1) & & \\
\xrightarrow{\partial_*} H_1(S^1) & \xrightarrow{i_*} H_1(D^2) & \xrightarrow{j_*} H_1(D^2, S^1) & & \\
\xrightarrow{\partial_*} H_0(S^1) & \xrightarrow{i_*} H_0(D^2) & \xrightarrow{j_*} H_0(D^2, S^1) & \longrightarrow & 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lllll}
\xrightarrow{\partial_*} \quad 0 & \xrightarrow{i_*} \quad 0 & \xrightarrow{j_*} H_2(D^2, S^1) & & \\
\xrightarrow{\partial_*} \quad \boldsymbol{Z} & \xrightarrow{i_*} \quad 0 & \xrightarrow{j_*} H_1(D^2, S^1) & & \\
\xrightarrow{\partial_*} \quad \boldsymbol{Z} & \xrightarrow{i_*} \quad \boldsymbol{Z} & \xrightarrow{j_*} H_0(D^2, S^1) & \longrightarrow & 0
\end{array}
$$

$H_0(S^1)$ と $H_0(D^2)$ の生成元は、ともに任意の定値写像による $H_0(\{p\})$ の生成元の像であるから、$H_0(S^1) \xrightarrow{i_*} H_0(D^2)$ は同型であり、この完全系列から $H_k(D^2, S^1) \cong \boldsymbol{Z}$ $(k = 2)$, $H_k(D^2, S^1) \cong 0$ $(k \neq 2)$ がわかる。このとき、$H_2(D^2, S^1)$ の生成元 $[D^2, S^1]$ は、$\partial_*[D^2, S^1] = [S^1] \in H_1(S^1)$ と定める。

次に $S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \boldsymbol{R}^3 \mid {x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 = 1\}$ のホモロジー群を計算する。

$S^2_+ = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in S^2 \mid x_1 \geqq 0\}$, $S^2_- = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in S^2 \mid x_1 \leqq 0\}$ とする。

空間対 (S^2, S^2_-) のホモロジー完全系列は次のようになる。

$$
\begin{array}{lllll}
\xrightarrow{\partial_*} H_2(S^2_-) & \xrightarrow{i_*} H_2(S^2) & \xrightarrow{j_*} H_2(S^2, S^2_-) & & \\
\xrightarrow{\partial_*} H_1(S^2_-) & \xrightarrow{i_*} H_1(S^2) & \xrightarrow{j_*} H_1(S^2, S^2_-) & & \\
\xrightarrow{\partial_*} H_0(S^2_-) & \xrightarrow{i_*} H_0(S^2) & \xrightarrow{j_*} H_0(S^2, S^2_-) & \longrightarrow & 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lllll}
\xrightarrow{\partial_*} \quad 0 & \xrightarrow{i_*} H_2(S^2) & \xrightarrow{j_*} \quad \boldsymbol{Z} & & \\
\xrightarrow{\partial_*} \quad 0 & \xrightarrow{i_*} H_1(S^2) & \xrightarrow{j_*} \quad 0 & & \\
\xrightarrow{\partial_*} \quad \boldsymbol{Z} & \xrightarrow{i_*} H_0(S^2) & \xrightarrow{j_*} \quad 0 & \longrightarrow & 0
\end{array}
$$

下の列は上の列のわかっているところを書いたものである。ここで、切除公理（問題 6.10）から $H_k(S^2, S^2_-) \cong H_k(S^2_+, \partial S^2_+)$ $(k \geqq 0)$, また、写像 $(S^2_+, \partial S^2_+) \longrightarrow (D^2, S^1)$ を、$(x_1, x_2, x_3) \longmapsto (x_2, x_3)$ により定めると、これは同相であるから、$H_k(S^2_+, \partial S^2_+) \cong H_k(D^2, S^1)$ となることを使っている。この完全系列から $H_k(S^2) \cong \boldsymbol{Z}$ $(k = 0,\ 2)$, $H_k(S^2) \cong 0$ $(k \neq 0,\ 2)$ がわかる。$H_0(S^2)$ の生成元は任意の定値写像による $H_0(\{p\})$ の生成元の像であり、$H_2(S^2)$ の生成元 $[S^2]$ は $j_*[S^2] = [S^2, S^2_-] \longleftarrow [S^2_+, \partial S^2_+]$ により定まっている。

これより次元の高いものについての議論は、(D^2, S^1), S^2 の議論と同じである。念のために、書いておくと以下の通りである。

命題 7.1 が n に対して正しいとし、$H_0(S^n)$ の生成元は、任意の定値写像による $H_0(\{p\})$ の生成元の像であるとする。

(D^{n+1}, S^n) のホモロジー群について、空間対 (D^{n+1}, S^n) のホモロジー完全系列を書き、わかっているところを書き換えると以下のようになる。

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & \cdots & \xrightarrow{i_*} & H_{n+2}(D^{n+1}) & \xrightarrow{j_*} & H_{n+2}(D^{n+1}, S^n) & \\
\xrightarrow{\partial_*} & H_{n+1}(S^n) & \xrightarrow{i_*} & H_{n+1}(D^{n+1}) & \xrightarrow{j_*} & H_{n+1}(D^{n+1}, S^n) & \\
\xrightarrow{\partial_*} & H_n(S^n) & \xrightarrow{i_*} & H_n(D^{n+1}) & \xrightarrow{j_*} & H_n(D^{n+1}, S^n) & \\
\xrightarrow{\partial_*} & H_{n-1}(S^n) & \xrightarrow{i_*} & \cdots & & & \\
 & \cdots & \xrightarrow{i_*} & H_1(D^{n+1}) & \xrightarrow{j_*} & H_1(D^{n+1}, S^n) & \\
\xrightarrow{\partial_*} & H_0(S^n) & \xrightarrow{i_*} & H_0(D^{n+1}) & \xrightarrow{j_*} & H_0(D^{n+1}, S^n) & \longrightarrow 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & \cdots & \xrightarrow{i_*} & 0 & \xrightarrow{j_*} & H_{n+2}(D^{n+1}, S^n) & \\
\xrightarrow{\partial_*} & 0 & \xrightarrow{i_*} & 0 & \xrightarrow{j_*} & H_{n+1}(D^{n+1}, S^n) & \\
\xrightarrow{\partial_*} & \boldsymbol{Z} & \xrightarrow{i_*} & 0 & \xrightarrow{j_*} & H_n(D^{n+1}, S^n) & \\
\xrightarrow{\partial_*} & 0 & \xrightarrow{i_*} & \cdots & & & \\
 & \cdots & \xrightarrow{i_*} & 0 & \xrightarrow{j_*} & H_1(D^{n+1}, S^n) & \\
\xrightarrow{\partial_*} & \boldsymbol{Z} & \xrightarrow{i_*} & \boldsymbol{Z} & \xrightarrow{j_*} & H_0(D^{n+1}, S^n) & \longrightarrow 0
\end{array}
$$

$H_0(S^n)$ と $H_0(D^{n+1})$ の生成元は、ともに任意の定値写像による $H_0(\{p\})$ の生成元の像であるから、$H_0(S^n) \xrightarrow{i_*} H_0(D^{n+1})$ は同型であり、この完全系列から $H_k(D^{n+1}, S^n) \cong \boldsymbol{Z}$ $(k = n+1)$, $H_k(D^{n+1}, S^n) \cong 0$ $(k \neq n+1)$ がわかる。このとき、$H_{n+1}(D^{n+1}, S^n)$ の生成元 $[D^{n+1}, S^n]$ は、$\partial_*[D^{n+1}, S^n] = [S^n] \in H_n(S^n)$ と定める。

次に $S^{n+1} = \{\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_{n+2}) \in \boldsymbol{R}^{n+2} \mid \|\boldsymbol{x}\| = 1\}$ のホモロジー群を計算する。$S^{n+1}_+ = \{\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_{n+2}) \in S^{n+1} \mid x_1 \geqq 0\}$, $S^2_- = \{\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_{n+2}) \in S^{n+1} \mid x_1 \leqq 0\}$ とする。

空間対 (S^{n+1}, S^{n+1}_-) のホモロジー完全系列は次のようになる。

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & H_{n+2}(S^{n+1}_-) & \xrightarrow{i_*} & H_{n+2}(S^{n+1}) & \xrightarrow{j_*} & H_{n+2}(S^{n+1}, S^{n+1}_-) & \\
\xrightarrow{\partial_*} & H_{n+1}(S^{n+1}_-) & \xrightarrow{i_*} & H_{n+1}(S^{n+1}) & \xrightarrow{j_*} & H_{n+1}(S^{n+1}, S^{n+1}_-) & \\
\xrightarrow{\partial_*} & H_n(S^{n+1}_-) & \xrightarrow{i_*} & H_n(S^{n+1}) & \xrightarrow{j_*} & H_n(S^{n+1}, S^{n+1}_-) & \\
\xrightarrow{\partial_*} & \cdots & \cdots & & & & \\
 & & \cdots & \cdots & \xrightarrow{j_*} & H_1(S^{n+1}, S^{n+1}_-) & \\
\xrightarrow{\partial_*} & H_0(S^{n+1}_-) & \xrightarrow{i_*} & H_0(S^{n+1}) & \xrightarrow{j_*} & H_0(S^{n+1}, S^{n+1}_-) & \longrightarrow 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & 0 & \xrightarrow{i_*} & H_{n+2}(S^{n+1}) & \xrightarrow{j_*} & 0 & \\
\xrightarrow{\partial_*} & 0 & \xrightarrow{i_*} & H_{n+1}(S^{n+1}) & \xrightarrow{j_*} & \boldsymbol{Z} & \\
\xrightarrow{\partial_*} & 0 & \xrightarrow{i_*} & H_n(S^{n+1}) & \xrightarrow{j_*} & 0 & \\
\xrightarrow{\partial_*} & \cdots & \cdots & & & & \\
 & & \cdots & \cdots & \xrightarrow{j_*} & 0 & \\
\xrightarrow{\partial_*} & \boldsymbol{Z} & \xrightarrow{i_*} & H_0(S^{n+1}) & \xrightarrow{j_*} & 0 & \longrightarrow 0
\end{array}
$$

下の列は上の列のわかっているところを書いたものである。ここで、切除公理（問題 6.10）から $H_k(S^{n+1}, S^{n+1}_-) \cong H_k(S^{n+1}_+, \partial S^{n+1}_+)$ $(k \geqq 0)$, また、写像 $(S^{n+1}_+, \partial S^{n+1}_+) \longrightarrow (D^{n+1}, S^n)$ を、$(x_1, \ldots, x_{n+1}, x_{n+2}) \longmapsto (x_2, \ldots, x_{n+2})$ により定めると、これは同相であるから、$H_k(S^{n+1}_+, \partial S^{n+1}_+) \cong H_k(D^{n+1}, S^n)$ であることを使っている。この完全系列から $H_k(S^{n+1}) \cong \boldsymbol{Z}$ $(k = 0,\ n+1)$, $H_k(S^{n+1}) \cong 0$ $(k \neq 0,\ n+1)$ がわかる。$H_0(S^{n+1})$ の生成元は任意の定値

写像による $H_0(\{p\})$ の生成元の像であり、$H_{n+1}(S^{n+q})$ の生成元 $[S^{n+1}]$ は $j_*[S^{n+1}] = [S^{n+1}, S_-^{n+1}] \longleftarrow [S_+^{n+1}, \partial S_+^{n+1}]$ により定まっている。以上により命題 7.1 が証明された。

8　円周から円周への写像の写像度

前節で計算したように、$H_0(S^1) \cong \boldsymbol{Z}$, $H_1(S^1) \cong \boldsymbol{Z}$ である。連続写像 $f : S^1 \longrightarrow S^1$ は準同型 $f_* : H_0(S^1) \longrightarrow H_0(S^1)$, $f_* : H_1(S^1) \longrightarrow H_1(S^1)$ を誘導する。

$f_* : H_0(S^1) \longrightarrow H_0(S^1)$ は $1\times : \boldsymbol{Z} \longrightarrow \boldsymbol{Z}$ である。実際、$H_0(S^1)$ の生成元は任意の写像 $c_x : \{p\} \longrightarrow S^1$ $(x \in S^1)$ による $H_0(\{p\})$ の生成元の像 $(c_x)_*1$ である。$f \circ c_x = c_{f(x)}$ だから、$f_* : H_0(S^1) \longrightarrow H_0(S^1)$ は、$1\times : \boldsymbol{Z} \longrightarrow \boldsymbol{Z}$ である。

$f_* : H_1(S^1) \longrightarrow H_1(S^1)$ は、生成元 $[S^1]$ の像 $f_*[S^1]$ で定まる。

定義 8.1 連続写像 $f : S^1 \longrightarrow S^1$ に対し、$f_*[S^1] = m[S^1]$ で定まる m を f の写像度 *(degree)* と呼び、$\deg(f)$ で表す。

準同型写像 $f_* : H_1(S^1) \longrightarrow H_1(S^1)$ の計算は、同型 $H_1(S^1) \longrightarrow H_1(S^1, S_-^1)$ をもとに計算する。$S^1 \cong \boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}$ として、特別な写像 $f_m(x) = mx \mod 1$ を定義する。$(f_m)_* = m\times : \boldsymbol{Z} \longrightarrow \boldsymbol{Z}$ である。また、任意の $g : S^1 \longrightarrow S^1$ に対し、ある $m \in \boldsymbol{Z}$ について $g \simeq f_m$ となることを示す。

このとき、次の補題を使う。

補題 8.2 空間対 (X, A)、位相空間 Y に対し、像への同相写像 $i : X \longrightarrow Y$, Y の恒等写像 id_Y とホモトピックな Y の同相写像 $f : Y \longrightarrow Y$ が与えられているとする。X の部分集合 A に対し、$i_* : (X, A) \longrightarrow (Y, Y \setminus i(X \setminus A))$ は、ホモロジー群の同型を誘導するとする。このとき、$j_0 : Y \longrightarrow (Y, Y \setminus i(X \setminus A))$, $j_1 = f \circ j : Y \longrightarrow (Y, Y \setminus f(i(X \setminus A)))$ に対し、${i_*}^{-1} \circ j_{0*} = {(f \circ i)_*}^{-1}(j_1)_* : H_*(Y) \longrightarrow H_*(X, A)$ が成立する。

証明　$f \simeq \mathrm{id}_Y : Y \longrightarrow Y$ だから、$f_* = \mathrm{id}_{H_*(Y)}$ である。

$$
\begin{array}{ccccc}
Y & \xrightarrow{j_0} & (Y, Y \setminus i(X \setminus A)) & \xleftarrow{i} & (X, A) \\
\Big\downarrow f & & \Big\downarrow f & & \Big\downarrow \mathrm{id}_X \\
Y & \xrightarrow{j_1} & (Y, Y \setminus f(i(X \setminus A))) & \xleftarrow{f \circ i} & (X, A)
\end{array}
$$

は可換だから、${i_*}^{-1} \circ j_{0*} = {(f \circ i)_*}^{-1}(j_1)_* : H_*(Y) \longrightarrow H_*(X, A)$ を得る。

■

命題 8.3 整数 m に対し、$f_m : \boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z} \longrightarrow \boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}$ を $f_m(x) = mx \mod 1$ で定めると $\deg(f_m) = m$ である。また、任意の連続写像 $g : \boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z} \longrightarrow \boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}$ に対し、$g \simeq f_m$ となる整数が存在する。従って、$\deg : [S^1, S^1] \longrightarrow \boldsymbol{Z}$ は全単射である。

証明　(1)　$f : [-1, 1] \longrightarrow [-1, 1]$ を $f(x) = -x$ とするとき、$\deg(f : (D^1, S^0) \longrightarrow (D^1, S^0)) = -1$ である。

実際、$[D^1,S^0]\in H^1(D^1,S^0)$ は、$\partial_*[D^1,S^0]=\langle 1\rangle-\langle -1\rangle\in H_0(\{-1,1\})$ で定まっている。$(f|S^0)_*(\langle 1\rangle-\langle -1\rangle)=\langle -1\rangle-\langle 1\rangle$ であるから、下の図式が可換になるので、$f_*[D^1,S^0]=-[D^1,S^0]$ となる。

$$\begin{array}{ccccccc}
H^1(D^1,S^0)\ni & [D^1,S^0] & \overset{\partial_*}{\longmapsto} & \langle 1\rangle-\langle -1\rangle & \in & H_0(\{-1,1\}) \\
f_*\downarrow & \downarrow f_* & & (f|S^0)_*\downarrow & & \downarrow (f|S^0)_* \\
H^1(D^1,S^0)\ni & -[D^1,S^0] & \underset{\partial_*}{\longmapsto} & \langle -1\rangle-\langle 1\rangle & \in & H_0(\{-1,1\})
\end{array}$$

(2)　$\iota : D^1\longrightarrow S^1$ を像への同相写像とする。

$$H_1(S^1)\xrightarrow{j_*}H_1(S^1,S^1\setminus \mathrm{Int}(\iota(D^1)))\xleftarrow{\iota_*}H_1(D^1,S^0)$$

について、$\iota_*[D^1,S^0]=\pm j_*[S^1]$ で、$\pm$ は ι が向きを保つとき $+$, 向きを反対にするとき $-$ となる。

ここで、$[S^1]\in H^1(S^1)$ は、$j:S^1\longrightarrow (S^1,S^1_-)$, $i:(S^1_+,\partial S^1_+)\longrightarrow (S^1,S^1_-)$ について、$j_*[S^1]=[S^1,S^1_-]=i_*[S^1_+,\partial S^1_+]\in H^1(S^1,S^1_-)$ で定まっている。$\iota : D^1\longrightarrow S^1$ が向きを保つとき、S^1 の同相写像 $f:S^1\longrightarrow S^1$ で、id_{S^1} とホモトピックであり、$f\circ\iota : D^1\longrightarrow S^1_+$ が向きを保つ同相写像となるものが存在することを示せば、補題 8.2 により、$\iota_*[D^1,\partial D^1]=j_*[S^1]$ となる。このとき、ι が向きを反対にするときは、(1) により、$\iota_*[D^1,\partial D^1]=-j_*[S^1]$ が得られる。

f の構成は、次のようにする。$\iota(D^1)$ が S^1 の点 $q=(-1,0)$ を含む場合は、t に連続に依存する円周の回転 $g_t:S^1\longrightarrow S^1$ で $g_0=\mathrm{id}_{S^1}$, $g_1(q)\notin\iota(D^1)$ とするホモトピーによって、$\iota(D^1)$ が S^1 の点 $(-1,0)$ を含まないようにできる。このとき、$s\longmapsto(\cos 2\pi s,\sin 2\pi s)$ により、S^1 を $\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}$ と同一視すると、ある正実数により、$\iota(D^1)=[a,b]\subset\big[-\dfrac12+\varepsilon,\dfrac12-\varepsilon\big]\subset\big[-\dfrac12,\dfrac12\big]$ となる。ここで、$f_t:\big[-\dfrac12,\dfrac12\big]\longrightarrow\big[-\dfrac12,\dfrac12\big]$ を、

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1/4}{a+(1/2)}(x+\dfrac12)-\dfrac12 & (x\in\big[-\dfrac12,a\big])\\ \dfrac{1/2}{b-a}(x-a)-\dfrac14 & (x\in[a,b])\\ \dfrac{1/4}{(1/2)-b}(x-b)+\dfrac14 & (x\in\big[b,\dfrac12\big])\end{cases}$$

により定義すれば、f は恒等写像とホモトピックである。

(3)　$m\geqq 1$ に対し、${f_m}^{-1}(S^1_+)=J^{(m)}$ とおく。$S^1\cong\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}$ 上では $J^{(m)}=\displaystyle\bigcup_{i=0}^{m-1}J_i^{(m)}$, $J_i^{(m)}=\big[\dfrac{4i-1}{4m},\dfrac{4i+1}{4m}\big]$ $(i\geqq 0)$ のように表される。

補題 8.2 により、$j_i^{(m)}:S^1\longrightarrow(S^1,S^1\setminus\mathrm{Int}(J_i^{(m)}))$, $i_i^{(m)}:(J_i^{(m)},\partial J_i^{(m)})\longrightarrow(S^1,S^1\setminus\mathrm{Int}(J_i^{(m)}))$ に対し、$(i_i^{(m)})_*[J_i^{(m)},\partial J_i^{(m)}]=(j_i^{(m)})_*[S^1]$ である。従って、$j^{(m)}:S^1\longrightarrow(S^1,S^1\setminus\mathrm{Int}(J^{(m)}))$, $i^{(m)}:\displaystyle\coprod_{i=0}^{m-1}(J_i^{(m)},\partial J_i^{(m)})\longrightarrow(S^1,S^1\setminus\mathrm{Int}(J^{(m)}))$ に対し、$\displaystyle\sum_{i=0}^{m-1}(i_i^{(m)})_*[J_i^{(m)},\partial J_i^{(m)}]=(j^{(m)})_*[S^1]$ である。

さて、$f_m|J_i^{(m)}:(J_i^{(m)},\partial J_i^{(m)})\longrightarrow(S^1_+,\partial S^1_+)$ は向きを保つ同相写像であるから、$(f_m)_*[J_i^{(m)},\partial J_i^{(m)}]=[S^1_+,\partial S^1_+]$ となる。

ここで現れた写像は次の可換図式を満たす。

$$\begin{array}{ccccc}
S^1 & \xrightarrow{j_i^{(m)}} & (S^1, S^1 \setminus \mathrm{Int}(J_i^{(m)})) & \xleftarrow{i_i^{(m)}} & (J_i^{(m)}, \partial J_i^{(m)}) \\
\mathrm{id}\uparrow & & \uparrow & & \downarrow \\
S^1 & \xrightarrow{j^{(m)}} & (S^1, S^1 \setminus \mathrm{Int}(J^{(m)})) & \xleftarrow{i^{(m)}} & \coprod_{i=0}^{m-1}(J_i^{(m)}, \partial J_i^{(m)}) \\
f_m\downarrow & & f_m\downarrow & & f_m\downarrow \\
S^1 & \xrightarrow{j_*} & (S^1, S^1_-) & \xleftarrow{i_*} & (S^1_+, \partial S^1_+)
\end{array}$$

従って、

$$\begin{aligned}
(f_m)_*(j^{(m)})_*[S^1] &= \sum_{i=0}^{m-1}(f_m)_*(i_i^{(m)})_*[J_i^{(m)}, \partial J_i^{(m)}] \\
&= m\ i_*[S^1, S^1_+] = j_*(m[S^1])
\end{aligned}$$

である。従って、$(f_m)_*[S^1] = m[S^1]$, すなわち、$\deg(f_m) = m$ である。

$-m \leqq -1$ に対しては、${f_{-m}}^{-1}(S^1_+) = J^{(m)}$ であるが、

$$f_{-m}|J_i^{(m)} : (J_i^{(m)}, \partial J_i^{(m)}) \longrightarrow (S^1_+, \partial S^1_+)$$

は向きを反対にする同相写像だから、上の計算の中で、$f_{-m}[J_i^{(m)}, \partial J_i^{(m)}] = -[S^1_+, \partial S^1_+]$ となる。従って、$\deg(f_{-m}) = -m$ を得る。

$k = 0$ のときは、写像 $c_p : S^1 \longrightarrow \{p\}$, $b \in S^1$ への定値写像 $c_b : \{p\} \longrightarrow S^1$ に対し、$f_0 = c_b \circ c_p$ となり、$f_* = (c_b)_*(c_p)_*$ であるが、$H_1(\{p\}) \cong 0$ だから、$(f_0)_* = 0$ である。

(4) 円周から円周への写像 g はある f_m にホモトピックであることは次のように示す。

円周の基本群について議論したときの議論（第２段）から、合成写像 $g \circ p : [0,1] \longrightarrow S^1 \longrightarrow S^1$ に対し、$\widetilde{g \circ p} : [0,1] \longrightarrow \boldsymbol{R}$ で、$p \circ \widetilde{g \circ p} = g \circ p$ となるものがある。$m = \widetilde{g \circ p}(1) - \widetilde{g \circ p}(0)$ とするとき、$f_m \circ p$ は $\widetilde{f_m \circ p}(x) = mx$ ととることができる。$\widetilde{F}(t,x) = (1-t)\widetilde{g \circ p}(x) + t\widetilde{f_m \circ p}(x)$ とおくと、$\widetilde{F}(t,1) = (1-t)\widetilde{g \circ p}(1) + t\widetilde{f_m \circ p}(1) = (1-t)(\widetilde{g \circ p}(0) + m) + tm = (1-t)\widetilde{g \circ p}(0) + m = (1-t)\widetilde{g \circ p}(0) + t\widetilde{f_m \circ p}(0) + m$ であり、連続写像 $F : [0,1] \times S^1 \longrightarrow S^1$ を引き起こす。従って、g は f_m とホモトピックとなる。このとき、$g_* = m\times : H_1(S^1) \longrightarrow H_1(S^1)$ となる。 ■

9 球面から球面への写像の写像度

n を２以上の整数として、$H_n(S^n) \cong \boldsymbol{Z}$, $H_0(S^n) \cong \boldsymbol{Z}$ である。連続写像 $g : S^n \longrightarrow S^n$ に対して、$g_* : H_0(S^n) \longrightarrow H_0(S^n)$ は, 円周の場合と同様に $1\times : \boldsymbol{Z} \longrightarrow \boldsymbol{Z}$ である。$g_* : H_n(S^n) \longrightarrow H_n(S^n)$ は、ある整数 m に対して、$m\times : \boldsymbol{Z} \longrightarrow \boldsymbol{Z}$ である。この m を g の写像度と呼び、$\deg(g)$ と書く。

$g : S^k \longrightarrow S^k$ に対して $Sg : S^{k+1} \longrightarrow S^{k+1}$ を

$$Sg(x_1, x_2, \ldots, x_{k+2}) = (x_1, \sqrt{1-{x_1}^2}\, g(\frac{(x_2, \ldots, x_{k+2})}{\sqrt{1-{x_1}^2}}))$$

で定義する。このとき、$\deg(g) = \deg(Sg)$ である。

実際、空間対 (S^{k+1}_+, S^k) のホモロジー完全系列 $H_{k+1}(S^{k+1}_+) \longrightarrow H_{k+1}(S^{k+1}_+, S^k) \longrightarrow H_k(S^k) \longrightarrow H_k(S^{k+1}_+)$ への $Sg|S^{k+1}_+$ の作用をみると次の可換図式を得る。

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \xrightarrow{j_*} & \boldsymbol{Z} & \xrightarrow{\partial_*} & \boldsymbol{Z} & \xrightarrow{i_*} & 0 \\
\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (Sg|S^{k+1}_+)_*} & & \downarrow{\scriptstyle (Sg|S^k)_*} & & \downarrow \\
0 & \xrightarrow{j_*} & \boldsymbol{Z} & \xrightarrow{\partial_*} & \boldsymbol{Z} & \xrightarrow{i_*} & 0
\end{array}$$

ここで、$(Sg|S^k)_* = g_*$ は $m\times$ であるから、$(Sg|(S^{k+1}_+, S^k)_*$ も $m\times$ である。

さらに、空間対 (S^{k+1}, S^{k+1}_-) ののホモロジー完全系列 $H_{k+1}(S^{k+1}_-) \longrightarrow H_{k+1}(S^{k+1}) \longrightarrow H_{k+1}(S^{k+1}, S^{k+1}_-) \longrightarrow H_k(S^{k+1}_-)$ への Sg の作用を考えると次の可換図式を得る。

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \xrightarrow{i_*} & \boldsymbol{Z} & \xrightarrow{j_*} & \boldsymbol{Z} & \xrightarrow{\partial_*} & 0 \\
\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (Sg)_*} & & \downarrow{\scriptstyle (Sg|(S^{k+1},S^{k+1}_-))_*} & & \downarrow \\
0 & \xrightarrow{i_*} & \boldsymbol{Z} & \xrightarrow{j_*} & \boldsymbol{Z} & \xrightarrow{\partial_*} & 0
\end{array}$$

ここで、$(Sg|(S^{k+1}, S^{k+1}_-))_* : H_{k+1}(S^{k+1}, S^{k+1}_-) \longrightarrow H_{k+1}(S^{k+1}, S^{k+1}_-)$ は切除公理（問題 6.10）により、準同型 $(Sg|(S^{k+1}_+, S^k))_* : H_{k+1}(S^{k+1}_+, S^k) \longrightarrow H_{k+1}(S^{k+1}_+, S^k)$ と同一視される。$(Sg|(S^{k+1}_+, S^k))_*$ は $m\times$ であるから、$(Sg|(S^{k+1}, S^{k+1}_-))_*$ も $m\times$ である。従って、$(Sg|S^{k+1})_* : H_{k+1}(S^{k+1}) \longrightarrow H_{k+1}(S^{k+1})$ は $m\times$ である。

【問題 9.1】 $f : S^n \longrightarrow S^n$ に対し、点 $y \in S^n$ で次の性質を持つものがあるとする。y の D^n と同相な閉近傍 U が存在し、$f^{-1}(U)$ が連結成分 V_j $(j = 1, \dots, k)$ の和 $f^{-1}(U) = V_1 \sqcup \cdots \sqcup V_k$ であるとするとき、$f|V_i : V_i \longrightarrow U$ は同相写像である。$f|V_j$ が向きを保つ同相写像のとき $\sigma(f|V_j) = +1$, $f|V_j$ が向きを裏返す同相写像のとき $\sigma(f|V_j) = -1$ と σ を定義するとき、$\deg f = \displaystyle\sum_{j=1}^{k} \sigma(f|V_j)$ を示せ。