２００８年度幾何学特別演習 II　問題　　１２月３日

演習問題９－１． チェイン複体とチェイン写像の短完全系列

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & \downarrow\partial & & \downarrow\partial & & \downarrow\partial & & \\
0 & \longrightarrow & A_2 & \xrightarrow{i} & B_2 & \xrightarrow{j} & C_2 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow\partial & & \downarrow\partial & & \downarrow\partial & & \\
0 & \longrightarrow & A_1 & \xrightarrow{i} & B_1 & \xrightarrow{j} & C_1 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow\partial & & \downarrow\partial & & \downarrow\partial & & \\
0 & \longrightarrow & A_0 & \xrightarrow{i} & B_0 & \xrightarrow{j} & C_0 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}
$$

があるとする。

(1) $\partial_* : H_k(C_*) \longrightarrow H_{k-1}(A_*)$ が次で定義されることを示せ。

- $c_k \in \ker(\partial : C_k \longrightarrow C_{k-1})$ に対し、j は全射だから $j(b_k) = c_k$ となる $b_k \in B_k$ がとれる。$j(\partial(b_k)) = \partial(j(b_k)) = 0$ だから、行の系列の完全性から $i(a_{k-1}) = \partial(b_k)$ となる $a_{k-1} \in A_{k-1}$ がとれる。$i(\partial(a_{k-1})) = \partial(i(a_{k-1})) = \partial(\partial(b_k)) = 0$ で、i は単射だから、$\partial(a_{k-1}) = 0$ となる。こうして、$c_k \in \ker(\partial : C_k \longrightarrow C_{k-1})$ に対し、$a_{k-1} \in \ker(\partial : A_{k-1} \longrightarrow A_{k-2})$ をとり、これにより、$\partial_* : H_k(C_*) \longrightarrow H_{k-1}(A_*)$ を $\partial_*[c_k] = [a_{k-1}]$ とする。

((1-1) $j(b'_k) = c_k$ となる b'_k も同じ $H_{k-1}(A_*)$ の元を定めること、(1-2) $\ker(\partial : C_k \longrightarrow C_{k-1}) \longrightarrow H_{k-1}(A_*)$ は準同型となること、(1-3) $c_k = \partial c_{k+1}$ は $0 \in H_{k-1}(A_*)$ を定めることを示す。)

(2) チェイン複体のホモロジー群の長完全系列

$$
\begin{array}{cccccccc}
\xrightarrow{\partial_*} & H_2(A_*) & \xrightarrow{i_*} & H_2(B_*) & \xrightarrow{j_*} & H_2(C_*) & & \\
\xrightarrow{\partial_*} & H_1(A_*) & \xrightarrow{i_*} & H_1(B_*) & \xrightarrow{j_*} & H_1(C_*) & & \\
\xrightarrow{\partial_*} & H_0(A_*) & \xrightarrow{i_*} & H_0(B_*) & \xrightarrow{j_*} & H_0(C_*) & \longrightarrow & 0
\end{array}
$$

が得られることを示せ。

（$\mathrm{im} i_* \subset \ker j_*$, $\mathrm{im} j_* \subset \ker \partial_*$, $\mathrm{im} \partial_* \subset \ker i_*$, $\mathrm{im} i_* \supset \ker j_*$, $\mathrm{im} j_* \supset \ker \partial_*$, $\mathrm{im} \partial_* \supset \ker i_*$ を示す。）

演習問題９－２． 胞体複体 X が２つの胞体複体 X_1, X_2 の和集合であり、$X_{12} = X_1 \cap X_2$ も胞体複体であるとする。（X_1, X_2, X_{12} は X の部分複体。）このとき、

$$
\begin{tikzcd}
 & X_1 \arrow[dr, "j_1"] & \\
X_{12} \arrow[ur, "i_1"] \arrow[dr, "i_2"'] & & X \\
 & X_2 \arrow[ur, "j_2"'] &
\end{tikzcd}
$$

について、$C_k(X_{12}) = H_k({X_{12}}^{(k)}, {X_{12}}^{(k-1)})$, $C_k(X_1) = H_k({X_1}^{(k)}, {X_1}^{(k-1)})$, $C_k(X_2) = H_k({X_2}^{(k)}, {X_2}^{(k-1)})$, $C_k(X) = H_k(X^{(k)}, X^{(k-1)})$ に対し、次のチェイン複体の短完全系列が得られる。

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & \downarrow\partial & & \downarrow\partial & & \downarrow\partial & & \\
0 & \longrightarrow & C_2(X_{12}) & \xrightarrow{(i_{1*}, i_{2*})} & C_2(X_1) \oplus C_2(X_2) & \xrightarrow{j_{1*} - j_{2*}} & C_2(X) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow\partial & & \downarrow\partial & & \downarrow\partial & & \\
0 & \longrightarrow & C_1(X_{12}) & \xrightarrow{(i_{1*}, i_{2*})} & C_1(X_1) \oplus C_1(X_2) & \xrightarrow{j_{1*} - j_{2*}} & C_1(X) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow\partial & & \downarrow\partial & & \downarrow\partial & & \\
0 & \longrightarrow & C_0(X_{12}) & \xrightarrow{(i_{1*}, i_{2*})} & C_0(X_1) \oplus C_0(X_2) & \xrightarrow{j_{1*} - j_{2*}} & C_0(X) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}
$$

ここで、

$$
\begin{tikzcd}
 & H_k({X_1}^{(k)}, {X_1}^{(k-1)}) \arrow[dr, "j_{1*}"] & \\
H_k({X_{12}}^{(k)}, {X_{12}}^{(k-1)}) \arrow[ur, "i_{1*}"] \arrow[dr, "i_{2*}"'] & & H_k(X^{(k)}, X^{(k-1)}) \\
 & H_k({X_2}^{(k)}, {X_2}^{(k-1)}) \arrow[ur, "j_{2*}"'] &
\end{tikzcd}
$$

を使っている。

(1)　この短完全系列から演習問題９－１により得られる長完全系列における連結準同型 $\Delta_* : H_k(X) \longrightarrow H_{k-1}(X_{12})$ の定義を $C_*(X)$, $C_*(X_1)$, $C_*(X_2)$, $C_*(X_{12})$ の言葉で述べよ。

(2)　演習問題１により得られるホモロジー群の長完全系列を書き下せ。これをマイヤー・ビエトリス完全系列と呼ぶ。

演習問題９－３． n 次元球面 S^n に、$S^n = S^n_+ \cup S^n_-$ について、S^n_+, S^n_-, $S^{n-1} = S^n_+ \cap S^n_-$ が部分胞体複体となる胞体分割を与えよ。演習問題９－２を用いて、S^{n-1} のホモロジー群がわかっているときに S^n のホモロジー群を決定せよ。

問題９－４． 有限胞体複体 X, Y の間の連続写像 $f : X \longrightarrow Y$ の２つの胞体近似 f_0, f_1 は写像としてホモトピックである。f_0, f_1 の間のホモトピー $[0,1] \times X \longrightarrow Y$ の胞体近似 F で、f_0, f_1 の間のホモトピーを与えるものがとれる。このとき、$F_* : C_*([0,1] \times X) \longrightarrow C_*(Y)$ が得られる。

(1)　$H : C_k(X) \longrightarrow C_{k+1}(Y)$ を $H(e^k_i) = F_*((0,1) \times e^k_i)$ で定義するとき、$\partial H + H\partial = f_{1*} - f_{0*}$ を示せ。

(2)　チェイン複体 A_*, B_* の間のチェイン写像 f_0, f_1 に対し、準同型 $H : A_k \longrightarrow B_{k+1}$ で、$\partial H + H\partial = f_1 - f_0$ となるものがあるとき、$f_{0*} = f_{1*} : H_k(A_*) \longrightarrow H_k(B_*)$ となることを示せ。