２００８年度幾何学特別演習II　問題　　１１月１２日

演習問題６－１． 像への同相写像 $i_0, i_1 : X \longrightarrow Y$ に対して、Y の同相写像 $f : Y \longrightarrow Y$ で、恒等写像とホモトピックで、$i_1 = f \circ i_0$ を満たすものが存在するとする。$i_0(X)$ が、Y の開集合である時、X の閉集合 A に対し、$(i_0)_* : (X, X \setminus A) \longrightarrow (Y, Y \setminus i_0(A))$, $(i_1)_* : (X, X \setminus A) \longrightarrow (Y, Y \setminus i_1(A))$ は、ホモロジー群の同型を誘導し、$j_0 : Y \longrightarrow (Y, Y \setminus i_0(A))$, $j_1 : Y \longrightarrow (Y, Y \setminus i_1(A))$ に対し、$(i_1)_*{}^{-1}(j_1)_* = (i_0)_*{}^{-1}(j_0)_*$ が成立することを示せ。

演習問題６－２． 位相空間 X の閉集合 A とそれを含む開集合 U に対し、ホモトピー $f_t : X \longrightarrow X$ $(t \in [0,1])$ で、$f_0 = \mathrm{id}_X$, $f_t|A = \mathrm{id}_A$ $(t \in [0,1])$, $f_t(U) \subset U$, $f_1(U) \subset A$ を満たすものが存在すると仮定する。$i : X \longrightarrow Y$ を像への同相写像で、$i(X)$ は閉集合、$i(X \setminus A)$ は開集合となるものとする。このとき、$(X, A) \longrightarrow (Y, Y \setminus i(X \setminus A))$ は、ホモロジー群の同型を誘導することを示せ。
例えば、$X = \{\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n \mid \|\boldsymbol{x}\| \leqq 1\}$, $A = \{\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n \mid \|\boldsymbol{x}\| = 1\}$, $U = \{\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n \mid \|\boldsymbol{x}\| \leqq 1\}$ に対して用いる。

n を１以上の整数として、$f : (D_1^n, S_1^{n-1}) \longrightarrow (D_2^n, S_2^{n-1})$ あるいは $f : S_1^n \longrightarrow S_2^n$ の写像度 $\deg(f)$ を $f_* : H_n(D_1^n, S_1^{n-1}) \longrightarrow H_n(D_2^n, S_2^{n-1})$ あるいは $f_* : H_n(S^n) \longrightarrow H_n(S^n)$ について、$f_*[D_1^n, S_1^{n-1}] = \deg(f)[D_2^n, S_2^{n-1}]$ あるいは $f_*[S_1^n] = \deg(f)[S_2^n]$ で定義する。ここで、[ ] は n 次元ホモロジー群 $(\cong \mathbf{Z})$ の指定された生成元である。

演習問題６－３．（１）$f : [-1,1] \longrightarrow [-1,1]$ を $f(x) = -x$ とするとき、
$\deg(f : (D^1, S^0) \longrightarrow (D^1, S^0)) = -1$ を示せ。
ヒント：$[D^1, S^0] \in H^1(D^1, S^0)$ は、$\partial_*[D^1, S^0] = \langle 1 \rangle - \langle -1 \rangle \in H_0(\{-1, 1\})$ で定まっている。

（２）$\iota : [-1,1] \longrightarrow D^1$ を像への同相写像とする。

$$H_1([-1,1], \{-1,1\}) \xrightarrow{\iota_*} H_1(D^1, D^1 \setminus \mathrm{Int}(\iota([-1,1]))) \xleftarrow{j_*} H_1(D^1, S^0)$$

について、$\iota_*[[-1,1], \{-1,1\}] = \pm j_*[D^1, S^0]$ で、$\pm$ は ι が向きを保つとき $+$, 向きを反対にするとき $-$ となることを示せ。
ヒント：ι が向きを保つとき、ι と $i = \mathrm{id} : ([-1,1], \{-1,1\}) \longrightarrow (D^1, D^1 \setminus \mathrm{Int}(\iota([-1,1])))$ は、ホモトピックである。

（３）$\iota : D^1 \longrightarrow S^1$ を像への同相写像とする。

$$H_1(S^1) \xrightarrow{j_*} H_1(S^1, S^1 \setminus \mathrm{Int}(\iota(D^1))) \xleftarrow{\iota_*} H_1(D^1, S^0)$$

について、$\iota_*[D^1, S^0] = \pm j_*[S^1]$ で、$\pm$ は ι が向きを保つとき $+$, 向きを反対にするとき $-$ となることを示せ。
ヒント：演習問題６－１、６－２を用いる。

（４）$f_k : S^1 \longrightarrow S^1$ を $f_k(e^{2\pi\sqrt{-1}\theta}) = e^{2k\pi\sqrt{-1}\theta}$ で定義する。$\deg(f_k) = k$ を示せ。

ヒント：$f_k{}^{-1}(S^1_+) = J_k$ とおく。$S^1 \cong \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ 上では $J_k = \displaystyle\bigcup_{i=0}^{k-1}\big[\frac{2i}{2k}, \frac{2i+1}{2k}\big]$ $(k \geqq 1)$, $J_0 = S^1$, $J_{-k} = \displaystyle\bigcup_{i=1}^{k}\big[\frac{2i-1}{2k}, \frac{2i}{2k}\big]$ $(k \geqq 1)$ のように表される。$f : (S^1, J_k) \longrightarrow (S^1, S^1_+)$ をみる。

演習問題６－４． １次元胞複体 X は、頂点の有限集合 $X^{(0)} = \{v_1, \dots, v_{k(0)}\}$ および辺の集合 $\{e_1, \dots, e_{k(1)}\}$ $(e_i \approx [-1, 1])$ について、各 e_i の境界 ∂e_i と $X^{(0)} = \{v_1, \dots, v_{k(0)}\}$ の点との同一視 $a^1_i : \partial e_i \longrightarrow X^{(0)}$ が与えられたものである。

$$X = X^{(0)} \cup e_1 \cup \dots \cup e_{k(1)}$$

１次元連結有限胞複体のホモロジー群を求めよ。

ヒント：$(X, X^{(0)})$ のホモロジー完全列において、$H_1(X, X^{(0)}) \xrightarrow{\partial_*} H_0(X^{(0)})$ は、準同型 $\mathbf{Z}^{k(1)} \longrightarrow \mathbf{Z}^{k(0)}$ である。また、$H_0(\{v_i\}) \longrightarrow H_0(X)$ の像と $H_0(\{v_j\}) \longrightarrow H_0(X)$ の像は、$a^1_\ell(\partial e_\ell) = \{v_i, v_j\}$ となる e_ℓ があれば一致する。一方、連結を仮定している。

問題６－５． １次元連結有限胞複体のホモトピー同値類はオイラー数で分類されることを示せ。

空間対 (X, A), 連続写像 $\varphi : A \longrightarrow Y$ について、$Z = Y \cup_\varphi X$ を次のような位相空間として定義する。直和 $X \sqcup Y$ 上の同値関係 $\sim$ を $x \in A$ について、$x \sim \varphi(x)$ となるような最小のものとして定義し、$Z = (X \sqcup Y)/\sim$ とおき、商位相をいれる。$Y \longrightarrow Z$ は単射で像への同相写像であり、これにより、$Y \subset Z$ と考え、空間対 (Z, Y) が定義される。また、$X \setminus A \longrightarrow Z$ も単射で像への同相写像である。

問題６－６． X, Y がハウスドルフ空間で、A がコンパクト集合、A を含む X の開集合 U で、A へのレトラクションを持つものがあるとする。すなわち連続写像 $r : U \longrightarrow A$ で $r|A = \mathrm{id}_A$ となるものがあるとする。$\varphi : A \longrightarrow Y$ を連続写像とするとき $Z = Y \cup_\varphi X$ は、ハウスドルフ空間となることを示せ。