資料．ファン・カンペンの定理の証明

$X = U_1 \cup U_2$, U_1, U_2 は開集合で、U_1, U_2, $U_{12} = U_1 \cap U_2$ は弧状連結とする。基点 $b \in U_{12} = U_1 \cap U_2$ をとり、包含写像を $i_1 : U_{12} \longrightarrow U_1$, $i_2 : U_{12} \longrightarrow U_2$ とし、これにより誘導される準同型写像を $i_{1*} : \pi_1(U_{12}, b) \longrightarrow \pi_1(U_1, b)$, $i_{2*} : \pi_1(U_{12}, b) \longrightarrow \pi_1(U_2, b)$ とする。次の群の完全列があることを示す。

$$1 \longrightarrow \mathcal{N} \longrightarrow \pi_1(U_1, b) * \pi_1(U_2, b) \longrightarrow \pi_1(X, b) \longrightarrow 1$$

ここで、$\pi_1(U_1, b) * \pi_1(U_2, b)$ は群の自由積、$\mathcal{N}$ は、$\pi_1(U_1, b) * \pi_1(U_2, b)$ の部分集合 $\{i_{1*}\alpha(i_{2*}\alpha)^{-1} \mid \alpha \in \pi_1(U_{12}, b)\}$ を含む最小の正規部分群である。（このように定義される群は融合積と呼ばれ、$\pi_1(U_1, b) \underset{\pi_1(U_{12},b)}{*} \pi_1(U_2, b)$ と書かれる。）

証明。
(1)　$f : ([0, 1], \{0, 1\}) \longrightarrow (U_1 \cup U_2, b)$ に対し、$f^{-1}(U_1)$, $f^{-1}(U_2)$ に対するルベーグ数を考えると、十分大きな自然数 N に対し、$[0, 1]$ 区間を N 等分すると、$[\frac{m-1}{N}, \frac{m}{N}]$ の像は U_1 または U_2 に含まれる。$f(\frac{m}{N})$ が $U_1 \setminus U_{12}$, $U_2 \setminus U_{12}$, U_{12} の点の時、$f(\frac{m}{N})$ と b を結ぶ曲線 γ_m を U_1, U_2, U_{12} 内に取る。$f|[\frac{m-1}{N}, \frac{m}{N}] = f_m$ とおいて、

$$f \simeq f_1 \natural \overline{\gamma_1} \natural \gamma_1 \natural f_2 \natural \overline{\gamma_2} \natural \gamma_2 \natural f_3 \natural \overline{\gamma_3} \natural \dots \natural \gamma_{N-1} \natural f_N$$

とすると $\gamma_{m-1} \natural f_m \natural \overline{\gamma_m}$ は U_1 または U_2 のループである。これから自由積からの全射があることがわかる。

(2)　自由積として得られた $f : ([0, 1], \{0, 1\}) \longrightarrow (U_1 \cup U_2, b)$ が b への定値写像にホモトピックとすると、写像 $F : [0, 1]^2 \longrightarrow U_1 \cup U_2$ で、$F(1, t) = f(t)$, $F(0, t) = b$, $F(s, 0) = F(s, 1) = b$ をみたすものが存在する。$F^{-1}(U_1)$, $F^{-1}(U_2)$ についてのルベーグ数を考えると、十分大きな自然数 N に対し、正方形 $[0, 1]^2$ を N^2 等分すると、$[\frac{m-1}{N}, \frac{m}{N}] \times [\frac{n-1}{N}, \frac{n}{N}]$ の像は U_1 または U_2 に含まれる。$F(\frac{m}{N}, \frac{n}{N})$ が $U_1 \setminus U_{12}$, $U_2 \setminus U_{12}$, U_{12} の点の時、$F(\frac{m}{N}, \frac{n}{N})$ と b を結ぶ曲線 γ_{mn} を U_1, U_2, U_{12} 内に取る。この γ_{mn} を使って、F をホモトピーで変形して、$G(\frac{m}{N}, \frac{n}{N}) = b$ となる写像 $G : [0, 1]^2 \longrightarrow U_1 \cup U_2$ をつくる。$G(1, t) = f_{N1} \natural \dots \natural f_{NN}$ の f_{Nn} は、$\pi_1(U_1, b)$ または $\pi_1(U_2, b)$ の元を表すが、この書き方は、もとの f を $\pi_1(U_1, b)$ または $\pi_1(U_2, b)$ の関係式で書き換えたものである。（$[f]$ と自由積の中で同じ元である。）
小正方形は U_1, U_2 のいずれかに写されるから、隣り合う小正方形の共通部分となる辺は、小正方形がともに U_1 または U_2 に写されれば、U_1 または U_2 に写され、一方が U_1、他方が U_2 に写されるときには、U_{12} に写される。このとき、この辺に対応する $\alpha \in \pi_1(U_{12}, b)$ をとると、U_1 に写る正方形の側では、この元を $\pi_1(U_1, b)$ の元と見た $i_{1*}\alpha$ と書き、U_2 に写る正方形の側では、$\pi_1(U_2, b)$ の元と見た $i_{2*}\alpha$ と書いているはずである。

図のように、辺からの写像に、それぞれの小正方形の側から名前が付けられているとする。f_{mn}, g_{mn}, h_{mn}, k_{mn} は、それぞれ小正方形の写る先の $\pi_1(U_1,b)$ または $\pi_1(U_2,b)$ の元を表す。
小正方形によるホモトピーによって、$f_{mn} \simeq \overline{k_{m,n-1}} \natural g_{m-1,n} \natural h_{mn}$ であるが、これは小正方形が写される U_1, U_2 の基本群 $\pi_1(U_1,b)$, $\pi_1(U_2,b)$ のなかの関係式である。
一方、$h_{m,n} \natural \overline{k_{m,n}}$, $\overline{f_{m,n}} \natural g_{m,n}$ は、その辺の両側が、ともに U_1 または U_2 に写されていれば、$\pi_1(U_1,b)$, $\pi_1(U_2,b)$ のなかの関係式であるが、その辺の一方が U_1、他方が U_2 に写されるときには、その辺のあらわす $\alpha \in \pi_1(U_{12},b)$ を使って $i_{1*}\alpha(i_{2*}\alpha)^{-1}$ の形にかかれている。
次のように変形すると、$f_{N1} \natural f_{N2} \natural \cdots \natural f_{NN}$ は $g_{N-1,1} \natural g_{N-1,2} \natural \cdots \natural g_{N-1,N}$ に $\mathcal{N}$ の元を掛けたものである事がわかる。

$$
\begin{aligned}
& f_{N1} \natural f_{N2} \natural \cdots \natural f_{NN} \\
\simeq\ & (g_{N-1,1} \natural h_{N1}) \natural (\overline{k_{N1}} \natural g_{N-1,2} \natural h_{N2}) \natural \cdots \natural (\overline{k_{N,N-1}} \natural g_{N-1,N}) \\
=\ & g_{N-1,1} \natural (h_{N1} \natural \overline{k_{N1}}) \natural g_{N-1,2} \natural h_{N2} \natural \cdots \natural (h_{N,N-1} \natural \overline{k_{N,N-1}}) \natural g_{N-1,N} \\
\simeq\ & g_{N-1,1} \natural g_{N-1,2} \natural \cdots \natural g_{N-1,N} \\
& \quad \natural \overline{g_{N-1,2} \natural \cdots \natural g_{N-1,N}} \natural (h_{N1} \natural \overline{k_{N1}}) \natural g_{N-1,2} \natural \cdots \natural g_{N-1,N} \\
& \quad \natural \overline{g_{N-1,3} \natural \cdots \natural g_{N-1,N}} \natural \cdots \\
& \quad \natural \overline{g_{N-1,N}} \natural (h_{N,N-1} \natural \overline{k_{N,N-1}}) \natural g_{N-1,N}
\end{aligned}
$$

さらに次のように変形すると、$g_{N-1,1} \natural g_{N-1,2} \natural \cdots \natural g_{N-1,N}$ は $f_{N-1,1} \natural f_{N-1,2} \natural \cdots \natural f_{N-1,N}$ に $\mathcal{N}$ の元を掛けたものである事がわかる。

$$
\begin{aligned}
& g_{N-1,1} \natural g_{N-1,2} \natural \cdots \natural g_{N-1,N} \\
\simeq\ & f_{N-1,1} \natural f_{N-1,2} \natural \cdots \natural f_{N-1,N} \\
& \quad \natural \overline{f_{N-1,2} \natural \cdots \natural f_{N-1,N}} (\overline{f_{N-1,1}} \natural g_{N-1,1}) \natural f_{N-1,2} \natural \cdots \natural f_{N-1,N} \\
& \quad \natural \overline{f_{N-1,3} \natural \cdots \natural f_{N-1,N}} (\overline{f_{N-1,2}} \natural g_{N-1,2}) \natural f_{N-1,3} \natural \cdots \natural f_{N-1,N} \natural \cdots \\
& \quad \natural (\overline{f_{N-1,N}} \natural g_{N-1,N})
\end{aligned}
$$

これを続けると、$g_{1,1} \natural g_{1,2} \natural \cdots \natural g_{1,N}$ は b への定値写像で単位元を表すから、もとの元は $\mathcal{N}$ の元であったことがわかる。