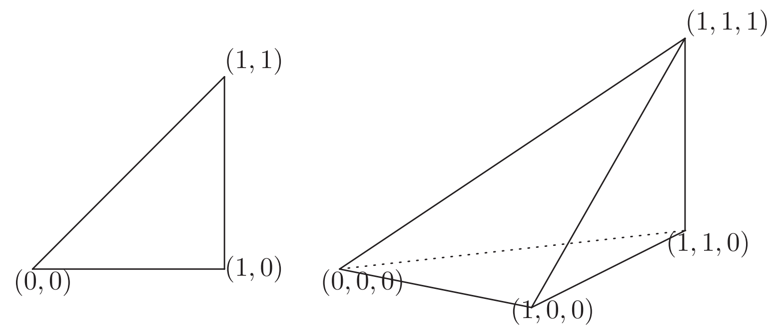

図 5: 2 次元標準単体 Δ^2, 3 次元標準単体 Δ^3

位相空間のホモロジー群の公理を満たすホモロジー理論の存在を示す。

30　特異単体複体

X を位相空間とする。まず標準単体 Δ^k を

$$\Delta^k = \{(x_1, \dots, x_k) \in \boldsymbol{R}^k \bigm| 1 \geqq x_1 \geqq \cdots \geqq x_k \geqq 0\}$$

により定義する。

定義 30.1 連続写像 $\sigma : \Delta^k \longrightarrow X$ を X の k 次元特異単体あるいは特異 k 単体 *(singular k-simplex)* と呼ぶ。X の特異 k 単体を基底とする自由加群を $S_k(X)$ と書く。$S_k(X)$ の元は有限和 $c = \sum a_i c_i$ であり、k 次元特異チェインあるいは特異 k チェイン *(singular k-chain)* と呼ばれる。

X が単体複体ならば、k 単体が像であるような写像はもちろん特異 k 単体である。感覚的には、X に対して考えられるすべての単体分割を同時に考えている。特異 k 単体を Δ^k の面に制限したものは、特異 $k-1$ 単体と考えられる。これを定式化して境界準同型 $S_k(X) \longrightarrow S_{k-1}(X)$ を定義するために、次の写像を用意する。

$i = 0, \dots, k$ に対して，$\varepsilon_i : \Delta^{k-1} \longrightarrow \Delta^k$ を次で定義する．図 6 参照.

$$\begin{aligned}
\varepsilon_0(x_1, \dots, x_{k-1}) &= (1, x_1, \dots, x_{k-1}), \\
\varepsilon_i(x_1, \dots, x_{k-1}) &= (x_1, \dots, x_i, x_i, \dots, x_{k-1}) \quad (0 < i < k), \\
\varepsilon_k(x_1, \dots, x_{k-1}) &= (x_1, \dots, x_{k-1}, 0)
\end{aligned}$$

$\varepsilon_i : \Delta^{k-1} \longrightarrow \Delta^k$ はアフィン写像で、$v_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{i} e_j$ について、$\varepsilon_i(v_\ell) = \begin{cases} v_\ell & (\ell < i) \\ v_{\ell+1} & (\ell \geqq i) \end{cases}$ を満たしている。

特異 k 単体 $\sigma : \Delta^k \longrightarrow M$ の**境界** $\partial\sigma$ を $\partial\sigma = \displaystyle\sum_{i=0}^{k} (-1)^i \sigma \circ \varepsilon_i$ により定義する.

この境界の定義により境界準同型 $\partial : S_k(X) \longrightarrow S_{k-1}(X)$ が定義される。

【問題 30.2】 $0 \leqq i \leqq j \leqq k-1$ のとき、$\varepsilon_i \circ \varepsilon_j = \varepsilon_{j+1} \circ \varepsilon_i$ を示し、$S_{k-2}(X) \xleftarrow{\partial} S_{k-1}(X) \xleftarrow{\partial} S_k(X)$ について $\partial \circ \partial = 0$ を示せ。

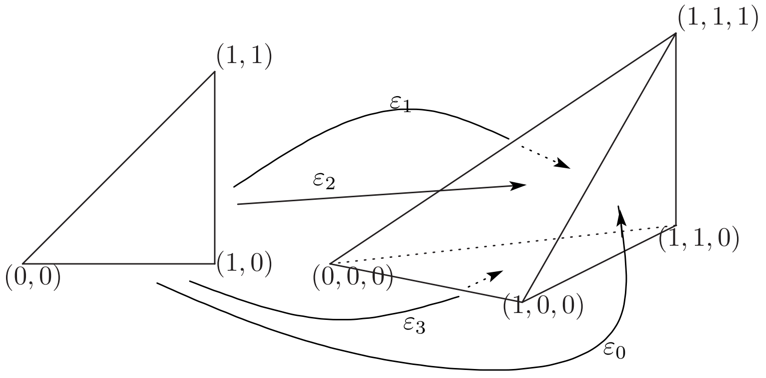

図 6: ε_0, ε_1, ε_2, $\varepsilon_3 : \mathit{\Delta}^2 \longrightarrow \mathit{\Delta}^3$

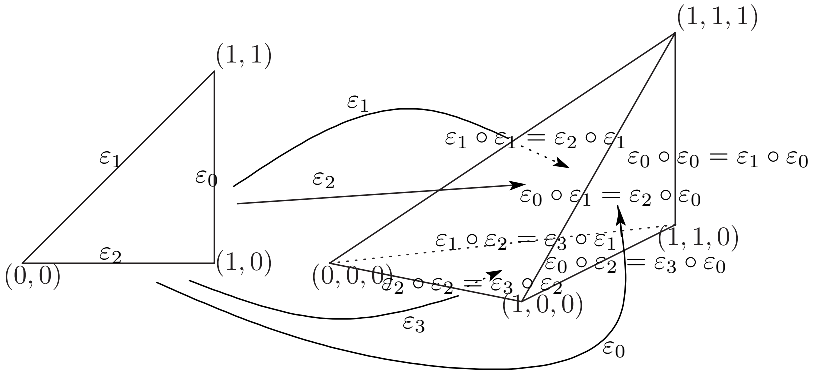

図 7: $\varepsilon_i \circ \varepsilon_j = \varepsilon_{j+1} \circ \varepsilon_i$ $(0 \leqq i \leqq j \leqq k-1)$

【**問題 30.2 の解答**】$0 \leqq i \leqq k,\ 0 \leqq j \leqq k-1$ について $\varepsilon_i \circ \varepsilon_j$ を考える。$\varepsilon_i \circ \varepsilon_j : \Delta^{k-2} \longrightarrow \Delta^k$ はアフィン写像で、$v_\ell = \sum_{m=1}^{\ell} e_m$ について、

$$
\begin{aligned}
i \leqq j \text{ のとき、} (\varepsilon_i \circ \varepsilon_j)(v_\ell) &= \begin{cases} v_\ell & (\ell < i) \\ v_{\ell+1} & (i \leqq \ell < j) \\ v_{\ell+2} & (j \leqq \ell) \end{cases}, \\
j < i \text{ のとき、} (\varepsilon_i \circ \varepsilon_j)(v_\ell) &= \begin{cases} v_\ell & (\ell < j) \\ v_{\ell+1} & (j \leqq \ell < i+1) \\ v_{\ell+2} & (i+1 \leqq \ell) \end{cases}
\end{aligned}
$$

である。従って、$i \leqq j$ のとき、$\varepsilon_i \circ \varepsilon_j = \varepsilon_{j+1} \circ \varepsilon_i$ となる。

$$
\begin{aligned}
\partial\partial\sigma &= \sum_{j=0}^{k-1}\sum_{i=0}^{k}(-1)^{i+j}\sigma \circ \varepsilon_i \circ \varepsilon_j \\
&= \sum_{0 \leqq j < i \leqq k}(-1)^{i+j}\sigma \circ \varepsilon_i \circ \varepsilon_j + \sum_{0 \leqq i \leqq j \leqq k-1}(-1)^{i+j}\sigma \circ \varepsilon_i \circ \varepsilon_j \\
&= \sum_{0 \leqq j < i \leqq k}(-1)^{i+j}\sigma \circ \varepsilon_i \circ \varepsilon_j + \sum_{0 \leqq i \leqq j \leqq k-1}(-1)^{i+j}\sigma \circ \varepsilon_{j+1} \circ \varepsilon_i = 0
\end{aligned}
$$

定義 30.3 特異単体複体 $S_*(X)$ のホモロジー群を特異ホモロジー群と呼び、$H_*(X)$ で表す。

空間対 (X, A) に対しては, 特異単体複体 $S_*(A)$, $S_*(X)$ が構成されるが、$S_*(A)$ は、$S_*(X)$ の部分チェイン複体である。$S_k(X, A) = S_k(X)/S_k(A)$ として、$S_k(X, A)$ はチェイン複体となる。

定義 30.4 チェイン複体 $S_k(X, A)$ のホモロジー群を空間対 (X, A) の特異ホモロジー群と呼び、$H_*(X, A)$ と書く。

チェイン写像の短完全系列 $0 \longrightarrow S_k(A) \xrightarrow{i_*} S_k(X) \xrightarrow{j_*} S_k(X, A) \longrightarrow 0$ から、空間対のホモロジー群の完全系列が得られる。

30.1 特異ホモロジー群の関手性と次元公理

$f : X \longrightarrow Y$, $f_* : S_*(X) \longrightarrow S_*(Y)$ を $S_k(X)$ の生成元 $\sigma : \Delta^k \longrightarrow X$ に対し、$S_k(Y)$ の生成元 $f_*(\sigma) = f \circ \sigma$ を対応させることで定義する。

$$
\begin{aligned}
\partial(f_*\sigma) = \partial(f \circ \sigma) &= \sum_{i=0}^{k}(-1)^i (f \circ \sigma) \circ \varepsilon_i \\
&= \sum_{i=0}^{k}(-1)^i f \circ (\sigma \circ \varepsilon_i) \\
&= f_*(\sum_{i=0}^{k}(-1)^i \sigma \circ \varepsilon_i) = f_*(\partial\sigma)
\end{aligned}
$$

だから、f_* はチェイン写像である。チェイン写像 $f_* : S_*(X) \longrightarrow S_*(Y)$ はホモロジー群の準同型 $f_* : H_*(X) \longrightarrow H_*(Y)$ を誘導する。

空間対の間の連続写像 $f : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$ は、チェイン写像 $f_* : S_*(X, A) \longrightarrow S_*(Y, B)$ を導き、ホモロジー群の準同型 $f_* : H_*(X, A) \longrightarrow H_*(Y, B)$ を誘導する。

$\sigma : \Delta^k \longrightarrow X$, $f : X \longrightarrow Y$, $g : Y \longrightarrow Z$ に対して、$(g \circ f) \circ \sigma = g \circ (f \circ g)$ だから、チェイン写像 $f_* : S_*(X) \longrightarrow S_*(Y)$, $g_* : S_*(Y) \longrightarrow S_*(Z)$

$(g\circ f)_*: S_*(X) \longrightarrow S_*(Z)$ について $(g\circ f)_* = g_*\circ f_*$ である。従って、ホモロジー群の準同型 $f_*: H_*(X) \longrightarrow H_*(Y)$, $g_*: H_*(Y) \longrightarrow H_*(Z)$ $(g\circ f)_*: H_*(X) \longrightarrow H_*(Z)$ について、$(g\circ f)_* = g_*\circ f_*$ である。

この議論は、空間対 (X,A), (Y,B), (Z,C) の間の写像についても全く同様に成立する。

以上で、特異ホモロジー群の関手性が分かった。

１点からなる空間 $\{p\}$ について、$S_k(\{p\}) \cong \boldsymbol{Z}$ で、生成元は定値写像 $c_p^k: \Delta^k \longrightarrow \{p\}$ である。

$$S_*(\{p\}): 0 \longleftarrow \boldsymbol{Z}c_p^0 \xleftarrow{\partial} \boldsymbol{Z}c_p^1 \xleftarrow{\partial} \boldsymbol{Z}c_p^2 \xleftarrow{\partial} \cdots$$

$\partial: S_k(\{p\}) \longrightarrow S_{k-1}(\{p\})$ は、

$$\partial c_p^k = \sum_{i=0}^k c_p^k\circ\varepsilon_i = \sum_{i=0}^k c_p^{k-1} = \begin{cases} 0 & (k \text{ が奇数または } k=0) \\ c_p^{k-1} & (k \text{ が } 2 \text{ 以上の偶数}) \end{cases}$$

により計算され、$\partial: S_k(\{p\}) \longrightarrow S_{k-1}(\{p\})$ は、k が奇数または $k=0$ のとき、零写像、k が 2 以上の偶数のとき同型写像である。従って、$H_k(\{p\}) \cong \begin{cases} \boldsymbol{Z} & (k=0) \\ 0 & (k\neq 0) \end{cases}$ となる。

30.2　特異ホモロジー群のホモトピー不変性

単体複体 K の実現 $|K|$ において、k 単体 $\langle v_0\cdots v_k\rangle$ はアフィン写像 $\Delta^k \longrightarrow |K|$ で、Δ^k の頂点 $\displaystyle\sum_{j=1}^i e_j$ を $|K|$ の点 v_i に写すものと考える。そうすると $\langle v_0\cdots v_k\rangle \in S_k(|K|)$ である。

$[0,1]\times\Delta^k$ の単体分割 $K_{[0,1]\times\Delta^k}$ について、$P\Delta^k = \displaystyle\sum_{i=0}^k (-1)^i\langle v_0^0\cdots v_i^0 v_i^1\cdots v_k^1\rangle \in S_{k+1}([0,1]\times\Delta^k)$ である。$\Delta^k \in S_k(\Delta^k)$ は、恒等写像 id_{Δ^k} のことである。恒等写像 id_{Δ^k} に対し、$\partial\,\mathrm{id}_{\Delta^k} = \displaystyle\sum_{i=0}^k \varepsilon_i \in S_{k-1}(\Delta^k)$ となる。$(\partial P + P\partial)\,\mathrm{id}_{\Delta^k} = i_1 - i_0$ である。ここで、$i_1 = \langle v_0^1\cdots v_k^1\rangle$, $i_0 = \langle v_0^0\cdots v_k^0\rangle$ は $\{0\}\times\Delta$, $\{0\}\times\Delta$ への包含写像である。

ホモトピックな連続写像 $f_0 \simeq f_1: X \longrightarrow Y$ に対し、$F: [0,1]\times X \longrightarrow Y$ を f_0 と f_1 の間のホモトピーとする。$\sigma: \Delta^k \longrightarrow X$ に対し、$(f_0)_*\sigma = f_0\circ\sigma$, $(f_1)_*\sigma = f_1\circ\sigma \in S_k(Y)$ が定まっている。

$$P_F(\sigma) = F_*(\mathrm{id}_{[0,1]}\times\sigma)_* P\,\mathrm{id}_{\Delta^k}$$

とおく。

$$P_F(\sigma\circ\varepsilon_i) = F_*(\mathrm{id}_{[0,1]}\times(\sigma\circ\varepsilon_i))_* P\,\mathrm{id}_{\Delta^{k-1}} = F_*(\mathrm{id}_{[0,1]}\times\sigma)_* P\varepsilon_i$$

に注意すると、

$$
\begin{aligned}
\partial P_F(\sigma)+P_F(\partial\sigma) &= \partial F_*(\mathrm{id}_{[0,1]}\times\sigma)_*P\,\mathrm{id}_{\Delta^k}+P_F(\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\sigma\circ\varepsilon_i)\\
&= F_*(\mathrm{id}_{[0,1]}\times\sigma)_*(\partial P\,\mathrm{id}_{\Delta^k})+\sum_{i=0}^{k}(-1)^iF_*(\mathrm{id}_{[0,1]}\times\sigma)_*P\varepsilon_i\\
&= F_*(\mathrm{id}_{[0,1]}\times\sigma)_*((\partial P+P\partial)\,\mathrm{id}_{\Delta^k})\\
&= F_*(\mathrm{id}_{[0,1]}\times\sigma)_*(i_1-i_0)\\
&= f_1\circ\sigma-f_0\circ\sigma\\
&= (f_1)_*\sigma-(f_0)_*\sigma
\end{aligned}
$$

30.3 特異ホモロジー群の切除公理

$X=X_1\cup X_2$, X_1, X_2 は開集合とする。$X_{12}=X_1\cap X_2$ として、チェイン写像 $i_*:S_*(X_1,X_{12})\longrightarrow S_*(X,X_2)$ が存在する。この i_* がホモロジー群の同型 $i_*:H_*(X_1,X_{12})\longrightarrow H_*(X,X_2)$ を誘導し、対のホモロジー完全系列の連結準同型と可換になることが切除公理の内容である。

単体複体の場合は、$i_*:C_*(K_1,K_{12})\longrightarrow C_*(K,K_2)$ が同型写像であり、i_* がホモロジー群の同型を誘導することはほとんど自明であったが、$\sigma:\Delta^k\longrightarrow X$ で、X_1, X_2 のどちらにも含まれないものがあるので、証明のためには、$r\circ i_*=\mathrm{id}_{S_*(X_1,X_{12})}$, $i_*\circ r$ と $\mathrm{id}_{S_*(X_1,X_{12})}$ がチェインホモトピックとなるようなチェイン写像 $r:S_*(X,X_2)\longrightarrow S_*(X_1,X_{12})$ を工夫して作る必要がある。

定義のために問題 29.2 の bsd, BSD を用いる。ただし、$b_\sigma\in\sigma$ と考え、$\mathrm{bsd}(\mathrm{id}_{\Delta^k})\in S_k(\Delta)$, また、$\mathrm{BSD}(\mathrm{id}_{\Delta^k})\in S_{k+1}(\Delta)$ と考える。

$\sigma:\Delta^k\longrightarrow X$ に対し、σ の重心細分を $\mathrm{bsd}\,\sigma=\sigma_*\,\mathrm{bsd}(\mathrm{id}_{\Delta^k})$ で定義する。

Δ^k の開被覆 $\{\sigma^{-1}(X_1),\sigma^{-1}(X_2)\}$ のルベーグ数を考えると、十分大きな m をとると $\mathrm{bsd}^m\,\sigma$ の各特異単体の像が X_1 または X_2 に含まれることがわかる。このような m の最小のものを m_σ とおく。

$A\sigma=\mathrm{BSD}\,\sigma+\cdots+\mathrm{BSD}\,\mathrm{bsd}^{m_\sigma-1}\,\sigma$ を考える。

$\partial A\sigma+A\partial\sigma+\sigma$ に現れる特異単体は、X_1 または X_2 に像を持つ。実際、特異単体 τ が X_1 または X_2 に像をもつならば、$\mathrm{BSD}\,\tau$ に現れる特異単体は、X_1 または X_2 に像を持つ。$\tau\prec\sigma$ に対して、$m_\tau\leqq m_\sigma$ だから、

$$
\begin{aligned}
\partial A\sigma+A\partial\sigma+\sigma=&\ \mathrm{bsd}^{m_\sigma}\,\sigma\\
&+\sum_{i=0}^{k}(-1)^i(\mathrm{BSD}\,\mathrm{bsd}^{m_{\partial_i\sigma}}\,\partial_i\sigma+\cdots+\mathrm{BSD}\,\mathrm{bsd}^{m_\sigma-1}\,\partial_i\sigma)
\end{aligned}
$$

であるが、ここに現れる特異単体は、X_1 または X_2 に像を持つ。

そこで、$r\sigma=\partial A\sigma+A\partial\sigma+\sigma$ と定義する。このとき、

$$
\partial(r\sigma)-r(\partial\sigma)=\partial(\partial A\sigma+A\partial\sigma+\sigma)-(\partial A(\partial\sigma)+A\partial(\partial\sigma)+\partial\sigma)=0
$$

であるから、r はチェイン写像である。σ の像が X_1 に含まれれば、$m_\sigma=0$ だから、A の定義により、$r\circ i_*=\mathrm{id}_{S_*(X_1,X_{12})}$ である。また、$i_*\circ r(\sigma)-\sigma=\partial A\sigma+A\partial\sigma$ だから、$i_*\circ r$ と $\mathrm{id}_{S_*(X_1,X_{12})}$ はチェインホモトピックである。

以上で、$i_*:H_*(X_1,X_{12})\longrightarrow H_*(X,X_2)$ が同型写像となることが示された。

対のホモロジー完全系列の連結準同型と可換になることは容易に分かる。
実際、単体複体の場合と同様に次のチェイン複体とチェイン写像の図式

$$
\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & S_*(X_{12}) & \xrightarrow{i_*} & S_*(X_1) & \xrightarrow{j_*} & S_*(X_1, X_{12}) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & S_*(X_2) & \xrightarrow{i_*} & S_*(X) & \xrightarrow{j_*} & S_*(X, X_2) & \longrightarrow & 0
\end{array}
$$

は可換であるから次の図式は可換となる。

$$
\begin{array}{ccc}
H_k(X_1, X_{12}) & \xrightarrow{\partial} & H_{k-1}(X_{12}) \\
\downarrow & & \downarrow \\
H_k(X, X_2) & \xrightarrow{\partial} & H_{k-1}(X_2)
\end{array}
$$