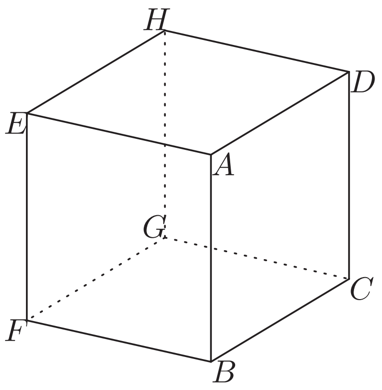
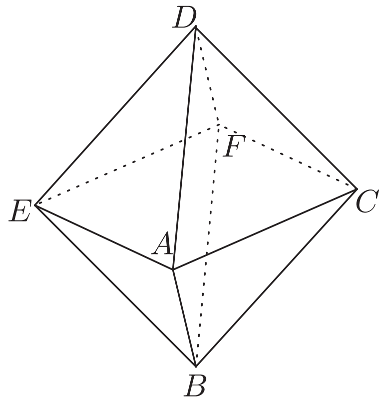
２００７年度幾何学特別演習 II　問題　　１月２３日

演習問題１． 立方体の頂点に下の左の図のように名前をつける。X をこの立方体から、対面をアフィン写像 $EFGH \longmapsto BCDA$, $DHGC \longmapsto EFBA$, $BCGF \longmapsto DHEA$ により同一視して得られる空間とする。X のホモロジー群を求めよ。余力があれば、X の基本群を求めよ。





演習問題２． 正８面体の頂点に上の右の図のように名前をつける。Y をこの正８面体から、対面をアフィン写像 $ABC \longmapsto DEF$, $ACD \longmapsto EBF$, $ADE \longmapsto BCF$, $AEB \longmapsto CDF$ により同一視して得られる空間とする。Y のホモロジー群を求めよ。余力があれば、X の基本群を求めよ。

ユークリッド空間内の単体複体 K の単体 σ のスター $\mathrm{Star}(\sigma)$（星状体）を σ をフェイスとする単体の和集合 $\mathrm{Star}(\sigma) = \bigcup_{\sigma \prec \tau} \tau$ とする。オープン・スター（開星状体）$O(\sigma)$ を σ をフェイスとする単体の内部の和集合 $O(\sigma) = \bigcup_{\sigma \prec \tau} \mathrm{Int}(\tau)$ とする。

問題． スター、オープン・スターの次の性質を示せ。

(1)　$\mathrm{Star}(\langle v_0 \ldots v_k \rangle) = \bigcap_{i=0}^{k} \mathrm{Star}(v_i)$.

（これは右辺が空でなければ、左辺の k 単体が存在し、等号が成立するという意味でも正しい。）

(2)　$\mathrm{Star}(\sigma)$ の任意の点 p と σ 上の任意の点 q を結ぶ線分 $(1-t)p + tq$ $(t \in [0,1])$ が定義できる。

(3)　オープン・スター（開星状体）$O(\sigma)$ は K の実現 $|K|$ の開集合である。

ヒント：K を K の頂点の集合が基底ベクトルであるようなユークリッド空間に実現し、$O(\sigma)$ を定義する不等式を書けばよい。

問題. 有限単体複体 K_1, K_2 の頂点の集合を $V(K_1)$, $V(K_2)$ とする。$g : |K_1| \longrightarrow |K_2|$ が連続写像で、K_1 の頂点 v のスターの像 $g(\mathrm{Star}(v))$ が K_2 のある頂点 $f_V(v)$ のスターに含まれるとする。

(1)　$f_V : V(K_1) \longrightarrow V(K_2)$ は単体写像を定義することを示せ。

ヒント：$\mathrm{Star}(v) \subset g^{-1}(\mathrm{Star}(f_V(v)))$ と K_1 の単体 $\langle v_0 \dots v_k \rangle$ に対して、$\displaystyle\bigcap_{i=0}^{k} \mathrm{Star}(v_i) \neq \emptyset$ であることを使う。

(2)　f_V の実現 f と g はホモトピックであることを示せ。

(3)　$f_V^0, f_V^1 : V(K_1) \longrightarrow V(K_2)$ について、$g(\mathrm{Star}(v)) \subset \mathrm{Star}(f_V^0(v)) \cap \mathrm{Star}(f_V^1)$ が成立するとき、K_1 の単体 $\langle v_0 \cdots v_k \rangle$ に対して、$\{f_V^0(v_0), \dots, f_V^0(v_k), f_V^1(v_0), \dots, f_V^1(v_k)\}$ は、K_2 の１つの単体の頂点の集合となることを示せ。

(4)　１月１６日の問題で与えた $[0,1] \times K_1$ の単体分割 $K_{[0,1]\times K_1}$ を用いて、$F_V : V(K_{[0,1]\times K_1}) \longrightarrow V(K_2)$ を $F(v_i^0) = f_V^0(v_i)$, $F(v_i^1) = f_V^1(v_i)$ と定義すると F_V は単体写像 $F : K_{[0,1]\times K_1} \longrightarrow K_2$ を定めることを示せ。

(5)　単体写像 f^0, $f^1 : K_1 \longrightarrow K_2$ に対し、$i^0 : K_1 \longrightarrow \{0\} \times K_1 \subset [0,1] \times K_1$, $i^1 : K_1 \longrightarrow \{1\} \times K_1 \subset [0,1] \times K_1$ とすると、$f^0 = F \circ i^0$, $f^1 = F \circ i^1$ である。チェイン写像 $f_*^0, f_*^1 : C_*(K_1) \longrightarrow C_*(K_2)$ に対し、$F_* \circ P : C_*(K_1) \longrightarrow C_*(K_2)$ は $f_*^1 - f_*^0 = \partial(F_* \circ P) + (F_* \circ P)\partial$ を満たすことを示せ。この結果、$f_*^1 = f_*^0 : H_*(K_1) \longrightarrow H_*(K_2)$ を示せ。

問題. X を 2 次元有限胞複体とし、X の頂点はただ１つであるとする．すなわち、

$$X = e^0 \cup e_1^1 \cup e_2^1 \cup \dots \cup e_\ell^1 \cup e_1^2 \cup e_2^2 \cup \dots \cup e_m^2.$$

このとき次を示せ.

(1)　$\pi_1(X, e_0) = \langle e_\lambda^1;\ \lambda = 1, \dots, \ell\ :\ \partial e_\mu^2;\ \mu = 1, \dots, m \rangle$

但し、e_λ^1 $(\lambda = 1, \dots, \ell)$ は生成元であり、∂e_μ^2 は、e_μ^2 の attaching map

$$S^1 = \partial D^2 \longrightarrow X^{(1)} = e^0 \cup e_1^1 \cup e_2^1 \cup \dots \cup e_\ell^1$$

のホモトピー類が定める $\pi_1(X^{(1)}, e_0)$ の元 (の共役類) をあらわす word である.

(2)　$H_1(X; \mathbf{Z}) = (\displaystyle\bigoplus_{\lambda=1}^{\ell} \mathbf{Z} e_\lambda^1)/(\bigoplus_{\mu=1}^{m} \mathbf{Z}(\partial e_\mu^2))$

但し、∂e_μ^2 は、e_μ^2 の attaching map $\partial D^2 \longrightarrow X^{(1)}$ による、$H_1(S^1)$ の生成元の $H_1(X^{(1)}, e_0)$ における像である.

問題. M を $\mathbf{R}^2$ の x 軸と y 軸の和集合とする. $M \times M - \Delta M$ のホモロジー群を求めよ. 但し, $\Delta M = \{(x, y) \in M \times M \mid x = y\}$.

ヒント：$M \times M$ は、平面の第一象限を１６枚貼り合わせて得られる図形である。その中の４枚に ΔM が含まれている。$M \times M - \Delta M$ の変形レトラクトを構成する。