２００７年度幾何学特別演習 II　問題　　１１月２１日

演習問題１． $n \geqq 2$ とする。
（１）$f : (D^n, S^{n-1}) \longrightarrow (D^n, S^{n-1})$ について、$\deg(f) = \deg(f|S^{n-1})$ を示せ。
（２）$f : (S^n, S^n_+) \longrightarrow (S^n, S^n_+)$ について、$\deg(f : S^n \longrightarrow S^n) = \deg(f : (S^n, S^n_+) \longrightarrow (S^n, S^n_+))$ を示せ。
（３）$k \in \mathbf{Z}$ に対して、$\deg(f) = k$ となる $f : S^n \longrightarrow S^n$ を構成せよ。
ヒント：$f : S^{n-1} \longrightarrow S^{n-1}$ について $\deg(f) = k$ となるものが構成できているとする（S^1 については、構成している）。次の式で定義する $Sf : S^n \longrightarrow S^n$ の写像度を計算する。

$$(Sf)(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) = (\sqrt{1 - {x_{n+1}}^2}\ f(\frac{(x_1, \ldots, x_n)}{\sqrt{1 - {x_{n+1}}^2}}), x_{n+1})$$

演習問題２． $n \geqq 2$ とする。n 次元の円板 $D^n = \{x \in \mathbf{R}^n \mid \|x\| \leqq 1\}$ の境界を ∂D^n とする。微分同相写像 $f : (D^n, \partial D^n) \longrightarrow (D^n, \partial D^n)$ について、
$f|\partial D^n : \partial D^n \longrightarrow \partial D^n$ は f の ∂D^n への制限を表す。
(1)　$f : D^n \longrightarrow D^n$, $f|\partial D^n : \partial D^n \longrightarrow \partial D^n$ が向きを保つ、向きを反対にするということの定義を延べよ。
(2)　f が向きを保つことと、$f|\partial D^n$ が向きを保つことは同値であることを示せ。

演習問題３． (1)　微分同相写像 $f : (D^n, \partial D^n) \longrightarrow (D^n, \partial D^n)$ $(n \geq 1)$ について、f が向きを保つことと $f_* = 1 : H_n(D^n, \partial D^n) \longrightarrow H_n(D^n, \partial D^n)$ と同値であることを示せ。
(2)　n 次元の球面 $S^n = \partial D^{n+1}$ について、微分同相写像 $g : S^n \longrightarrow S^n$ が向きを保つことと $g_* = 1 : H_n(S^n) \longrightarrow H_n(S^n)$ と同値であることを示せ。

問題． $f : S^n \longrightarrow S^n$ に対し、点 $y \in S^n$ で次の性質を持つものがあるとする。
y の D^n と同相な閉近傍 U が存在し、$f^{-1}(U)$ が連結成分 V_j $(j = 1, \ldots, k)$ の直和 $f^{-1}(U) = V_1 \sqcup \cdots \sqcup V_k$ であるとするとき、$f|V_i : V_i \longrightarrow U$ は同相写像である。
$f|V_j$ が向きを保つ同相写像のとき $\sigma(f|V_j) = +1$, $f|V_j$ が向きを裏返す同相写像のとき $\sigma(f|V_j) = -1$ と σ を定義するとき、$\deg(f) = \displaystyle\sum_{j=1}^{k} \sigma(f|V_j)$ を示せ。
ヒント：

$$\begin{array}{ccccccccc}
\bigsqcup(V_j, \partial V_j) & \longrightarrow & & & (S^n, S^n - \mathrm{Int}(f^{-1}(U))) & \xrightarrow{f} & (S^n, S^n - U) & \longleftarrow & (U, \partial U) \\
\uparrow & & & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
(V_j, \partial V_j) & \to & (S^n, S^n - \mathrm{Int}(V_j)) & \leftarrow & S^n & \xrightarrow{f} & S^n & \longrightarrow & (U, \partial U)
\end{array}$$

が H_n に誘導する準同型を考える。