２００７年度幾何学特別演習 II　問題　　１１月７日

演習問題１． 位相空間 X が交わりを持たない開集合 U, V の和集合のとき、
$H_*(U \sqcup V) = H_*(U) \oplus H_*(V)$ を示せ.
ヒント：$(U \sqcup V, V)$, (V, V), $(U, \emptyset)$ のホモロジー完全列を比較する。

演習問題２． 空でない位相空間 X の 0 次元のホモロジー群 $H_0(X)$ から、$\mathbf{Z}$ に全射が存在することを示せ。

演習問題３．（１０月２４日の演習問題１と基本的に同じ問題）
位相空間 X の閉部分集合 A, 開部分集合 V がが $X \supset A \supset V$ をみたすとする。$A \setminus V \subset W$ となる開集合 W があり、ホモトピー $h_t : X \longrightarrow X$ で、$h_0 = \mathrm{id}_X$, $h_t(A) \subset A$, $h_t(X - B) \subset X - B$, $h_t(U) \subset U$, $h_1(U) \subset A - B$ を満たすとする。
位相空間 X の開部分集合 U, 閉部分集合 B について、切除公理 $H_n(X, U) \cong H_n(X \setminus B, U \setminus B)$ が成立するならば、$H_n(X, A) \cong H_n(X \setminus V, A \setminus V)$ が成立することを示せ。

演習問題４． 正方形 Q の４つの辺のうちの２つをとり、辺と辺とを同相写像で同一視する。残りの２つの辺を同相写像で同一視する。得られる空間は何通りあるか。同相なものは１つと数える。
ヒント：隣り合わせの辺を同一視するか、向かい合わせの辺を同一視するかで、分け、同一視が正方形から導かれる辺の向きを保つか保たないかで分類する。

演習問題５． 演習問題４で得られた空間のホモロジー群を求めよ。

問題． (1) 演習問題４で得られた空間は２次元微分可能多様体と同相になることを示せ。
(2) 演習問題４で得られた２次元多様体は向き付け可能かどうか判定せよ。