

2007年度幾何学特別演習II 問題 10月24日

ホモロジー理論の公理は、以下のもの。

- (位相空間対, 連続写像) から (次数つき \mathbf{Z} 加群, 準同型写像) への共変関手である。
- 連続写像がホモトピックなら誘導される準同型は一致する。(ホモトピー公理)
- 対の完全列があり、連結準同型は自然性を持つ。
- $X \supset A \supset B$, A 開集合、 B 閉集合のとき、 $H_*(X \setminus B, A \setminus B) \cong H_*(X, A)$ (切除公理)
- $H_*(1 \text{ 点}) \cong \mathbf{Z} (* = 0), \cong 0 (* \neq 0)$. (次元公理)

公理に加えたくはないが、 X が弧状連結ならば、 $H_0(X) \cong \mathbf{Z}$ を必要に応じて使っても良いことにする。

演習問題1 . $X \supset A \supset B$, A 閉集合、 B 開集合のとき、 $A \setminus B$ を含む開集合 U で、包含写像 $(X, A) \rightarrow (X, A \cup U)$, $(X \setminus B, A \setminus B) \rightarrow ((X \setminus B) \cup U, U)$ がホモトピー同値となるものがあれば、 $H_*(X \setminus B, A \setminus B) \cong H_*(X, A)$ となることを示せ。

演習問題2 . (1) ホモロジー理論の公理から、 $H_*([0, 1], \{b\})$ を求めよ。ただし、 $b \in [0, 1]$.

(2) 空間対 $([0, 1], \{0\})$, $([0, 1], \{1\})$ のホモロジー完全列と空間対 $([0, 1], \{0, 1\})$ のホモロジー完全列を比較して、 $H_*([0, 1], \{0, 1\})$ を求めよ。

演習問題3 . $S^1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1\}$,

$S_+^1 = \{x = (x_1, x_2) \in S^1 \mid x_2 \geq 0\}$, $S_-^1 = \{x = (x_1, x_2) \in S^1 \mid x_2 \leq 0\}$ とする。

$(S_+^1, \partial S_+^1)$ と $(S_-^1, \partial S_-^1)$ のホモロジー完全列は、 $([0, 1], \{0, 1\})$ のホモロジー完全列と同じとみなせる。空間対 $(S_+^1, \partial S_+^1)$, (S^1, S_-^1) のホモロジー完全列を比較し、 $H_*(S^1, S_-^1) \cong H_*(S_+^1, \partial S_+^1)$ に注意して、 $H_*(S^1)$ を求めよ。

演習問題4 . $D^n = \{x \in \mathbf{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$, $S^{n-1} = \partial D^n = \{x \in \mathbf{R}^n \mid \|x\| = 1\}$,

$S_+^{n-1} = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in S^{n-1} \mid x_n \geq 0\}$,

$S_-^{n-1} = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in S^{n-1} \mid x_n \leq 0\}$ とする。

(1) $H_*(D^2, \partial D^2)$ を求めよ。

(2) $H_*(S^2)$ を求めよ。

(3) $H_*(D^3, \partial D^3)$ を求めよ。

(4) $H_*(S^3)$ を求めよ。

問題 . n 次元ユークリッド空間 \mathbf{R}^n は、次元が異なれば同相でないことを示せ。

問題 . $D^n = \{x \in \mathbf{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$, $S^{n-1} = \{x \in \mathbf{R}^n \mid \|x\| = 1\}$ とするとき、連続写像 $r : D^n \rightarrow S^{n-1}$ で $r|_{S^{n-1}} = \text{id}_{S^{n-1}}$ をみたすものは存在しないことを示せ。

ヒント : 包含写像 $i : S^{n-1} \rightarrow D^n$ との結合を考える。

問題 . すべての連続写像 $f : D^n \rightarrow D^n$ に対し、 $f(x) = x$ となる $x \in D^n$ が存在することを示せ (ブラウアーの不動点定理)。

ヒント : すべての点で $f(x) \neq x$ と仮定して、 $f(x), x$ を結ぶ直線と、 ∂D^n の交点の一方を x の関数として考える。次元は一般ですが、10月17日の演習問題2と同じです。

問題 . 連続写像 $f : S^n \rightarrow S^n$ が全射でないならば、 $\deg f = 0$ を示せ。ただし、写像度 $\deg f$ は $H_n(S^n; \mathbf{Z}) \cong \mathbf{Z}$ の生成元 1 を固定して、 $f_*(1) = n \cdot 1$ のとき、 $\deg f = n$ と定義する。