

2007年10月17日の講義内容について

講義の主な内容は、次のものになるはずでした。

1. 弧状連結な空間 X に対して、 $\pi_n(X, b_X)$ の同型類は基点 b_X のとりかたによらないこと。すなわち、 $b_X, b'_X \in X$ に対して、 $\pi_n(X, b_X) \cong \pi_n(X, b'_X)$ となること。

2. 弧状連結な空間 X に対して、 $\pi_n(X, b_X) \cong 0$ と $S^n \rightarrow X$ が $D^{n+1} \rightarrow X$ に拡張することは同値であること。

3. 弧状連結な空間 X, Y に対して、 $f : X \rightarrow Y$ は、 $f_* : \pi_1(X, b_X) \rightarrow \pi_1(Y, f(b_X))$ を誘導する。

π_1 の計算は、もともと容易ではないが、ファンカンペンの定理を使うと、運がよければ、生成元と関係式による表示を得ていることになる。しかし、(非可換な) 群を生成元と関係式で表示したとき、群の元の2つの表示 (word) が同じ元を表すかどうか (これは、1つの表示が単位元を表すかどうか) を決定するアルゴリズムは存在しないことが知られている。(だからと言って具体的に書かれた2つの表示が同じであることは、試行錯誤の末、示されることが多いし、異なることも、何とか示されることも多いので、「常に成功する戦略はない」ということが証明されているだけである。このできないことを、いくつかの条件のもとでできるようにすることが組合せ群論のひとつのテーマです。)

しかし、可換化して物事を考えることは無駄ではない。 $S^1, S^1 \vee S^1$ の基本群は $\mathbb{Z}, \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ であるが、可換化は \mathbb{Z}, \mathbb{Z}^2 であって、それらは同型ではない。このことを使って、 $\mathbb{R}^2 \setminus 1$ 点と $\mathbb{R}^2 \setminus 2$ 点 は同相ではないことがわかる。

4. 弧状連結な空間 X に対して、 $X = X_1 \cup X_2$ となる開集合 X_1, X_2 について、 $X_1, X_2, X_{12} = X_1 \cap X_2$ が弧状連結であれば、ファンカンペンの定理により、 $b_X \in X_{12}$ について、 $\pi_1(X, b_X) = \pi_1(X_1, b_X) *_{\pi_1(X_{12}, b_X)} \pi_1(X_2, b_X)$ と書かれる。この群がどういう群であるかは容易にはわからないことは3で述べたとおりである。

可換化したものについて ab と書くことにすると、 $\pi_1(X_1, b_X) *_{\pi_1(X_{12}, b_X)} \pi_1(X_2, b_X)$ の定義

$$1 \rightarrow \mathcal{N} \rightarrow \pi_1(X_1, b_X) * \pi_1(X_2, b_X) \rightarrow \pi_1(X_1, b_X) *_{\pi_1(X_{12}, b_X)} \pi_1(X_2, b_X) \rightarrow 1$$

($\pi_1(X_1, b_X) * \pi_1(X_2, b_X)$ は群の自由積、 \mathcal{N} は、 $\pi_1(X_1, b_X) * \pi_1(X_2, b_X)$ の部分集合 $\{i_1 * \alpha (i_2 * \alpha)^{-1} \mid \alpha \in \pi_1(X_{12}, b_X)\}$ を含む最小の正規部分群) から、

$$\pi_1(X_{12}, b_X)^{ab} \rightarrow \pi_1(X_1, b_X)^{ab} \times \pi_1(X_2, b_X)^{ab} \rightarrow \left(\pi_1(X_1, b_X) *_{\pi_1(X_{12}, b_X)} \pi_1(X_2, b_X) \right)^{ab} \rightarrow 0$$

という完全列が得られる。このとき、 $\pi_1(X_{12}, b_X)^{ab} \rightarrow \pi_1(X_1, b_X)^{ab} \times \pi_1(X_2, b_X)^{ab}$ は単射とは限らない。

将来、弧状連結な X に対して $\pi_1(X, b_X)^{ab} \cong H_1(X)$ となることを説明できるかもしれないが、このとき、 $\ker(\pi_1(X_{12}, b_X)^{ab} \rightarrow \pi_1(X_1, b_X)^{ab} \times \pi_1(X_2, b_X)^{ab}) \cong H_2(X_{12})$ となる。

1 の証明を間違えました。

正しくは、次のようにします。

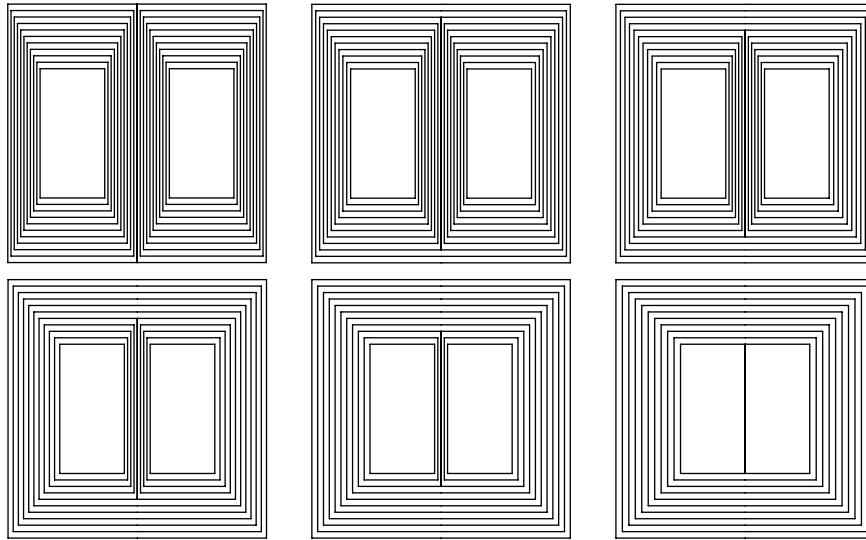
$b'_X \in X$ に対して、 b_X, b'_X を結ぶ曲線 γ ($\gamma(0) = b_X, \gamma(1) = b'_X$) をとる。
 $\hat{\gamma}(t_1, \dots, t_n) = \gamma(t_1)$ と置く。 $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_n) \in I^n$ に対し、 $\text{dist}(\mathbf{t}, \partial I^n) = \min\{|t_1|, |1-t_1|, \dots, |t_n|, |1-t_n|\}$ と置く。 $f \in \text{Map}((I^n, \partial I^n), (X, b_X))$ に対し、 $\bar{\gamma}_\# f : (I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, b'_X)$ を次で定義する。

$$\bar{\gamma}_\# f = \begin{cases} \gamma(1 - 4\text{dist}(\mathbf{t}, \partial I^n)) & (4\text{dist}(\mathbf{t}, \partial I^n) \leq 1) \\ f(\frac{1}{2} + 2(t_1 - \frac{1}{2}), \dots, \frac{1}{2} + 2(t_n - \frac{1}{2})) & (4\text{dist}(\mathbf{t}, \partial I^n) \geq 1) \end{cases}$$

同様に $g \in \text{Map}((I^n, \partial I^n), (X, b'_X))$ に対し、 $\gamma_\# g : (I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, b_X)$ を次で定義する。

$$\gamma_\# g = \begin{cases} \gamma(4\text{dist}(\mathbf{t}, \partial I^n)) & (4\text{dist}(\mathbf{t}, \partial I^n) \leq 1) \\ g(\frac{1}{2} + 2(t_1 - \frac{1}{2}), \dots, \frac{1}{2} + 2(t_n - \frac{1}{2})) & (4\text{dist}(\mathbf{t}, \partial I^n) \geq 1) \end{cases}$$

$\bar{\gamma}_\#$ は準同形写像 $\bar{\gamma}_* : \pi_n(X, b_X) \rightarrow \pi_n(X, b'_X)$ を誘導する。すなわち、 $\bar{\gamma}_\#(\bar{f}) = \overline{\bar{\gamma}_\#(f)}$ 、 $\bar{\gamma}_\#(f_1) \natural \bar{\gamma}_\#(f_2) \simeq \bar{\gamma}_\#(f_1 \natural f_2)$ が成立する。前者はすぐにわかる。後者のホモトピーを図示したものが下の図である。



同様に $\gamma_\#$ は準同形写像 $\gamma_* : \pi_n(X, b'_X) \rightarrow \pi_n(X, b_X)$ を誘導する。

最後に $\gamma_\#(\bar{\gamma}_\#(f)) \simeq f, \bar{\gamma}_\#(\gamma_\#(g)) \simeq g$ を基本群において $\bar{\gamma}, \gamma$ が逆元であることを示したのと同じようにして示すことにより、1 の証明が終わる。

2 について。

$D^{n+1} = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbf{R}^{n+1} \mid x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 \leq 1\}$, $S^n = \partial D^{n+1} = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbf{R}^{n+1} \mid x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1\}$ とする。

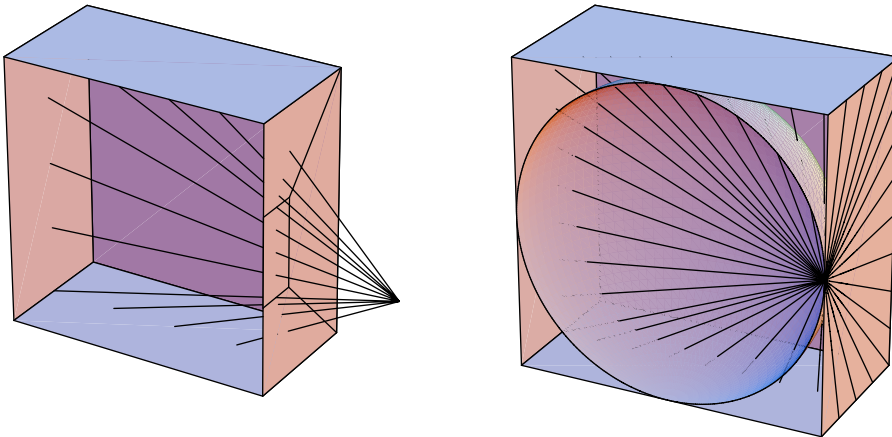
連続写像 $\varphi : [0, 1] \times I^n \rightarrow D^{n+1}$ で $\varphi(\partial([0, 1] \times I^n)) = S^n$, $\varphi([0, 1] \times \partial I^n \cup \{1\} \times I^n) = b \in S^n$, $\varphi|_{[0, 1] \times (0, 1)^n}$ は $D^{n+1} \setminus \{b\}$ への同相写像であるようなものを作る。

$[0, 1] \times I^n$ と $[-1, 1] \times [-1, 1]^n$ は座標方向を保つ相似変換で同相だから、 $[-1, 1] \times [-1, 1]^n$ について、 φ に対応する ϕ を構成する。

そのためには、まず同相写像 $\psi : [-1, 1] \times [-1, 1]^n \rightarrow [-1, 1] \times [-1, 1]$ で、 $\psi([-1, 1] \times \partial[-1, 1]^n \cup \{1\} \times [-1, 1]^n) = \{1\} \times [-1, 1]^n$ となるものを次のように作る。(2, 0, ..., 0) から出る半直線 ℓ が、 $[-1, 1] \times [-1, 1]^n$ と t_0^ℓ, t_1^ℓ を端点とする線分で交わるとき、 $\psi_1((1-u)t_0^\ell + ut_1^\ell) = ut_0^\ell + (1-u)t_1^\ell$ とする。さらに、 $\psi(s, t_1, \dots, t_n) = \psi_1(-s, t_1, \dots, t_n)$ とする。

次に $\pi : [-1, 1] \times [-1, 1]^n \rightarrow D^{n+1}$ を $b = (1, 0, \dots, 0)$ から出る半直線 m が、 $[-1, 1] \times [-1, 1]^n$ と b, t^m を端点とする線分で交わり、 D^{n+1} と b, x^m を端点とする線分で(この順に)交わるとき、 $\pi((1-u)b + ut^m) = (1-u)b + ux^m$ とする。そうすると、 $\pi(\{1\} \times [-1, 1]^n) = (1, 0, \dots, 0)$ として、 π は $[-1, 1] \times [-1, 1]^n$ で同相であるような連続写像となる。

$\phi = \pi \circ \psi$ が求める写像である。



こうして、連続写像 $\varphi : [0, 1] \times I^n \rightarrow D^{n+1}$ で $\varphi(\partial([0, 1] \times I^n)) = S^n$, $\varphi([0, 1] \times \partial I^n \cup \{1\} \times I^n) = b \in S^n$, $\varphi|_{[0, 1] \times (0, 1)^n}$ は $D^{n+1} \setminus \{b\}$ への同相写像であるようなものができた。

この連続写像 φ について、開集合 U の逆像 $\varphi^{-1}(U)$ が開集合であることは連続性そのものだが、ある集合 W の逆像 $\varphi^{-1}(W)$ が開集合ならば、 W は開集合であることがわかる。 $b \in W$ のとき、 $\varphi^{-1}(W)$ が開集合ならば、 $[-1, 1] \times [-1, 1]^n \setminus \varphi^{-1}(W) \subset [-1, 1] \times [-1, 1]^n \setminus \varphi^{-1}(b)$ は閉集合で、 $\varphi|_{[-1, 1] \times [-1, 1]^n \setminus \varphi^{-1}(b)}$ は $D^{n+1} \setminus \{b\}$ への同相写像だから、 $\varphi([-1, 1] \times [-1, 1]^n \setminus \varphi^{-1}(W)) = D^{n+1} \setminus W$ は閉集合。従って W は開集合である。

位相空間 X への連続写像 $G : [0, 1] \times I^n \rightarrow X$ が、 $\varphi([0, 1] \times \partial I^n \cup \{1\} \times I^n)$ を 1 点に写せば、連続写像 $G : D^{n+1} \rightarrow X$ で、 $G = g \circ \varphi$ となるものが(一意に)ある。 $F : I^n \rightarrow X$ が ∂I^n を 1 点に写せば、連続写像 $f : S^n \rightarrow X$ で、 $F = f \circ (\varphi|_{\{0\} \times I^n})$ となるものが存在する。

2の証明は、授業でなんとか正しく述べたが、ここで念のために繰り返すと以下のようになる。

これが、10月3日の問題の1つでした。少し難しかったかもしれません。

さて、 X は弧状連結とし $\pi_n(X, b_X) \cong \{0\}$ とする。任意の $f : S^n \rightarrow X$ に対し、 $f \circ (\varphi|_{\{0\} \times I^n}) : (\{0\} \times I^n, \{0\} \times \partial I^n) \rightarrow (X, f(b))$ を考える。1により、 $\pi_n(X, f(b)) \cong \{0\}$ だから、 $G : ([0, 1] \times I^n, [0, 1] \times \partial I^n \cup \{1\} \times I^n) \rightarrow (X, f(b))$ で $f \circ (\varphi|_{\{0\} \times I^n})$ を拡張するものが取れる。この G に対して、 $G = g \circ \varphi$ となる $g : D^{n+1} \rightarrow X$ をとれば、 $g|_{S^n} = f$ をみたす。

任意の $f : S^n \rightarrow X$ に対し、 $g : D^{n+1} \rightarrow X$ で $g|_{S^n} = f$ をみたすものがあるとす。 $\pi_n(X, b_X) \cong \{0\}$ の元の代表元 $a : (I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, b_X)$ をとる。 $(I^n, \partial I^n)$ を $(\{0\} \times I^n, \{0\} \times \partial I^n)$ と同一視して、写像 $f : (S^n, b) \rightarrow (X, b_X)$ で $a = f \circ (\varphi|_{\{0\} \times I^n})$ を満たすものがある。仮定から、この f に対して、 $g : D^{n+1} \rightarrow X$ で $g|_{S^n} = f$ をみたすものがある。 $G = g \circ \varphi$ とおくと、 $G : ([0, 1] \times I^n, [0, 1] \times \partial I^n \cup \{1\} \times I^n) \rightarrow (X, b_X)$ であり、 $G|_{\{0\} \times I^n} = a$ となるから、 $a \simeq c_{b_X}$ となる。